

# Problema Extra Estimación Puntual

22/08/05

## Problema

Sean los valores muestrales  $X_1, X_2, \dots, X_n$  m.a.s de una v.a.  $X$  de función densidad:

$$f(x/\theta) = \frac{1}{\theta} \text{ es decir } X \longrightarrow U(0, \theta)$$

1. Dé el estimador de los momentos  $\hat{\theta}_1$  de  $\theta$ .
2. Dé el estimador de los máxima verosimilitud  $\hat{\theta}_2$  de  $\theta$ .
3. Calcule la esperanza y varianza de  $\hat{\theta}_2$ .
4. Concluya si  $\hat{\theta}_2$  es insesgado y consistente.

$$\text{Datos: } E(x) = \frac{\theta}{2}, \text{ Var}(x) = \frac{\theta^2}{12}$$

### Solución

1. Ocupando ecuación de los momentos

$$E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

$$\forall k \in N$$

$$\text{Con } k=1: E(x) = \bar{x} \implies (\text{de datos}) \frac{\theta}{2} = \bar{x}$$

$$\implies \hat{\theta}_1 = 2\bar{x}$$

2. El estimador de máxima verosimilitud se obtiene resolviendo el problema:

$$\max_{\theta} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \theta)$$

Como las variables son independientes, luego:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n / \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i / \theta) = \frac{1}{\theta^n}$$

Como podemos apreciar esta función es monótona decreciente, entonces no sacamos nada con derivar e igualar a 0. Esto radica en que el máximo de esta función está en el extremo inferior del dominio del parámetro  $\theta$ .  $Dom(\theta) = (0, \infty)$ . Como 0 no es un valor posible (si no queda  $X \rightarrow U(0, 0)$ ), nuestro objetivo será encontrar el  $\theta$  más pequeño posible. Como el concepto de estimar por máxima verosimilitud tiene como dada los resultados de la muestra, debemos elegir un dato de ésta que haga cumplir nuestro objetivo. Sabemos que:

$0 \leq X_i \leq \theta \forall i$ , luego nuestro  $\theta$  más chico que podemos darnos es:

$$\theta = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \Rightarrow \hat{\theta}_2 = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$3. E(\hat{\theta}_2) = E(\max(X_1, X_2, \dots, X_n)) = E(Y):$$

Debemos obtener la distribución de esta variable. Sea  $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ :

$F_y(t) = P(Y \leq t)$  esto quiere decir que  $t$  es mayor que todo  $X_i$ . Entonces:

$P(Y \leq t) = P(X_1 < t, X_2 < t, \dots, X_n < t) = \prod_{i=1}^n P(X_i < t)$  Esto último por independencia

$$\prod_{i=1}^n \int_0^t \frac{1}{\theta} = \prod_{i=1}^n \frac{t}{\theta} = \frac{t^n}{\theta^n} \text{ Con esto, } \frac{\partial F_y(t)}{\partial t} = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n} \Rightarrow$$

$$f_y(Y/\theta) = \frac{nY^{n-1}}{\theta^n}$$

$$\text{Luego } E(Y) = \int_0^\theta \frac{YnY^{n-1}}{\theta^n} = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta Y^n = \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1}$$

$$Var(\hat{\theta}_2) = Var(\max(X_1, X_2, \dots, X_n)) = Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$E(Y^2) = \int_0^\theta \frac{Y^2 n Y^{n-1}}{\theta^n} = \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{n\theta^2}{n+2} \Rightarrow$$

$$Var(Y) = \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

4. Como  $E(\hat{\theta}_2) \neq \theta \Rightarrow$  que  $\hat{\theta}_2$  es estimador no insesgado. Pero tenemos que:

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{n\theta}{n+1} \xrightarrow{\infty} \theta$$

Se dice entonces que el estimador es asintóticamente insesgado. Esta propiedad junto a que:

$Var(\hat{\theta}_2) = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} \xrightarrow{\infty} 0$  hace que  $\hat{\theta}_2$  sea un estimador consistente

Cualquier duda o consulta: [leus@ing.uchile.cl](mailto:leus@ing.uchile.cl)