Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesor Auxiliar : José Luis Malverde

Complemento
11 de Noviembre 2005

- Consideremos X_i v.a. independientes exponencialmente distribuídas de parámetro λ. Se desea saber la distribución de $X = min\{X_i : i = 1..n\}$. En efecto:

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(min\{X_i : i = 1..n\} \leq t) = 1 - \mathbb{P}(min\{X_i : i = 1..n\} \geq t)$$

Pero decir que el mínimo es mayor que un cierto t es equivalente a decir que todas las variables X_i son mayores que t, lo cual queda dado por:

$$\mathbb{P}(X_1 \geq t \wedge ... \wedge X_n \geq t) = \prod_{i=1}^{n}(\mathbb{P}(X_i \geq t)) = \mathbb{P}(X_i \geq t)^n$$

Esto último debido a la independencia e igual distribución de las v.a. X_i. Retomando la expresión original, se tiene que:

$$\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - \mathbb{P}(X_i \geq t)^n = (\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds)^n$$

Luego la f.d.p. está dada por:

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(X \leq t) = -n(\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds)^{n-1} \lambda e^{-\lambda t} = n\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} = n\lambda(e^{-\lambda t})^n = n\lambda e^{-n\lambda t}$$

Esta última expresión corresponde a una v.a. exponencial de parámetro $(n\lambda)$.