

# Repaso probabilidades

09/08/05

## Problema 1

a) Sea  $Y$  v.a. Mostrar que:

$$E((Y - \mu)^2) = \text{Var}(Y) + (E(Y - \mu))^2$$

b) Sea  $Y_n = \frac{n\bar{x}}{\sigma^2}$  donde  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son i.i.d de media  $\mu$  y de varianza  $\sigma^2$

Calcular  $E(Y_n), \text{Var}(Y_n), E((Y_n - \mu)^2)$

c) Demostrar que  $\forall Y_n$  :

$$\text{Var}(Y_n) \xrightarrow{\infty} 0 \wedge E(Y - \mu)^2 \xrightarrow{\infty} 0 \implies P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) \xrightarrow{\infty} 0$$

*Solución*

$E((Y - \mu)^2) = E(Y^2 - 2Y\mu + \mu^2)$  En general, para  $X_1, X_2, \dots, X_n$  cualquiera (no tienen que ser independientes):

$$E\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X_i) \quad (1)$$

Si las variables fueran independientes además se tendría que:

$$E\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \prod_{i=1}^n \alpha_i E(X_i) \quad (2)$$

$$\Rightarrow E(Y^2 - 2Y\mu + \mu^2) = E(Y^2) - 2E(Y)\mu + \mu^2$$

Se tiene otra propiedad importante, la cual es :  $\text{Var}(X) = E(Y^2) - E(Y)^2$

$$\implies E(Y^2) - 2E(Y)\mu + \mu^2 = \text{Var}(Y) + E(Y)^2 - 2E(Y)\mu + \mu^2$$

$$= \text{Var}(Y) + (E(Y) - \mu)^2 = \text{Var}(Y) + (E(Y - \mu))^2$$

$$b) E(Y_n) = E(n \frac{1}{n} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i) = n \frac{1}{n} \frac{1}{\sigma^2} E(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

Donde las últimas 2 igualdades se deben a la (1). También nos dicen que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son i.i.d, luego al menos sabemos que tiene la misma esperanza que es  $\mu$ .

$$\implies E(Y_n) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \mu = \frac{n\mu}{\sigma^2}$$

$$Var(Y_n) = Var(n \frac{1}{n} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i) = Var(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i)$$

Recordar que:

$$Var(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j Cov(X_i, X_j) Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j) \quad (3)$$

- De (2) se deduce que:  $Cov(X_1, X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = Var(X_i)$
- De (2) y (4) se deduce que:  $X, Y \text{ independientes} \implies Cov(X, Y) = 0$

Luego para  $X_1, X_2, \dots, X_n$  independientes (que es en nuestro caso pues son i.i.d)

$$Var(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 Var(X_i) \quad (4)$$

$$\text{Luego, ocupando (4): } Var(Y_n) = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{n}{\sigma^2}$$

Para Calcular  $E((Y_n - \mu)^2)$  ocupo a) quedando:

$$E((Y_n - \mu)^2) = Var(Y_n) + (E(Y_n - \mu))^2 = \frac{n}{\sigma^2} + (\frac{n\mu}{\sigma^2} - \mu)^2$$

c) Ocupando hipotesis y a) deduzco que  $E((Y - \mu)^2) \xrightarrow{\infty} 0$ , pues la suma de dos límites que se van a 0 es 0. Además, por propiedad de Chebichev, que postula:

$$P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{E((Y - \mu)^2)}{\epsilon^2} \forall \epsilon > 0 \quad (5)$$

Se deduce que:  $P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) \xrightarrow{\infty} 0$

## Problema 2

Demostrar que  $\forall X, Y$  v.a:

$$(Cov(X, Y))^2 \leq Var(X) Var(Y)$$

### *Solución*

Calculemos, utilizando (4)  $Var(X + cY)$ :

$$Var(X + cY) = Var(X) + 2cCov(X, Y) + c^2Var(Y)$$

- Esto es una ecuación de segundo grado con respecto a  $c$ .
- Otra propiedad de la varianza es que:  $Var(X) \geq 0 \forall X v.a.$

$$\text{Entonces } Var(X + cY) = Var(X) + 2cCov(X, Y) + c^2Var(Y) \geq 0$$

Esto quiere decir que esta ecuación posee raíces en los complejos o a lo más una sola raíz real. Por lo tanto:

$$Discriminante = (2Cov(X, Y))^2 - 4Var(Y)Var(X) \leq 0 \Rightarrow (Cov(X, Y))^2 \leq Var(X)Var(Y)$$

## **Problema 3**

El objetivo de esta pregunta es demostrar que:

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \longrightarrow \chi_{n-1}^2$$

Donde  $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$  y  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son i.i.d  $N(\mu, \sigma)$

