Pregunta 1

Un parque de diversiones requiere dividir su nuevo terreno de 50 hectáreas en tres categorías: Tiendas, Comida y Entretenciones. Cada hectárea usada para Entretenciones genera un beneficio de 150 US$/hora; cada hectárea de Comida, 200 US$/hora y una de Tiendas, 300 US$/hora. Además, existe una serie de restricciones sobre como se puede dividir el terreno:

1. Sólo 20 ha son utilizables por las tiendas.
2. Regulaciones de terreno exigen por lo menos 1000 árboles en el parque, divididas en grupos de 20 árboles. Una hectárea de Comida tiene 2 grupos de árboles; una de Entretenciones, 1 grupo de árboles y una de Tiendas no tiene árboles.
3. No más de 180 personas pueden trabajar en el parque. Se necesitan 3 personas por hectárea de Entretención; 6 por hectárea de Comida y 3 por hectárea de Tiendas.

Dada esta información, se le pide:

(a) Plantear el problema descrito como uno de programación lineal, con el fin de maximizar el beneficio del parque.

(b) Demostrar que el tableau óptimo del problema es el siguiente:

0	0	0	100	0	150	200	9500
1	0	0	2	0	-1	-2	30
0	0	0	0	1	-1	-1	10
0	1	0	-1	0	0	1	10
0	0	1	0	0	1	1	10

Indicación: Note que la restricción de trabajadores se puede factorizar.

(c) Suponga ahora que el ítem Comida sólo genera un beneficio de 180 US$/hora. ¿Cuál es la nueva solución del problema? Entregue el valor óptimo y una división óptima del terreno.

(d) Suponga que el concejo de la comuna estudia aumentar la cantidad de árboles necesaria, a 1020. ¿Cuánto le costará al parque esta modificación, y qué será modificado? ¿y si aumenta a 1300? ¿y si ahora disminuye a 600?

(e) Una empresa inmobiliaria desea comprar 2 hectáreas al parque para construir edificios. ¿Cuánto es la mínimo monto (en US$/hora) que debiera pedir el dueño del parque por este terreno?

(f) Ahora el parque estinteresado en instalar una Piscina con Tobogán. Cada hectárea para la Piscina contiene 1 grupo de 20 árboles y requiere 4 trabajadores. ¿Cuánto beneficio por hectárea debiera reportar esta piscina (en US$/hora) para considerar su construcción?

Solución

(a) El problema es el siguiente:

$$\begin{array}{lccccc}
\text{máx} & 150x_1 & +200x_2 & +300x_3 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 50 \\
 & & & x_3 & \leq & 20 \\
 & x_1 & +2x_2 & & \geq & 50 \\
 & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 60 \\
 & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

donde x_1, x_2, x_3 representan entretención, comida y tiendas, respectivamente.

(b) Dado que la tabla óptima no es única (pues depende del orden en que se elije la entrada de las variables no básicas), lo que salga en esta pauta no es la única solución. Es sólo a modo de ejemplo.

Fase I

	↓										
-3	-5	-3	-1	-1	1	-1	0	0	0	0	-180
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	50
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	20
1	2	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	50
1	2	1	0	0	0	1	0	0	0	1	60

entra x_2 y sale x_{10},

		↓									
-$\frac{1}{2}$	0	-3	-1	-1	-$\frac{3}{2}$	-1	0	0	$\frac{5}{2}$	0	-55
$\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	-$\frac{1}{2}$	0	25
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	20
$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	-$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	25
0	0	1	0	0	1	1	0	0	-1	1	10

entra x_3 y sale x_{11}

			↓								
-$\frac{1}{2}$	0	0	-1	-1	$\frac{3}{2}$	2	0	0	-$\frac{1}{2}$	3	-25
$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	-$\frac{1}{2}$	-1	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	15
0	0	0	0	1	-1	-1	0	1	1	-1	10
$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	-$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	25
0	0	1	0	0	1	1	0	0	-1	1	10

entra x_4 y sale x_8,

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
 & & & & \downarrow & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -10 \\
\hline
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 10 \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 25 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 10
\end{array}
$$

Por último, entra x_5 y sale x_9, el tableau final de la Fase I queda:

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 10 \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 25 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 10
\end{array}
$$

La base para comenzar fase II es $\{x_4, x_5, x_2, x_3\}$. Para comenzar debemos calcular los costos reducidos. En este caso

$$
c_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \\ -300 \end{pmatrix}, \quad c_N = \begin{pmatrix} -150 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Por lo tanto los costos reducidos resultan ser $\tilde{c}_N^t = (-50, 200, 300)$, por lo que el tableau para comenzar fase I es:

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
\downarrow & & & & & & & \\
-50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 300 & 8000 \\
\hline
\textcircled{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 10 \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 25 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10
\end{array}
$$

Ahora entra x_1 y sale x_4, y se llega a la tabla pedida.

