MA37A Optimización
Planteamiento de Problemas y Resolución gráfica

Profesor: Héctor Ramirez
Auxiliares: Francisco Jara, Oscar Peredo

2 de agosto de 2005

La idea de los siguientes problemas es plantearlos como problemas de maximización o minimización de una función objetivo $c^t x$ sujeta a restricciones del tipo $Ax \leq b, Ax = b$ o $Ax \geq b$.

Problema 1 (Problema de Transporte). *Se tienen m plantas productoras y n bodegas. La planta i-ésima genera una cantidad s_i de productos y la bodega j-ésima puede almacenar d_j productos. El costo de transportar un producto desde la planta i hasta la bodega j es de c_{ij}. Encontrar el número de productos que se deben enviar a cada bodega, de modo que se minimize el costo de transporte.*

Solución 1. *Sea x_{ij} el número de productos que se enviarán desde la planta i a la bodega j.*
La función que se desea minimizar es:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

La primera restricción se refiere al número de productos que pueden salir de la planta i-ésima:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i$$

La segunda restricción se refiere al número de productos que puede almacenar la bodega j-ésima:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

La tercera restricción viene del hecho que no pueden haber x_{ij} negativos, pues no es consistente con el enunciado:

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j$$

Luego, el problema se plantea de la forma:

$$\begin{array}{ll} min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ s.a & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i,\ \forall i = 1, ..., m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j,\ \forall j = 1, ..., n \\ & x_{ij} \geq 0,\ \forall i, j \end{array}$$

Problema 2 (Problema de la Mochila (o Knapsack)). *Se intenta llenar una mochila de volumen fijo* V *con* n *items cada uno de volumen* v_i *y donde a cada item se le asocia un factor de necesidad* a_i*, es decir, si* $a_i > a_j$ *significa que el item* i*-ésimo es más necesario que el* j*-ésimo. Plantee el problema para maximizar la cantidad de items necesarios (pueden haber uno o mas items del mismo tipo y no pueden haber "trozos"de algun item).*

Solución 2. *Se definen las variables* x_j *como la cantidad de items del tipo* j*-ésimo.*
La función a maximizar es:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

La restricción fundamental es que no se sobrepase el volumen de la mochila:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V$$

Las restricciones que faltan tienen que ver con la positividad en la cantidad de items y su valor, que necesariamente debe ser entero:

$$\begin{aligned} x_j &\geq 0, \forall j \\ x_j &\in \mathbb{Z}, \forall j \end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema queda de la forma:

$$\begin{aligned} max \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \\ s.a \quad & \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V \\ & x_j \geq 0, \forall j \\ & x_j \in \mathbb{Z}, \forall j \end{aligned}$$

Problema 3 (Sumar N **primeros números).** *Se tienen* N *números* $c_1, ..., c_N$ *cuyo orden es* $c_{\sigma(1)} \leq ... \leq c_{\sigma(N)}$*. Encontrar el valor de* $\sum_{i=1}^{K} c_{\sigma(i)}$*, con* $K \leq N$*.*

Solución 3. *La idea es encontrar la suma mínima que involucre a* K *números, es decir:*

$$\begin{aligned} min \quad & \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \\ s.a \quad & \sum_{i=1}^{N} x_i = K \\ & x_i \in \{0, 1\}, \forall i \end{aligned}$$

Al ser variables binarias, con la primera restricción se garantiza que habrán K *variables activas, lo que entrega como función objetivo la suma de los números asociados.*

Problema 4 (Programación de horarios). *Un hospital planea hacer horarios nocturnos semanales para las enfermeras. Cada día se requieren* D_i *enfermeras y cada enfermera puede trabajar 5 dias seguidos. Encuentre el número mínimo de enfermeras que se necesita contratar.*

