Problema:

S convexo

PDQ: x en S es punto extremo ssi S\{x} es convexo

Dem:
=>
x pto extremo   ssi
[existen a en]0,1[,y,z en S: (x=ay+(1-a)z) entonces y=z=x]

Sean p,q en S\{x}.
Probemos que para_todo a en [0,1], ap+(1-a)q esta en S\{x}
Por contradiccion:
si ap+(1-a)q no esta en S\{x}, como S es convexo,
la unica alternativa es que x=ap+(1-a)q,
pues x esta en S. Por definicion de punto extremo:
x=p=q, lo que implica que p,q no estan en S\{x}.

<=
Por contrareciproca:
x no es punto extremo ssi
[para todo a en]0,1[,y,z en S: (x=ay+(1-a)z) AND y,z distintos a x]
Para ver que S\{x} no es convexo
basta tomar a en]0,1[,y,z en S\{x} tales que ay+(1-a)z = x, pues x no es
punto extremo, por lo tanto, existe una combinacion convexa de elementos de
S\{x} que caen fuera de S\{x}, por lo tanto S\{x} no es convexo.

Problema:

Demuestre que d es direccion de un poliedro P ssi Ad=0 AND d>=0

Dem:

Se sabe que para todo x en P, un direccion satisface:
- para_todo a>=0, A(x+ad)=b
- para_todo a>=0, x+ad>=0

La primera condicion implica:
Ax + aAd =b
b + aAd =b
aAd =0
Como a>=0, Ad=0.

Supongamos que existe una coordenada d_i<0. Como la
segunda condicion implica que x_i+ad_i>=0 para todo i,
podemos tomar a=(-x_i - epsilon)/d_i>=0 , epsilon > 0
con lo cual:
x_i + ((-x_i-epsilon)/d_i)d_i   >=0
x_i - x_i - epsilon   >=0
Contradiccion: epsilon<=0.