Lo anterior lo haremos en varios pasos, repasando distintas cosas de probabilidades

a) Demostrar que :  $Y = X^2 \hookrightarrow \chi_1^2$  donde  $X \hookrightarrow N(0, 1)$

### *Solución*

$$F_y(t) = P(Y < t) = P(X^2 < t) = P(-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}) = P(X < \sqrt{t}) - P(X < -\sqrt{t}) = F_x(\sqrt{t}) - F_x(-\sqrt{t})$$

$$\text{Luego: } f_y(t) = \frac{\partial F_y(t)}{\partial t} = \frac{\partial F_x(\sqrt{t})}{\partial t} - \frac{\partial F_x(-\sqrt{t})}{\partial t}$$

$$\text{Pero: } F_x(\sqrt{t}) = P(X < \sqrt{t}) = \int_{-\infty}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \Phi(t)$$

Por teorema fundamental del calculo,  $\Rightarrow f_y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\Phi(\sqrt{t}) - \frac{-1}{2\sqrt{t}}\Phi(\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{t}}\Phi(\sqrt{t}) = \frac{t^{0.5-1}\exp(-t/2)}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)}$  que es una distribucion de una  $\chi_1^2$  Como colorario tenemos que:

$$\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \longrightarrow \chi_1^2 \text{ con } X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

b) Demostrar que:

$$W = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \longrightarrow \chi_n^2$$

con  $X_i \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$  i.i.d

*Solución*

Con generador de momentos:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow M_w(t) = E(\exp(t \sum_{i=1}^n Z_i^2)) = E(\prod_{i=1}^n \exp(t Z_i^2))$$

Como hay independencia:

$$E(\prod_{i=1}^n \exp(t Z_i^2)) = \prod_{i=1}^n E(\exp(t Z_i^2))$$

$$E(\exp(t Z_i^2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-Z_i^2}{2}\right) \exp(-t Z_i^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-Z_i^2(1+2t)}{2}\right)$$

Haciendo cambio variable:  $u = Z_i \sqrt{1+2t} \Rightarrow$

$$E(\exp(t Z_i^2)) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} \Rightarrow$$

$$M_w(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+2t}}\right)^n \text{ lo que corresponde a una f.g.m de una } \chi_n^2$$

c) Demostrar que:

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - [(\bar{X} - \mu)^2] \quad (6)$$

*Solución*

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu - (\bar{X} - \mu))^2 =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 - 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)(\bar{X} - \mu)$$

Como se puede ver, el término  $(\bar{X} - \mu)$  no depende de la sumatoria. Entonces:

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \frac{1}{n} (\bar{X} - \mu)^2 [\sum_{i=1}^n 1] - 2 \frac{1}{n} (\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \frac{1}{n} (\bar{X} - \mu)^2 n - 2 \frac{1}{n} (\bar{X} - \mu) (n\bar{X} - n\mu) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + (\bar{X} - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - [(\bar{X} - \mu)^2] \end{aligned}$$

d) Demostrar que

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \longrightarrow \chi_{n-1}^2$$

*Solución*

$$\text{De c) } \frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 - \left[ \left( \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)^2 \right] =$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 - W_1^2 \text{ en donde } Z_i \text{ y } W_1 \longrightarrow N(0, 1)$$

Ahora necesitamos una herramienta adicional, que es saber lo que es una matriz ortogonal

Def: Una matriz A es ortogonal si  $A^{-1} = A^t$

Una propiedad visible de estas matrices es que si tengo un sistema de la forma  $y = Az$  es que:

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \quad (7)$$

$$\text{Dem: } \sum_{i=1}^n Y_i^2 = Y^t Y = (AZ)^t (AZ) = Z^t A^t A Z = Z^t A^{-1} A Z = Z^t Z = \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

Con esto tenemos que, al ser  $Z_i$  y  $W_1$  independientes:

$$f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left( -\sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{2} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left( -\sum_{i=1}^n \frac{Y_i^2}{2} \right) = \prod_{i=1}^n f(Y_i) = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

$\Rightarrow Y_i$  son independientes y de distribución  $N(0,1)$ . Luego si yo coloco los  $Z_i$  como componente del vector  $Z$  y aplico una matriz  $A$ , obtengo un vector con cada componente  $Y_i$  como la descrita anteriormente

En particular ocupo una matriz A de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Es decir, se puede construir una matriz ortogonal con  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  en la primera fila. Así:

$$Y_1 = \sum_{k=1}^n A_{1k} Z_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{(X_k - \mu)}{\sigma} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sigma} (n\bar{X} - n\mu) = W_1 \text{ Luego:}$$

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n Z_i^2 - W_1^2 = \text{por propiedad (7)}$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 - W_1^2 = \sum_{i=2}^n Y_i^2$$

Por b) se concluye entonces que:  $\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \longrightarrow \chi_{n-1}^2$

Cualquier duda o consulta: lreus@ing.uchile.cl