Solución 4. *Las variables x_i serán el número de enfermeras que comienzan a trabajar en el día j. Se quiere minimzar la siguiente función:*

$$\sum_{i=1}^{7} x_i$$

Las enfermeras que comienzan a trabajar el Lunes, trabajaran sin parar hasta el Viernes, luego, se deben contabilizar en la atención de la demanda para esos dias. Similarmente las que comienzan el Martes, trabajaran hasta el Sábado, etcetera.
Esto se puede modelar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lllllllllll}
min & \sum_{i=1}^{7} x_i & & & & & & & & \\
s.a & x_1+ & & & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7 & \geq & D_1 \\
 & x_1+ & x_2+ & & & x_5+ & x_6+ & x_7 & \geq & D_2 \\
 & x_1+ & x_2+ & x_3+ & & & x_6+ & x_7 & \geq & D_3 \\
 & x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & & & x_7 & \geq & D_4 \\
 & x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5 & & & \geq & D_5 \\
 & & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6 & & \geq & D_6 \\
 & & & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7 & \geq & D_7 \\
 & x_i \geq 0 & & & & & & & &
\end{array}$$

Problema 5 (Decodificación de códigos lineales). *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, $A = (a_{ij})$ una matriz 0-1 (con 0's y 1's) e $\overline{y} = (y_1, ..., y_m)$ vector 0-1. Encuentre un vector 0-1 $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ con no mas de K 1's (K fijo), tal que para cada $j = 1, ..., m$, $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = y_i(mod2)$.*
Nota: *Considere que $a = b(mod2)$ se entiende como $a = nb + 2, n \in \mathbb{Z} \cap [-10^3, 10^3]$.*

Solución 5. *Inicialmente las variables serán los x_i del vector 0-1 $\overline{x}$.*
Lo que se quiere maximizar es el numero de x_i's que son iguales a 1, el resto será 0:

$$max \sum_{i=1}^{n} x_i$$

La primera restricción es que la suma sea a lo mas K:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq K$$

La segunda restriccion tiene que ver con la operación módulo, recordemos que $a = b(modk) \Leftrightarrow a = Nb + k, N \in \mathbb{Z}$, pero en la indicación se nos dice que consideremos aquellos N enteros en el rango $[-1000, 1000]$, luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} &= z_{iN} N y_i + 2, \forall i \\
\sum_{N=-1000}^{1000} z_{iN} &= 1, \forall i \\
x_i &\in \{0, 1\} \\
z_{iN} &\in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Las variables auxiliares z_{iN} se introducen para enfatizar el hecho de que para un (y solo un) cierto N se tendrá la igualdad $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = N y_i + 2$, para cada i.

El problema se plantea de la forma:

$$
\begin{aligned}
max \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \\
s.a \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \leq K \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = z_{iN} N y_i + 2, \, \forall i \\
& \sum_{N=-1000}^{1000} z_{iN} = 1, \, \forall i \\
& x_i \in \{0,1\}, \, \forall i \\
& z_{iN} \in \{0,1\}, \, N \in \mathbb{Z} \cap [-1000, 1000]
\end{aligned}
$$

Problema 6 (Problema de Producción). *Considere una fábrica con 3 tipos de maquinas A,B y C que pueden producir 4 productos (cada producto debe pasar por las 3 maquinas, y ellas funcionan en forma continua). Suponga además que el tiempo para ajustar las maquinas entre cambios de productos es despreciable. Debe tener en cuenta la cantidad de productos generados por cada maquina, las ganancias y los tiempos de uso siguientes::*

Tipo de máquina	P_1	P_2	P_3	P_4	*Tiempo total disponible (horas)*
A	*1,5*	*1*	*2,4*	*1*	*2000*
B	*1*	*5*	*1*	*3,5*	*8000*
C	*1,5*	*3*	*3,5*	*1*	*5000*
$	*5,24*	*7,3*	*8,34*	*4,18*	

Plantee el problema de producción semanal que maximiza ganacias.

