# MA38B – Análisis I

## Tarea 3

Prof: J. Dávila

Auxiliares: M. Bravo, M. Duarte

**1.** Sean $X$, $Y$ espacios Hausdorff compactos. Muestre que el conjunto generado (en el sentido de espacio vectorial) por $\{f(x)g(y) \mid f \in C(X,\mathbb{R}),\, g \in C(Y,\mathbb{R})\}$ es denso en $C(X \times Y,\mathbb{R})$.

**2.** Sea $X$ un espacio topológico localmente compacto, no compacto. Se define

$$C_0(X,\mathbb{R}) = \{\, f \in C(X,\mathbb{R}) \mid \forall \varepsilon > 0 \quad \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\} \text{ es compacto } \}.$$

Dotamos a $C_0(X,\mathbb{R})$ de la norma $\|\cdot\|_\infty$. probar que

a) $(C_0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

b) Si $A \subset C_0(X,\mathbb{R})$ es un álgebra totalmente separante entonces $A$ es densa en $C_0(X,\mathbb{R})$.

c) Toda función continua $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$$

puede ser aproximada uniformemente por una sucesión $f_k\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de funciones $C^\infty$ con soporte compacto (es decir, $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f_k(x) \neq 0 \,\}$ es relativamente compacto).

Ind.: considere

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

$g$ es $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y tiene soporte compacto.

**3.** Demuestre que $A$, el conjunto de las combinaciones lineales de funciones de la forma

$$f(x) = (x-z)^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N},$$

es denso en $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

También pruebe que $A_1$, el conjunto de las combinaciones lineales de

$$f(x) = (x-z)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

es denso en $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Ind.: verifique que dado $\varepsilon > 0$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ existen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tales que

$$\left| (x-z)^{-n} - \prod_{i=1}^{n} (x-z_k)^{-1} \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y luego pruebe que $\prod_{i=1}^{n} (x-z_k)^{-1} \in A_1$.

**4.** Sea $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ con la topología producto. Se define un multiíndice $p$ como una sucesión $(p_n)_n$ de naturales tal que $p_n = 0$ excepto para un número finito de índices. Dado un multiíndice $p$ y $x = (x_n) \in X$ definimos $x^p = \prod_{n=0}^{\infty} x_n^{p_n}$. La función $x \mapsto x^p$ de $X$ en $\mathbb{R}$ es continua (verificarlo). Un polinomio en $X$ es una función de la forma $\sum \alpha_p x^p$ donde la suma se extiende sobre una familia finita de multíndices. Pruebe que el conjunto de polinomios $\sum \alpha_p x^p$ es denso en $C(X, \mathbb{R})$.

**5.** Sea $X$ un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una seminorma $m$ en $X$ es una función $m : X \to \mathbb{R}_+$ tal que

a) $m(x+y) \leq m(x) + m(y) \quad x, y \in X$

b) $m(\alpha x) = |\alpha| m(x) \quad \alpha \in K,\ x \in X.$

Una familia $\mathcal{F}$ de seminormas en $X$ se dice separante si para todo $x \neq y$ existe $m \in \mathcal{F}$ tal que $m(x-y) \neq 0$.

Sea $\mathcal{F}$ una familia separante de seminormas en $X$ y consideremos la topología menos fina en $X$ que hace continua a toda $m \in \mathcal{F}$.

a) Verifique que los conjuntos de la forma

$$\{y \in X \mid m_k(y-x) < \varepsilon, 1 \leq k \leq n\}$$

con $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $m_k \in \mathcal{F}$ es una base esta topología.

b) Pruebe que $X$ es espacio vectorial topológico Hausdorff.