Análisis C2

P1) • $d(x,y)=0 \iff \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\min(d_n(x_n,y_n),1)}{2^n}}_{\geq 0} = 0$

$\iff \min(d_n(x_n,y_n),1) = 0 \quad \forall n$

$\iff d_n(x_n,y_n) = 0 \quad \forall n$

$\iff x_n = y_n \quad \forall n$

$\iff x = y$

• $d(x,y) = d(y,x)$ ✓

• sea $x,y,z \in X$

$d_n(x_n,y_n) \leq d(x_n,z_n) + d(y_n,z_n) \quad \forall n$

$\Rightarrow \min(d_n(x_n,y_n),1) \leq \min(d_n(x_n,z_n),1) + \min(d_n(y_n,z_n),1)$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{\min(d_n(x_n,y_n),1)}{2^n} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{\min(d_n(x_n,z_n),1)}{2^n} + \sum_{n\geq 0} \frac{\min(d_n(y_n,z_n),1)}{2^n}$

$\Rightarrow$ d es métrica.

Veamos que genera la topología producto

Es fácil ver que $\min(d_n(x_n,y_n),1) = \tilde{d}(x_n,y_n)$ es métrica y genera la misma topología que d_n.

o sea, supongamos que $d(x,y) = \sum_{n\geq 0} \frac{d_n(x,y)}{2^n}$ con $d_n(x,y) \leq 1 \ \forall$

definimos $d_i'(a,b) = \frac{d_i(a,b)}{2^i}$

Veamos que $d_i'(a,b)$ genera la misma topología que $d_i(\cdot,\cdot)$.

sea $B_{\varepsilon(i)}(x_0,d_i) = \{ x \mid d_i(x_0,x) < \varepsilon \}$

$\Rightarrow B_{\varepsilon(i)}(x_0,d_i') = \{ x \mid \frac{d_i(x_0,x)}{2^i} = d_i'(x_0,x) < \varepsilon \} \subseteq B_{\varepsilon(i)}(x_0,d_i)$.

y sea $B_{\varepsilon(i)}(x_0,d_i')$ y tomando $\varepsilon' = \varepsilon \cdot 2^i$

$B_{\varepsilon\cdot 2^i(i)}(x_0,d_i) \subseteq B_{\varepsilon(i)}(x_0,d_i') \Rightarrow$ generan la misma?

→ sea $\langle B(x_1,r_1), \ldots, B(x_k,r_k)\rangle = U$ abierto del producto (elemento de la base de abiertos)

sea $\rho = \min\{r_1, \ldots, r_k\}$, y sea un $x \in U$.

$B_d(x,\rho) \subseteq U$

sea $y \in B_d(x,\rho) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} d_n'(x_n,y_n) < \rho$

$\Rightarrow \forall m \quad d_m'(x_m,y_m) < \rho < r_m \quad \forall m \in \{1,\ldots,k\}$

$\Rightarrow \forall m \quad y_m \in B(x_m,r_m) \quad \forall m \in \{1,\ldots,k\}$

$\Rightarrow B_d(x,\rho) \subseteq U$.

→ Sea $x \in B_d(x,\varepsilon)$

sea N tq $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

elegimos bolas de radio $\frac{\varepsilon}{2N}$ en (Y_i, d_i') $i=0,\ldots,N-1$

Tenemos entonces que

$A = \langle B(x_1,\frac{\varepsilon}{2N}), \ldots, B(x_{N-1},\frac{\varepsilon}{2N})\rangle \subseteq B_d(x,\varepsilon)$

pues si $y \in A$ $\quad d_k'(y_k,x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2N}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} d_k'(y_k,x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ (dada la elección de N)

$\sum_{k=0}^{\infty} d_k'(y_k,x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

$\Rightarrow y \in B_d(x,\varepsilon)$

luego $\tau_{prod} = \tau_d$. ∎

ii) Veamos que $\prod_{i\in I} Y_i$ no satisface el primer axioma de numerabilidad si $J = \{i \in I \mid Y_i \text{ no es indiscreto}\}$ es tal que $|J| > \aleph_0$.

sea $y = (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i$ y sea $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base de vecindades numerable de y.