Solución 6. *Las variables x_i representaran la cantidad a producir en una semana del producto i-ésimo. Luego, lo que se quiere maximizar es:*

$$5,24x_1 + 7,3x_2 + 8,34x_3 + 4,18x_4$$

Las restricciones se obtienen observando los tiempos que utiliza cada maquina:

$$
\begin{aligned}
1,5x_1 + x_2 + 2,4x_3 + x_4 &\leq 2000 \qquad (A) \\
x_1 + 5x_2 + x_3 + 3,5x_4 &\leq 8000 \qquad (B) \\
1,5x_1 + 3x_2 + 3,5x_3 + x_4 &\leq 5000 \qquad (C)
\end{aligned}
$$

Ademas:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Problema 7 (Problema de la dieta). *Escriba un modelo para determinar una dieta que contenga al menos 0,5 % de calcio pero menos de 1,2 %, al menos 22 % de proteinas y al menos 5 % de fibra cruda. Los ingredientes son caliza, maíz y soya. Los aportes (en kg por cada kg de ingredientes) son:*

Ingrediente	*Calcio*	*Proteinas*	*Fibra Cruda*
Caliza	*0,35*	*0*	*0*
Maíz	*0,001*	*0,09*	*0,02*
Soya	*0,002*	*0,5*	*0,08*

Además, existen dos escenarios de costos ($ / kg):

Escenario	Caliza	Maíz	Soya
A	0,016	0,046	0,125
B	0,018	0,045	0,126

Minimize el costo en el caso más desfavorable.

Solución 7. *Las variables serán:* x_1 *(cantidad caliza),* x_2 *(cantidad de maíz) y* x_3 *(cantidad de soya). Las funciónes de costos para cada escenario son:*

$$\begin{aligned} C_A &= 0,016x_1 + 0,046x_2 + 0,125x_3 \\ C_B &= 0,018x_1 + 0,045x_2 + 0,126x_3 \end{aligned}$$

El escenario mas desfavorable será $Z = \max\{C_A, C_B\}$*, por lo tanto, minimizar el costo del escenario mas desfavorable es equivalente a minimizar* Z*:*

$$\min \max\{C_A, C_B\}$$

Para el calcio, los aportes de cada variable son, en total $0,35x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3$ *y la cantidad total de calcio en la dieta debe ser mayor o igual al 0,5 % del total de la dieta y menor o igual al 1,2 %, es decir:*

$$\begin{aligned} 0,35x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 &\leq 0,012(x_1 + x_2 + x_3) \\ 0,35x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 &\geq 0,005(x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Similarmente, para las proteinas:

$$0,09x_2 + 0,5x_3 \geq 0,22(x_1 + x_2 + x_3)$$

y la fibra cruda:

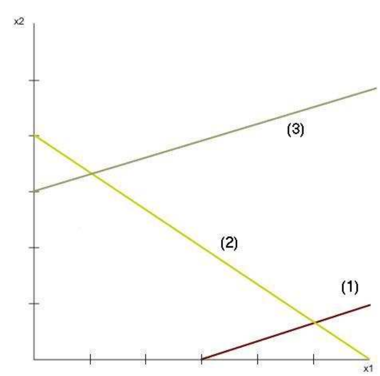
$$0,02x_2 + 0,08x_3 \geq 0,05(x_1 + x_2 + x_3)$$

además $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

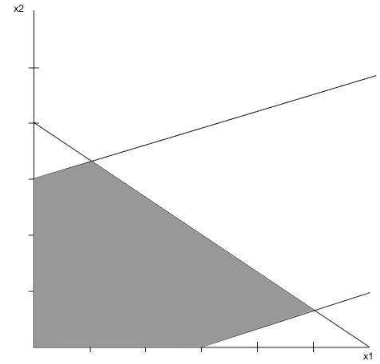
Problema 8 (Resolución gráfica 1). *Resolver el siguiente problema de forma gráfica:*

$$\begin{array}{lcccccl} max & 5x_1 & + & 4x_2 & & & \\ s.a & x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 & (1) \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 & (2) \\ & -2x_1 & + & 7x_2 & \leq & 21 & (3) \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Solución 8. *Primero se grafican las 3 primeras restricciones:*



La región factible es el poliedro resultante de la intersección de los semiespacios definidos por las 3 primeras restricciones y ademas los semiespacios $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ *y* $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$*:*



