

**Control 1**  
**05 de Septiembre de 2005**

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIARES: JOSÉ LUIS MALVERDE S. GABRIELA TREBISCH T.

**P1.-** a) Usted desea saber cuántas hormigas hay en el patio de su casa. Para ello captura  $m$  hormigas, le marca las patas y luego las devuelve al patio. Días después captura  $r$  hormigas y cuenta cuántas de ellas tienen las patas marcadas.

i) (2 pts) Suponga que conoce la cantidad total de hormigas  $N$ . Calcule la probabilidad de que EXACTAMENTE  $t$  de las  $r$  extraídas la segunda vez, tengan las patas marcadas y designela por  $L_N$  (identifique a qué corresponde cada uno de los términos que aparecen en su expresión)

ii) (1.5 pts) Suponga que al sacar  $r$  hormigas, encuentra  $t$  marcadas. Calcule el valor de  $N$  para el cual se maximiza  $L_N$  (recuerde que  $L_N$  es creciente si  $\frac{L_N}{L_{N-1}} > 1$ )

b) (2.5 pts) Aburrido de contar hormigas, usted escoge una en particular y la estudia. Después de largas horas de estudio se da cuenta que la hormiga que capturó posee 7 juegos de calcetines de colores distintos (recuerde que una hormiga tiene 6 patas y por ende cada juego posee 6 calcetines)

Además ha notado que entre las hormigas es considerado formal utilizar al menos 4 calcetines del mismo color. Indique de cuántas formas se puede poner los calcetines su hormiga de manera de mantenerse siempre formal.

HINT: Separe el conteo de cada caso en: elegir los calcetines y poner los calcetines en las patas.

**P2.-** Usted dispone de tres monedas, una perfecta, una con dos sellos y una tal que sello es dos veces más probable que cara.

a) (2 pts) Se escoge una moneda al azar y se lanza, calcule la probabilidad de obtener un sello o haber lanzado la moneda perfecta.

b) (2 pts) Se escoge una moneda al azar y se lanza, si sale sello se vuelve a lanzar la misma moneda, pero si sale cara se escoge otra moneda (de entre las que quedan) y se lanza (siempre se realizan dos lanzamientos). Si en los dos lanzamientos se obtuvo un sello calcule la probabilidad que se haya lanzado la moneda con dos sellos en el primer lanzamiento.

b) El experimento de (b) se puede generalizar con  $n$  monedas, todas distintas. Se escoge una moneda y se lanza, si sale sello se vuelve a lanzar, en caso contrario se escoge otra moneda de entre las que quedan y se lanza y así sucesivamente (se realizan  $n$  lanzamientos).

Sean los eventos  $A_i = \{\text{sello en el } i\text{-ésimo lanzamiento}\}$  Responda informalmente: Es el conjunto  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  de eventos independientes? Si se quisiera verificar formalmente, Cuántas igualdades debería verificar?

**P3.-** El efecto de una droga tiene una duración  $X$  (v.a. en minutos) con la siguiente función densidad:

$$f(x) = \alpha e^{\beta x} \quad x \geq 0$$

a) Determine  $\alpha$  y  $\beta$  para que  $f(x)$  esté bien definida.

b) En adelante suponga  $\alpha = 0,2$ . Muestre que:

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \quad \forall s, t > 0$$

Cómo lo interpreta? Evalúe si  $t = 5$ .

c) Se inyecta la droga a los pacientes, uno tras otro, hasta obtener dos cuya duración del efecto sea mayor a 5 minutos. Plantee el espacio muestral del experimento. Si  $Y : n$  de pacientes inyectados, determine su distribución de probabilidades.