

## Auxiliar 4 Estadística Semestre Primavera 2005

Prof: Nancy Lacourly

Aux: Sebastián Court

**Problema1.-** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. tal que  $X_i \rightsquigarrow f(x_i) \forall i$ .  
Sea

$$I_n(\theta) = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{d \ln f(x_1, \dots, x_n | \theta)}{d\theta} \right)^2 \right]$$

la información de Fischer para la muestra y

$$I(\theta) = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{d \ln f(x_i | \theta)}{d\theta} \right)^2 \right]$$

la información de Fischer de  $X_i$ . Demuestre que  $I_n(\theta) = nI(\theta)$ .

**Problema2.-** Si el tiempo de espera de una micro en minutos  $X$  para una persona es tal que:

$$f(x|\lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \text{ si } x > 0$$

Sea, además  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. de  $X$ :

- (a) Encuentre un estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\lambda}$  de  $\lambda$ . Calcule su esperanza y varianza.
- (b) Encuentre la cota de Cramer-Rao para  $\hat{\lambda}$ . ¿Es eficiente?

**Recuerdo.-** Supongamos  $X_1, \dots, X_n$  es una m.a.s de una variable aleatoria  $X$  con ley  $f(x|\theta)$  y supongamos que  $\theta$  tiene una ley a priori  $\pi(\theta)$ .  
La distribución a posteriori para  $\theta$  es:

$$\xi(\theta|x) = \frac{f_n(x|\theta)\pi(\theta)}{g_n(x)}$$

en que

$$g_n(x) = \int_{\Theta} f_n(x|\theta)\pi(\theta)d\theta$$

Supongamos que  $\delta = \delta(x_1, \dots, x_n)$  es un estimador para  $\theta$ .

Como  $\delta$  depende de la muestra y  $\theta$  es desconocido pueden existir diferencias en  $\delta$  y  $\theta$ , las que se pueden cuantificar a través de una función de pérdida  $L(\delta, \theta)$ .

Un **estimador de bayes** es el  $\delta$  que minimiza la pérdida esperada, esto es,

$$\delta = \arg \min_{\delta} \mathbb{E}(L(\delta, \theta))$$

Para una función de pérdida cuadrática ( $L(\delta, \theta) = (\delta - \theta)^2$ ), el estimador es  $\delta_B = \mathbb{E}(\theta|x)$

**Problema3.-** A partir de una m.a.s  $X_1, \dots, X_n$  de una variable  $X$  de Poisson se desea estimar el parámetro  $\theta > 0$  que determina la densidad de  $X$ :

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^x \exp(-\theta)}{x!}$$

Por otra parte, suponga que se cree a priori que el parámetro de la variable  $X$  del problema anterior se distribuye:  $\pi(\theta) = \frac{1}{2}\exp(-\theta/2)$  si  $\theta > 0$ .

- (a) Determine la densidad a posteriori de  $\theta$ .
- (b) Determine el estimador de Bayes  $\theta_B$  bajo función de pérdida cuadrática.
- (c) ¿Es  $\theta_B$  un estimador insesgado para  $\theta$  ? ¿Es consistente?

**Problema4.-** Una persona debe decidir la compra de un auto usado, el que puede encontrarse en uno de dos estados: bueno (funcionará bien durante unos miles de kilómetros) o malo (fallará al cabo de pocos kilómetros). Se sabe que los autos de esta marca, año y kilometraje son buenos el 90 % de las veces, sin embargo, este comprador decide llevarlo a un chequeo al Automovil Club, donde le dirán si el auto esta bueno o malo. El chequeo no es perfecto, y puede ocurrir que un auto malo sea declarado bueno (5 % de las veces) o que un un auto bueno sea declarado malo (10 % de las veces).

Suponga que el auto vale  $A$ , el chequeo vale  $C$ , si compra un auto malo deberá gastar  $R$  en repararlo y que el beneficio de tener y usar el auto se valora  $B$ .

- (a) Describa los elementos básicos para modelar la situación descrita usando teoría de decisiones.
- (b) Determine la función de probabilidad  $p(x|\theta)$  de la variable aleatoria  $X$  asociada al resultado del chequeo del auto. Indique la probabilidad a priori sobre el espacio  $\Theta$ .
- (c) Calcule la regla de decisión de Bayes  $\delta(x)$  que indique a la persona si debe comprar o no el auto, en función del chequeo  $x$ .