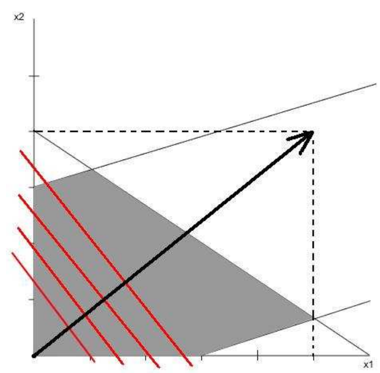
Se determina el gradiente de la función objetivo:

$$\nabla(5x_1 + 4x_2) \;=\; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

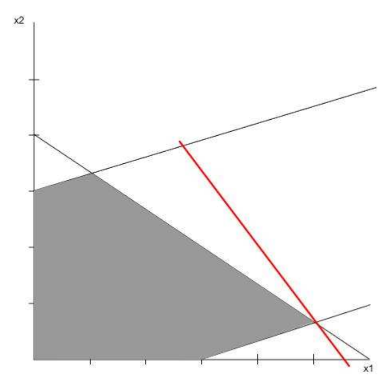
Las líneas rojas representan diferentes rectas de la forma:

$$5x_1 + 4x_2 \;=\; Cte.$$

Se puede ver que a medida que la constante crece, las rectas se "mueven"en la dirección del gradiente. El objetivo es encontrar los puntos de la región factible que maximizan la función objetivo, por lo tanto, mientras exista una constante que permita a la recta $5x_1 + 4x_2 = Cte.$ intersectar el poliedro en un punto (o varios), siguiendo la dirección del gradiente, ese punto es una posible solución del problema de maximización.



El punto extremo del poliedro que puede ser intersectado con la familia de rectas en la dirección del gradiente es $x_1 = 5, x_2 = \frac{2}{3}$ y el valor de la función objetivo es $z = \frac{83}{3}$.



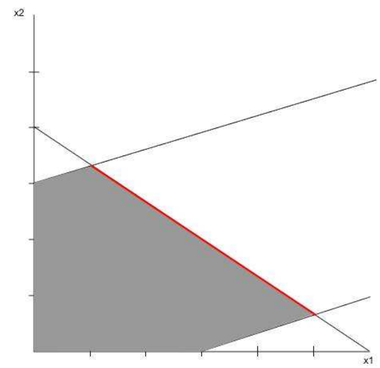
Problema 9 (Resolución gráfica 2). *Resolver el siguiente problema de forma gráfica:*

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
max & 4x_1 & + & 6x_2 & & & \\
s.a & x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 & (1) \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 & (2) \\
 & -2x_1 & + & 7x_2 & \leq & 21 & (3) \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Solución 9. *Similar al problema anterior, sin embargo, al analizar la familia de rectas y los puntos extremos que la intersectan se tiene la solución optima es una infinidad de puntos:*

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & \in & [\frac{105}{100}, 5] \\
4x_1 + 6x_2 & = & 24
\end{array}
$$

(el valor de la función objetivo es 24).



Problema 10 (Resolución gráfica 3). *Resolver el siguiente problema de forma gráfica:*

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
min & -2x_1 & - & x_2 & & & \\
s.a & x_1 & & \frac{8}{3}x_2 & \leq & 4 & (1) \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & (2) \\
 & 2x_1 & & & \leq & 3 & (3) \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Solución 10. *PROPUESTO*

Problema 11 (Resolución gráfica general). *Resolver graficamente el problema general:*

$$
\begin{array}{lrcrcr}
min & ax_1 & + & bx_2 & & \\
s.a & cx_1 & + & dx_2 & \leq & e \\
 & fx_1 & + & gx_2 & \leq & h \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Solución 11. *El gradiente de la función objetivo $z = ax_1 + bx_2$ es*

$$
\nabla z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
$$

y su recta asociada:

$$
L_{\nabla z} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}
$$

La recta definida por la función objetivo, $ax_1 + bx_2 = Cte$, escrita en forma vectorial es:

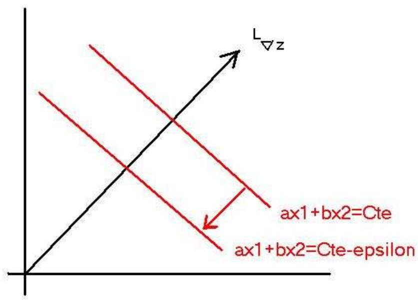
$$
L_z := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Cte}{b} \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-a}{b} \end{pmatrix}
$$