(c) Es cosa de recalcular los nuevos costos reducidos, para la base anterior. En este caso, los costos básicos son:

$$
c_B = \begin{pmatrix} -150 \\ 0 \\ -180 \\ -300 \end{pmatrix},
$$

y los costos reducidos son $\tilde{c}_N = c_N - c_b^t B^{-1}N$, con $c_N, B^{-1}N$ igual que en la pregunta anterior. Luego, el vector c_N es:

$$c_N = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}$$

cuyos valores son todos positivos, luego la solución básica no cambia. El punto y el valor óptimos son:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = c^t\bar{x} = 9300$$

(d) La tercera restricción cambia su lado derecho a 51. Luego, verifiquemos que pasa con la misma base solución ante este cambio.

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 51 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 31 \\ 10 \end{pmatrix}$$

como los costos reducidos no cambian y $B^{-1}b \geq 0$, seguimos en el óptimo anterior que es $\bar{x} = \begin{pmatrix} 31 \\ 10 \\ 9 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y el valor óptimo es $\bar{z} = c_B^t\bar{x} = 9350$, luego el cambio le costaría 150 US$/hora.

Para el cambio a 1300, el lado derecho de la tercera restricción cambia a 65, luego:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 65 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \\ 45 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

En este caso, tenemos que $x_3 < 0$, por lo que debemos iterar con el algoritmo simplex-dual. Sin embargo, notamos que la primera fila del tableau son sólo términos no-negativos, luego el dual es no acotado, lo que implica que el primal es infactible. En otras palabras, no existe asignación de hectáreas que satisfaga las condiciones requeridas.

Si ahora se disminuye la cantidad de árboles a 600, quiere decir que el valor b_3 disminuye a 30. Recalculando $B^{-1}b$ se obtiene el siguietne tableau:

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
 & & & & & \downarrow & & \\
0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 150 & 200 & 12500 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -10 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 30
\end{array}
$$

como $x_5 < 0$ debemos iterar con simplex dual, lo que nos lleva al siguiente tableau:

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 100 & 150 & 0 & 50 & 11000 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 10 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20
\end{array}
$$

Por lo que el beneficio aumenta a 11.000 US$/hora y la nueva distribución de terreno es $\bar{x} = (20, 10, 20, 0, 0, 10, 0)$.

(e) En este caso debiéramos revisar la variable dual correspondiente a la primera restricción primal (pues ésta representa la máxima dispocisión a pagar por variaciones en el recurso de la restricción correspondiente). La solución dual es (se observa en los costos reducidos de las variables de holgura del problema original):

$$
\bar{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}
$$

Observando que la primera variable dual es 100, se concluye que la mínima cantidad a recibir por vender esas 2 ha es de $100 \times 2 = 200$ US$/hora.

(f) Ahora el nuevo problema es el siguiente:

$$
\begin{array}{lccccll}
\text{máx} & 150x_1 & +200x_2 & +300x_3 & +P_4x_4 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq & 50 \\
 & & & x_3 & & \leq & 20 \\
 & x_1 & +2x_2 & & +x_4 & \geq & 50 \\
 & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +\frac{4}{3}x_4 & \leq & 60 \\
 & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}
$$

Donde x_4, en este ocasión, representa las hectáreas de piscina. Como seguimos teniendo 4 restricciones, podemos ver que sucede con la misma base del problema original. Calculando los costos reducidos de la variable x_4.

$$\tilde{c}_N^4 = -P_4 - c_B^t (B^{-1}N)_{\bullet 4},$$

donde

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_B^t = (-300, 0, -150, -200)$$

luego $\tilde{c}_N^4 = -P_4 + \frac{650}{3}$, y la condición para que entre a la base (ie, se considere su construcción) es que $\tilde{c}_N^4 < 0$, es decir, $P_4 > \frac{650}{3}$.