MA37A Optimización
Algoritmo Simplex

Profesor: Héctor Ramirez
Auxiliares: Francisco Jara, Oscar Peredo

12 de agosto de 2005

Algorithm 1 Simplex Fase II

Escribir el problema en forma canónica (introduciendo variables de holgura si es necesario):

$$\min\ c^t x \quad \text{s.a } Ax = b,\ x \geq 0$$

$A = [B|N]$, con B matriz de $n \times n$ invertible (base)
$c = [c_B|c_N], x = [x_B|x_N]$
Considerar nuevo problema: ▷ Ver Comentario 1

$$\begin{array}{rc} \min & (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N + c_B^t B^{-1} b \\ \text{s.a} & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_N \geq 0 \\ & X_B \geq 0 \end{array}$$

Vector de costos reducidos: $\overline{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N$ ▷ Ver Comentario 2
Un punto extremo del poliedro sera $x = [x_B|x_N] = [B^{-1}b|0]$
El problema se puede ver de la forma (tableau):

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \overline{c}_N^t & -C_B^t B^{-1} b \\ \hline I & B^{-1} N & B^{-1} b \end{array}$$

iteración
  si $\overline{c}_N^t \geq 0$
    El **óptimo** es $x = [B^{-1}b|0]$
    parar iteración

  si $\exists (\overline{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene solamente números negativos o ceros
    El problema es **no acotado**
    parar iteración

  si $\exists (\overline{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene algún número mayor que cero
    Si x_s es la variable de la columna respectiva, se le hace entrar a la base, sacando x_r, con r (en el contexto de la base) tal que:

$$\frac{b_r}{a_{r,s}} = \min_{a_{i,s} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,s}} \right\}$$

    Pivotear en (s, r) para sacar x_r e ingresar x_s

fin iteración

Comentarios:

1. $Ax = Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

2. Si $\overline{c}_N^t \geq 0$, entonces $x_N \geq 0$ y la funcion objetivo crece, el objetivo es hacer igual a cero los costos reducidos

Problema 1. *Resolver el siguiente problema usando el metodo siplex:*

$$\begin{array}{lrrrcl} \textbf{\textit{minimizar}} & x_1 & +x_2 & -4x_3 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 9 \\ & x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq & 2 \\ \\ & -x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 4 \\ & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Solución 1. *Como se pide minimizar, no es necesario hacer el cambio maximizar* $c^t x \Leftrightarrow -$*minimizar* $-c^t x$. *Poner el problema en forma canónica: (*x_4, x_5, x_6 *son variables de holgura)*

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

El problema ya se encuentra en la forma:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \overline{c}_N^t & -C_B^t B^{-1}b \\ \hline I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

Comenzemos a iterar:

- *Iteración 1:*

  - *Se satisface condición de linea 17, para la columna 3. Entra* x_3 *a la base.*
  - $\min\limits_{a_{i,3}>0} \left\{ \dfrac{b_3}{a_{i,3}} \right\} = \dfrac{b_3}{a_{3,3}}$.
    Se pivotea en $(3,3)$.
    Sale la variable básica asociada a la tercera coordenada: x_6.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{rrrrrr|r} -3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 4 & -16 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

- *Iteración 2:*

  - *Se satisface condición de linea 17, para la columna 1. Entra* x_1 *a la base.*
  - $\min\limits_{a_{i,1}>0} \left\{ \dfrac{b_1}{a_{i,1}} \right\} = \dfrac{b_1}{a_{1,1}}$.
    Se pivotea en $(1,1)$.
    Sale la variable básica asociada a la primera coordenada: x_4.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & -17 \\ \hline 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 13/3 \end{array}$$

- *Iteración 3:*

  - *Se satisface condición de linea 9. El valor óptimo de la función objetivo es* -17 *y el vector solución es:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/3 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 13/3 \end{aligned}$$

  - *Parar iteración*

Problema 2. *Resolver el siguiente problema usando el método siplex:*

$$\begin{array}{lccccc} \textbf{\textit{maximizar}} & 3x_1 & 2x_2 & x_3 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \leq & 3 \\ & -x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 5 \\ & & & & & \\ & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Solución 2. *Como se pide maximizar, es necesario hacer el cambio maximizar* $c^t x \Leftrightarrow -$*minimizar* $-c^t x$. *Poner el problema en forma canónica: (*x_4, x_5 *son variables de holgura)*

$$\begin{array}{ccccc|c} -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Comenzemos a iterar:

- *Iteración 1:*

  - *Se satisface condición de linea 17, para la columna 1. Entra* x_1 *a la base.*
  - $\min_{a_{i,1}>0} \left\{ \dfrac{b_1}{a_{i,1}} \right\} = \dfrac{b_1}{a_{1,1}}$.
    Se pivotea en $(1,1)$.
    Sale la variable básica asociada a la primera coordenada: x_4.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -13/2 & -2 & 3/2 & 0 & 9/2 \\ \hline 1 & -3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & 2 & 1/2 & 1 & 13/2 \end{array}$$

- *Iteración 2:*

  - *Se satisface condición de linea 13, para la columna 2.*
  - *El problema es no acotado.*