Para cada V_n $\exists$ $\langle U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m} \rangle \subseteq V_n$

tq $y \in \langle U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n} \rangle \leftarrow$ elemento de la base.

sea $I(n) = \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}$

sea $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I(n)$ se tiene que $|R| \leq \aleph_0$

dado que $|J| > \aleph_0$ $\Rightarrow \exists \lambda \in J$ tal que ningún V_n restringe a la coordenada λ

luego, dado que la topología de Y_λ no es indiscreta

tal que $y_\lambda \in U_\lambda \subsetneq Y_\lambda$ (sPG, pues se puede mover coord.)

y $\langle U_\lambda \rangle$ es una vecindad de $y \in \prod_{i \in I} Y_i$

y $\nexists$ V_n en la base de vecindades asociada a y

tq $V_n \subseteq \langle U_\lambda \rangle$.

$\Rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ No cumple el 1º axioma de numerabilidad

$\Rightarrow$ No es metrizable.

Nota: X metrizable $\Rightarrow$ cumple el 1º axioma de numerabilidad

directamente ~~pues~~ si X es metrizable

dado $x \in X$ $B = \{ B(x,r), r \in \mathbb{Q} \}$

es una base de vecindades numerable de $x \in X$ ∎

b)

i) • Veamos que Φ es continua

se tiene que $P_f \circ \Phi(x) = f(x)$ es continua $\forall f \in I$

$\Rightarrow$ Φ es continua.

• Φ es inyectiva: sean $x, y \in X$ con $x \neq y$.

Dado que X es Hausdorff $\{x\}$ y $\{y\}$ son cerrados

$x \in \{y\}^c$ ($\{y\}^c$ abierto)

$\Rightarrow \exists A_m \in B$ tq $x \in A_m \subseteq \{y\}^c$ (B es base de abtos)

se tiene $\{x\} \subseteq A_m \overset{\leftarrow \text{normalidad}}{\Rightarrow} \exists W$ abierto tq

$\{x\} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq A_m$

y tiene $x \in W \Rightarrow \exists A_n \in B$ tq $x \in A_n \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq$

luego $\{x\} \subseteq A_n \subseteq \overline{A_n} \subseteq A_m$

tomando $\overline{A_n}$ y A_m^c (ambos cerrados)

$\Rightarrow$ (Urysohn) $\exists f : X \to [0,1]$ continua con $f \equiv 0$ en $\overline{A_n}$ (en particular $f \equiv 0$ en A_n)

y $f \equiv 1$ en $A_m^c = X \setminus A_m$.

luego, $f \in I$ y $f(x) = 0 \wedge f(y) = 1$.

luego $\Phi(x)$ y $\Phi(y)$ "difieren en la f-ésima coordenada"

i.e. $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. ∎

ii) Veamos que Φ es abierta. $\mathcal{V} = \{V_f \mid V_f = f^{-1}]0,1], f \in I\}$

Tal como en la clase anterior veamos que

es base de abiertos de X.

Dado U abierto de X y $x \in U \overset{B \text{ base}}{\Longrightarrow} \exists A_m$ tq $\{x\} \subseteq A_m \subseteq U$

$\overset{\leftarrow \text{Normalidad}}{\Longrightarrow} \exists W$ abto $\{x\} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq A_m \subseteq U$. $\overset{B \text{ base}}{\Longrightarrow} \exists A_n$ tq $\{x\} \subseteq A_n \subseteq \overline{A_n} \subseteq$

$\overset{\text{Urysohn}}{\Longrightarrow} \exists \hat{f}$ tq $\hat{f} \equiv 1$ en $\overline{A_n}$ y $\hat{f} \equiv 0$ en A_m^c. $\overset{\circledS}{\Longrightarrow} \hat{f} \equiv 0$ en U^c

$\Rightarrow$ $x \in V_{\hat{f}} \subseteq U$

pues $V_{\hat{f}}^c = \hat{f}^{-1}\{0\} \supseteq U^c$

Veamos que toda imagen de un elemento de V' es abierta

$$\phi(V_{f_0}) = \{ \{ t_f \}, t_{f_0} > 0 \} \cap \phi(x)$$

$$= \langle]0,1]_{f_0} \rangle \cap \phi(x)$$

abierto.

