

Ejercicios Control 1

30/08/05

Problema 1

El número X de conexiones mal soldadas por microcircuito integrado en una operación de manufactura electrónica sigue una distribución Binomial(20,p) con p desconocida. El costo de corregir los errores, por microcircuito, es:

$$C(X) = X + X^2$$

En base a una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n encuentre el EMV del costo total esperado de corregir los errores de estos microcircuitos observados.

Hint: Puede serle útil la siguiente propiedad: (Propiedad de la invarianza)

Si $\hat{\theta}$ es el Estimador de Máxima Verosimilitud del parámetro θ y si $g: \Omega \rightarrow \Omega$ es biyectiva, entonces $g(\hat{\theta})$ es el Estimador de Máxima Verosimilitud de $g(\theta)$.

Problema 2

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a. con media μ y varianza σ^2 . Se propone estimar μ mediante

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n c_i X_i$$

donde los c_i son números fijos. Determine los c_i tal que el estimador sea insesgado y de varianza mínima.

Problema 3

Sean X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \rightarrow P(\lambda)$. Se desea estimar $P(X_1 = 0) = \exp(-\lambda)$.

a) Encuentre el EMV de $P(X_1 = 0)$.

b) Encuentre ECM de los estimadores de $P(X_1 = 0)$:

i. $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{2}^{X_1+X_2}$ Hint: Obtener distribucion de $X_1 + X_2$ primero

ii. $\hat{\theta}_2 = \frac{Y_1+Y_2}{2}$ Donde $Y_i \rightarrow Ber(\exp(-\lambda))$

c) Demuestre que $\hat{\theta}_1$ tiene menor ECM que $\hat{\theta}_2$ para todo $\lambda > 0$

d) Muestre que $\hat{\theta}_1$ no alcanza la cota Crammer Rao al estimar a λ

Problema 4

Sea X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d . con $X_i \rightarrow Ber(p)$

1. Demuestre utilizando 2 formas distintas que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente. Puede serle útil la sgte información:

Teorema 1 Si existen funciones $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$, tales que $f_n(x; \theta) = g(T(x), \theta)h(x)$, entonces $T(x)$ es estadístico suficiente.

Teorema 2 Si $f_n(x, \theta) = \exp(T(x)c(\theta) + d(\theta) + s(x))$ entonces $T(x)$ es estadístico suficiente.

2. Se quiere estimar $Var(X_1)$. Muestre que $W = X_1(1 - X_2)$ es un estimador insesgado de $Var(X_1)$.
3. Encuentre un mejor estimador de W . Hint: Ocupe el teorema Rao - Blackwell que dice:

Si $T(y)$ es un estimador insesgado de $h(\theta)$ y $S(y)$ es un estadístico suficiente de θ , entonces $I(y) = E(T(y)/S(y))$ es un estimador insesgado de $h(\theta)$ y cumple con $Var(I(y)) \leq Var(T(y))$.

Problema 5

Sea X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d . con $X_i \rightarrow \beta(a, b)$. La forma de la distribución β es :

$$\frac{\Gamma(a+b)X^{a-1}(1-X)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

con $0 \leq X \leq 1$ y $\Gamma(p) = \int_0^\infty X^{p-1} \exp(-X)$

Obtenga los estimadores de a y b con método de los momentos

Respuestas

Problema 1:

$$E(\hat{C}) = 4n\hat{p} + n\hat{p}^2(n-1)$$

Problema 2:

Para que $\hat{\mu}$ insesgado: $\sum_{i=1}^n c_i = 1$

Para que además sea de varianza mínima: $c_i = \frac{1}{n}$

Problema 3

$$\text{a) } P(\hat{X} = 0) = \exp\left(\frac{-(X_1 + X_2)}{2}\right)$$

$$\text{b) i. } E(\hat{\theta}_1) = \exp(-\lambda) \text{ y } ECM(\hat{\theta}_1) = \exp\left(-\frac{3\lambda}{2}\right) - \exp(-2\lambda)$$

$$\text{ii. } E(\hat{\theta}_2) = \exp(-\lambda) \text{ y } ECM(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2} \exp(-\lambda)(1 - \exp(-\lambda))$$

$$\text{d) } Var(\hat{\theta}_1) = \exp\left(-\frac{3\lambda}{2}\right) - \exp(-2\lambda) \neq \frac{\exp(-2\lambda)}{\frac{2}{\lambda}} = \frac{\frac{\partial E(T)}{\partial \lambda}^2}{I(\lambda)}$$

Problema 4

$$1) \text{ Teorema 1: } g(T(x), \theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$h(x) = 1$$

$$\text{Teorema 2: } T(x) = \sum_{i=1}^n x_i, c(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta} d(\theta) n \ln(1 - \theta), s(x) = 0$$

3) Se parte por $I(X) = E(X_1(1 - X_2) / \sum_{i=1}^n X_i = u)$ Dando

$$I(X) = n \frac{\bar{x}(1 - \bar{x})}{n - 1}$$

Problema 5

$$\hat{a} = \frac{\bar{x}(M_2 - \bar{x})}{\bar{x}^2 - M_2}$$

$$\hat{b} = \frac{(1 - \bar{x})(M_2 - \bar{x})}{\bar{x}^2 - M_2}$$

$$M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Cualquier duda o consulta: lrus@ing.uchile.cl