Universidad de Chile	Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Control 2
17 de Octubre de 2005

PROFESOR: FERNANDO LEMA
AUXILIARES: JOSÉ LUIS MALVERDE S. GABRIELA TREBITSCH T.

P1.- a) Considere una variable aleatoria $X \to N(0,1)$ determine la función de densidad de la variable aleatoria $Y = X^2$.

Qué distribución tiene Y entre las conocidas?
Nota: Se dice que Y tiene distribución Chi-cuadrado con un grado de libertad y se denota $Y \to \chi_1^2$

b) Una fábrica produce tornillos de distintos tipos, uno de los cuales tiene una longitud que es una v.a. $N(\mu, \sigma^2)$

i) Si el 16 % de los tornillos mide más de 4.2 cms. y el 31 % mide menos de 3.9 cms. determine μ y σ^2

ii) En adelante suponga $\mu = 4{,}1$, $\sigma = 0{,}1$. Se sacan tornillos (de un gran lote) uno a uno, hasta obtener uno que mida más de 4.3 cms. Calcule la probabilidad de tener que realizar al menos 18 extracciones.

c) Determine la cantidad de tornillos necesarios, para que el promedio de sus longitudes no exceda la media en más de 0.01 cms. con probabilidad 0.95.

P2.- a) Sean $X, Y \to N(0,1)$ independientes. Usando T.C.V. determine la fdp. de $Z = \frac{X}{Y}$.
NOTA: se dice que Z sigue una distribución de Cauchy.

b) Una máquina tiene una probabilidad constante $p = 0,1$ de fallar un día cualquiera (independiente de otro) Si la máquina no tiene fallas durante una semana (cinco días) se obtiene una utilidad de 5 U.M. Si tiene una o dos fallas se obtiene una utilidad de 2 U.M. En caso contrario se obtiene una pérdida de 20 U.M. La máquina falla a lo más una vez al día y cuando lo hace es reparada para el día siguiente. Calcule la esperanza y varianza de la v.a. "Utilidad esperada".

c) Considere X discreta con $R_X = \{0, 1, 2...\}$ Demuestre que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{E}(X)$$

P3.- En cierto sector de Santiago los vehículos circulan con velocidades V (km/h) que pueden ser adecuadamente modeladas por una distribución $U(20, 40)$ (km/h). Por otro lado y debido a los distintos tipos de vehículos, formas de conducir, imprevistos, etc. el rendimiento R (km/lt) para una velocidad V fija queda dado por la función densidad:

$$f_{R/V}(r|v) = \frac{50}{v^2} r \quad 0 < r < \frac{v}{5}$$

a) Calcule el rendimiento promedio para todos los vehículos que circulan por el sector.

b) Calcule la probabilidad que el rendimiento supere los $4km/lt$ para vehículos que circulan a menos de $30km/h$. Son R y V independientes?