

Control 3

14 de Noviembre de 2005

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIARES: JOSÉ LUIS MALVERDE S. GABRIELA TREBITSCH T.

P1.- a) Sea X v.a. con f.g.m. $M_x(t)$. Determine a qué corresponde:

$$\frac{\partial^2 \ln M_x(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$$

b) Suponga que X es una v.a. con la siguiente f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda(x-a)} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

Encontrar la f.g.m. de x y, usando ésta, encontrar $E(x)$.

Nota: Esta f.d.p. se denomina exponencial desplazada.

c) Suponga que la duración de una ampolleta es una v.a. con la f.d.p. definida en la parte b). Cuando una ampolleta falla es reemplazada por una nueva con la misma f.d.p. Encuentre el número necesario de ampolletas para asegurar el funcionamiento del sistema por más de 400 horas con probabilidad 0,95 (considere $\lambda = \frac{1}{2}$ y $a = 6$).

P2.- a) A un banco llegan clientes, los cuales se ponen en la fila de la única caja. Además se sabe que la probabilidad que el tiempo transcurrido entre la llegada de dos clientes sea mayor a 8 minutos es e^{-16} . La atención demora una media de 0,2 minutos.

i) Modele el sistema y muestre que la solución de las ecuaciones de balance es:

$$P_i = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \quad \forall i$$

ii) Qué condición debe cumplirse para la existencia de probabilidades en régimen permanente? Se cumplen en este caso? Determine P_0 .

iii) Otorgue las expresiones que permiten calcular el tiempo promedio de una persona en el sistema y el largo promedio de la cola.

b) Suponga ahora que el banco funciona como autoservicio (vía internet) con tasa de llegada λ y tasa de autoatención μ . Modele el sistema.

P3.- En un criadero de chanchos nacen chanchitos según una exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$ [meses]. En cada nacimiento, pueden dar a luz desde 1 hasta 5 chanchitos con probabilidad p_i de que nazcan exactamente i chanchitos.

El criadero tiene una sección de lactancia con capacidad para amamantar a un máximo de tres chanchitos simultáneamente, los cuales amamantarán un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ [meses], luego de lo cual alcanzan la independencia dejando de amamantar.

Los chanchitos que no sean amamantados desde el momento de nacer mueren instantáneamente.

a) Dibuje el diagrama de estados del sistema: chanchitos (vivos) en la etapa de lactancia.

b) Plantee las ecuaciones de balance.

c) En base a las probabilidades estacionarias, determine el número promedio de potenciales salchichas, que pueden obtenerse con los chanchitos en lactancia, en régimen estacionario. Para esto considere la siguiente función:

$$f(n) = 50n \text{ salchichas (con } n = n^\circ \text{ de chanchitos)}$$

d) Encuentre una expresión para la tasa efectiva de nacimiento de chanchitos (i.e. descartando los que mueren tras nacer).