Claramente las rectas $L_{\nabla z}$ *y* L_z *son ortogonales. Veamos cual es la intersección entre ambas para una constante fija:*

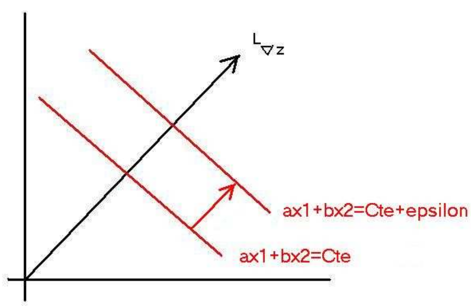
$$L_{\nabla z} \cap L_z \quad = \quad \{(x_1, x_2) : x_1 = \frac{Cte}{b}\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right), x_2 = \frac{Cte}{a}\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)\}$$

Y la norma de este punto es $\|(x_1,x_2)\|_2 = |Cte|\dfrac{(a^2+b^2)}{a^2b^2}\sqrt{a^2+b^2}$ *o* $|Cte|M$*, con* $M > 0$.
Estudiemos ahora como se comporta el punto intersección cuando a y b tienen diferentes combinaciones de signos, y como se modifica la constante de la recta (supondremos $Cte > 0$*) (en que dirección se mueve sobre la recta* $L_{\nabla z}$*):*

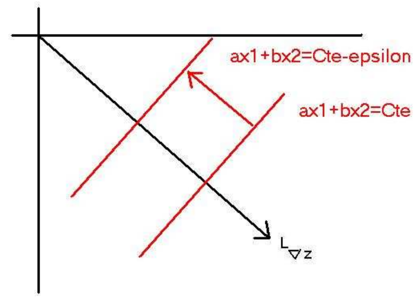
1. $a, b > 0$:
   Si se desea minimizar z*, consideremos* $Cte-\epsilon$*. La norma del nuevo punto intersección será* $(Cte-\epsilon)M$*. Como* $Cte > Cte - \epsilon$*, el punto intersección se desplazó "hacia el interior", o en "dirección opuesta al vector gradiente* ∇z*":*



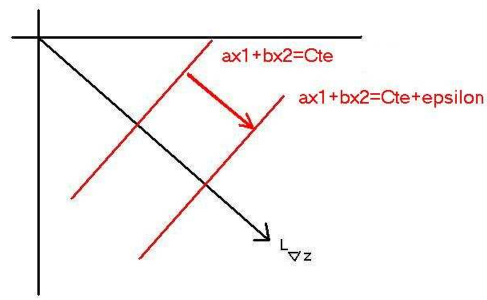
   Si se desea maximizar z*, al considerar* $Cte + \epsilon$*, se tiene que el punto intersección se desplaza en "dirección del vector gradiente* ∇z*":*



2. $a > 0, b < 0$:
   Para minimizar z*, tomemos* $Cte - \epsilon$*, con lo cual el punto desplazado tiene norma menor que la intetetrsección original:*



Al maximizar, tomando $Cte+\epsilon$, el punto intersección desplazado tiene norma mayor que la intersección original:



3. *$a, b < 0$:*
   Parecido al caso (1), pero al minimizar, el punto interseccion se desplaza en la "dirección del vector gradiente ∇z", y para maximizar, el punto se desplaza en "dirección opuesta al vector gradiente ∇z".

Una vez analizados estos casos, la solución del problema de minimización (o maximización) será el punto intersección sobre la recta $L_{\nabla z}$ que minimize (o maximize) la función objetivo y que pertenezca al poliedro $\{(x_1, x_2) : cx_1 + dx_2 \leq e \wedge fx_1 + gx_2 \leq h \wedge x_1, x_2 \geq 0\}$.

Problema 12 (Simplex). *Resolver los problemas de planteamiento (que no tengan restricciones enteras o binarias) utilizando el método simplex.*