$\Rightarrow$ ϕ es abierta.

Luego $\phi : X \longrightarrow \phi(x)$

es biyectiva, continua y abierta $\Rightarrow$ es homeomorfismo. ∎

iii) Demostremos que X es metrizable.

Notemos que dado $A_n \in B$ se puede construir f en I tq $\exists A_m \in B$

$f \equiv 0$ en A_n $\quad \bar{A}_n \subseteq A_m$ $\quad f \equiv 1$ en A_m^c (igual a las construcciones hechas antes)

Escogemos tal f y llamémosla f_n

sea $J = \{ f_n ; n \in \mathbb{N} \}$ notemos que J es numerable

y definimos $\phi : X \longrightarrow \prod_{f_n \in J} [0,1] = Y$

Y es metrizable (parte a.i)

y $\phi : X \longrightarrow \phi(X) \cap Y$ es un homeomorfismo (se prueba exactamente igual).

$\Rightarrow$ $X \cong \phi(X) \subseteq Y$ metrizable

$\Rightarrow$ X es metrizable. ∎

iv) X es compacto $\Rightarrow$ $\phi(x)$ es compacto.

y, el producto arbitrario de Hausdorff es Hausdorff

$\Rightarrow$ $\phi(x)$ es cerrado. ∎

c) Si (X,d) es un espacio métrico separable

$\Rightarrow \exists \; D = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ denso en X

la base $\mathcal{B} = \{ B(x_j, q) \;\; x_j \in D, q \in \mathbb{Q} \}$

es base de abiertos: (y $\mathcal{B}$ numerable)

sea U abierto y $x \in U$ $\Rightarrow \forall \; r \in \mathbb{R} \quad B(x,r) \cap D \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists \; \bar{r} \in \mathbb{R}$ tq $\bar{r} > 0$ $B(x,\bar{r}) \subseteq U$ pq la bola son base de abiertos

$\Rightarrow \exists \; x_j \in D$ tq $x_j \in B(x,\bar{r})$ y, sea $\delta = \frac{d(x,x_j)}{2}$

y sea $q \in \mathbb{Q} \quad 0 < q < \delta$

$\Rightarrow B(x_j, q) \subseteq B(x,\bar{r}) \subseteq U$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ es base de abiertos.

Ahora, debemos probar que.

X normal Hausdorff con base numerable de abiertos

$\Longleftrightarrow$

X es metrizable y separable.

$\underline{\Leftarrow)}$ $\cdot$ X metrizable $\Rightarrow$ X Hausdorff

$\cdot$ X separable y metrizable $\Rightarrow$ X tiene base numerable de abiertos

Además X métrico $\Rightarrow$ X normal (lo sabemos ??). (agregar dem)

$\underline{\Rightarrow)}$ X normal Hausdorff con base numerable de abiertos

$\Rightarrow$ X metrizable (parte anterior)

y "Base de abiertos numerable $\Rightarrow$ separable"

$\underline{\text{dem}}$: Sea $\mathcal{B} = \{B_n, n\in\mathbb{N}\}$ base de abiertos numerable.

sea $x_n \in B_n$ algún elemento. $\Rightarrow D = \{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ es numerable

y denso en X

sea U un abierto de X

$\Rightarrow U = \bigcup_{C \in B} C$ y $x_c \in D$

$\Rightarrow U \cap D \neq \emptyset \quad \forall U$ abierto

$\Rightarrow \overline{D} = X$ $\blacksquare$