

Auxiliar 3 Estadística

Semestre Primavera 2005

Prof: Nancy Lacourly
Aux: Sebastián Court

Problema1.- Sea una muestra aleatoria simple X_1, \dots, X_n de una distribución exponencial de parámetro θ con densidad $f(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \forall x \geq 0$

- (i) Encuentre el estimador de Máxima Verosimilitud $\hat{\theta}$ de θ .
- (ii) Deduzca el estimador de Máxima Verosimilitud $\hat{\beta}$ de $\exp(-\lambda\theta)$ en donde $\lambda > 0$ es fijo.
- (iii) Calcule la esperanza y la varianza de $\hat{\beta}$.

Problema2.- Sea una muestra aleatoria simple X_1, \dots, X_n de una distribución con densidad

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\theta, \theta + 1] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- (i) Encuentre el estimador $\hat{\theta}_1$ de θ obtenido por el método de los momentos. Calcule su esperanza y varianza.
- (ii) Muestre que el estimador de Máxima Verosimilitud no es único.
- (iii) Sea el estimador $\hat{\theta}_2 = \max(X_1, \dots, X_n) - 1$. Calcule su esperanza y varianza.
- (iv) Estudie la consistencia de $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$.
- (v) Calcule y compare $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2]$ y $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_2 - \theta)^2]$. Concluya.

Problema3.- Sea una variable aleatoria X de función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{a^r \Gamma(r)} e^{-\frac{x}{a}} x^{r-1} \quad \text{si } x > 0$$

en donde $a > 0$ es desconocido, $r > 0$ es dado, y

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad \Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$$

La función generatriz de momentos de X es igual a: $E(e^{tX}) = \psi(t) = \left(\frac{1}{1-ta}\right)^r$, para $ta < 1$.

- (i) Se extrae al azar una muestra de tamaño m . Dé el estimador de máxima verosimilitud \hat{a}_m de a .
- (ii) Se extrae al azar una segunda muestra de tamaño n , lo que permite tener una muestra total de tamaño $m+n$. Utilizando los resultados precedentes, dar el nuevo estimador de máxima verosimilitud \hat{a}_{m+n} de a . Dé la esperanza de \hat{a}_{m+n} . (Pueden usar la función $\psi(t)$).
- (iii) Se considera otro estimador \hat{a}_o obtenido como promedio del estimador \hat{a}_m y del estimador de máxima verosimilitud \hat{a}_n de a para la segunda muestra: $\hat{a}_o = \frac{\hat{a}_m + \hat{a}_n}{2}$. Calcule la esperanza y la varianza de \hat{a}_o . (Pueden usar la función $\psi(t)$).
- (iv) De las esperanzas y varianzas de los dos estimadores \hat{a}_{m+n} y \hat{a}_o concluye sobre la consistencia de estos estimadores. Compare las varianzas de los dos estimadores \hat{a}_{m+n} y \hat{a}_o . Concluya.