

Dos Problemas de Modelamiento Ma37a

Profesor: Hector Ramírez
Auxiliar: Francisco Jara, Oscar Peredo
Ayudante: Rodrigo López

Problema

Se desea enviar un producto desde *Puerto Montt* a *Castro*. Existen solo 3 empresas de transbordadores:

Cruz del Sur y *Transmar*, que zarpan desde *Pargua*
y *Queilen*, que lo hace desde *Chaiten*.

Hay un convenio con cada una de estas empresas de transporte, de modo que solo se tarifa por el exceso de carga (según una capacidad preestablecida por cada empresa de transporte).

Por otro lado, en la isla existen 4 puertos:

Ancud y *Chacao*, a los cuales se puede llegar navegando desde *Pargua*.
Quellón y *Castro*, a los que se llega desde *Chaiten*.

Hay dos limitaciones importantes a considerar:

- + No se puede acumular el producto en ninguna ciudad.
- + Solo tenemos 10 millones de pesos para invertir.

Se detallan a continuación los costos (en millones) del envío de t toneladas del producto,

Transporte Terrestre

	Pargua	Chaiten
Puerto Montt	$0,4t$	$0,6 + 0,1t$

	Castro
Ancud	$0,9t$
Chacao	$(t - 1)^2$
Quellón	$0,2$

Transporte Marítimo

	Par-Anc	Par-Chac	Chai-Quell	Castro
Cruz d S.	$0,3t + 0,1$	$0,2t$		
Transmar	$0,3$	$0,2t + 0,2$		
Queilen			$0,1t$	$0,6t$

Recuerde que solo se tarifa cuando se usa un servicio y cuando hay exceso.

Capacidades

Cruz d S.	3
Transmar	2.8
Queilen	2 (chaiten-quell); 0 (chait-castr)

Se pide:

- i) Hacer un esquema de este problema.
- ii) Modelar el problema de maximizar el envío.

Indicaciones:

Considere las variables $X_{OR,DES}$ (ORigen y DESTino).

Para controlar el exceso, puede serle útil considerar la función $\max(0, x)$.

Problema... con solución

En una cierta fábrica se ha detectado que la actual asignación de recursos humanos es ineficiente, por lo que se le ha encargado a usted la tarea de reasignar el personal disponible.

En el proceso productivo hay tres tareas:

1. Mantenimiento y operación de máquinas.
2. Clasificación de los productos.
3. Embalaje de los productos.

Además, el personal disponible se clasifica en tres grupos:

1. Personas con capacitación y experiencia.
2. Personas con capacitación pero sin experiencia.
3. Personas sin capacitación ni experiencia.

Las cantidades de unidades del producto que una persona produce al mes están dadas por la siguiente tabla:

tarea \ grupo	grupo 1	grupo 2	grupo 3
tarea 1	2.000	500	200
tarea 2	1.200	1.500	800
tarea 3	800	1.000	700

A una persona del grupo 1 se le pagan \$1.000, a una del grupo 2 \$700 y a una del grupo 3 \$350 (al mes, dinero medido en miles de pesos). Además usted dispone de 20 personas del grupo 1, 50 del grupo 2 y 80 del grupo 3 y se le ha dado un presupuesto mensual de \$75.000 (también medido en miles de pesos). Por último, en cada tarea la producción no puede ser inferior a 40.000 unidades al mes, pues si no se detiene la cadena productiva.

Plantee el problema como uno de optimización en que se busca maximizar la producción.

Solución

Las variables de decisión son los números de personas de cada grupo asignadas a cada tarea, es decir:

x_{ij} = número de personas del grupo i asignadas a la tarea j

La suma de todas las personas asignadas de un mismo grupo no debe ser mayor que la cantidad de gente disponible de dicho grupo, es decir:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3 x_{1j} &\leq 20 \\ \sum_{j=1}^3 x_{2j} &\leq 50 \\ \sum_{j=1}^3 x_{3j} &\leq 80\end{aligned}$$

La suma de todas las personas asignadas de todos los grupos, ponderadas por su respectivo sueldo, no debe sobrepasar el presupuesto disponible, es decir:

$$1,000 \sum_{j=1}^3 x_{1j} + 700 \sum_{j=1}^3 x_{2j} + 350 \sum_{j=1}^3 x_{3j} \leq 75,000$$

La suma por tarea de las personas asignadas, ponderadas por su respectiva productividad, debe ser mayor a 40.000, que es la producción mínima para que no se detenga la cadena productiva, es decir:

$$\begin{aligned}2,000x_{11} + 500x_{21} + 200x_{31} &\geq 40,000 \\ 1,200x_{12} + 1,500x_{22} + 800x_{32} &\geq 40,000 \\ 800x_{13} + 1,000x_{23} + 700x_{33} &\geq 40,000\end{aligned}$$

No olvidemos imponer positividad de las variables:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

La función a maximizar es la suma de las personas en cada grupo y en cada tarea, ponderada por la productividad del segmento respectivo, es decir:

$$2,000x_{11} + 500x_{21} + 200x_{31} + 1,200x_{12} + 1,500x_{22} + 800x_{32} + 800x_{13} + 1,000x_{23} + 700x_{33}$$

Finalmente, escribamos el problema de la forma $\max c^t x$ s.a. $Ax \leq b$, para lo cual basta reconocer c, A, b y x .

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2,000 \\ 1,200 \\ 800 \\ 500 \\ 1,500 \\ 1,000 \\ 200 \\ 800 \\ 700 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 80 \\ 75,000 \\ -40,000 \\ -40,000 \\ -40,000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ 1,000 & 1,000 & 1,000 & 700 & 700 & 700 & 1 & 1 & 1 \\ -2,000 & & & -500 & & & 350 & 350 & 350 \\ & -1,200 & & & -1,500 & & & -800 & \\ & & -800 & & & -1,000 & & & -700 \\ -1 & & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Agradecimientos a Roberto Cortez