Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesor Auxiliar : José Luis Malverde

Clase Auxiliar
19 de Septiembre 2005

En el control se definió la distribución exponencial de parámetro lambda por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

Con $\lambda > 0$.
Además se probó la propiedad de pérdida de memoria de dicha distribución, i.e.:

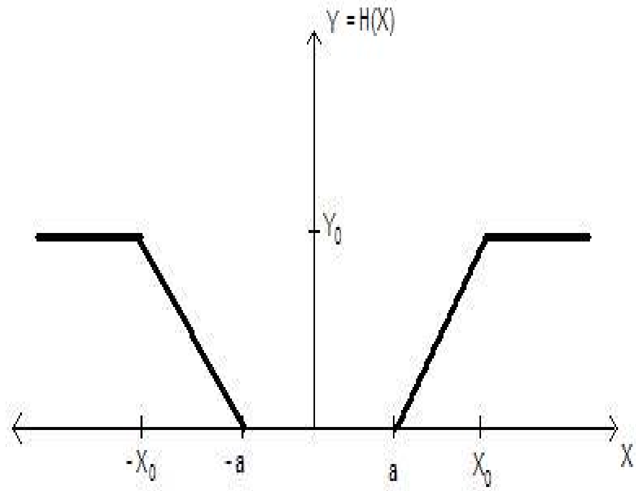
$$\mathbb{P}(x \geq s + t | x \geq s) = \mathbb{P}(x \geq t)$$

1. Pruebe que si una distribución continua posee pérdida de memoria, entonces es exponencial.Entienda por pérdida de memoria la propiedad antes descrita.

2. Al medir la duracin T de un equipo se comete un error X que puede ser considerado como una v.a. $X \to U(-0{,}01; 0{,}01)$ y por lo tanto la duración registrada puede ser determinada por $T + X$. Suponga que T se distribuye según una exponencial de parámetro 0,2 y que T y X son independientes. Si se registra una duración mayor a 10 horas, calcule la probabilidad de que la duración real haya sido mayor a 10 horas.

3. Se dispara un misil hacia una pared vertical que está a una unidad de distancia. El ángulo de disparo es una v.a. $\alpha \to U(0, \frac{\pi}{2})$
Sea h la v.a. que indica la altura en la pared alcanzada por el misil. Encuentre la densidad de h.

4. Un voltaje aleatorio $x \to U(-k, k)$ es recibido por un equipo eléctrico no lineal con las características de la figura.



Encuentre la f.d.p del voltaje recibido si:

a) Si $k < a$

b) Si $a < k < X_0$

Solución

1. Definamos la función $g(s) = P(T > s)$ tenemos que g satisface $g(s+t) = g(s)g(t)\ \forall t,s > 0$. Como asumimos que nuestra v.a toma sólo valores positivos tenemos que existe n tal que $g(\frac{1}{n}) > 0$. Así, de la misma forma, para este n, tenemos que $g(1) = g(\frac{1}{n})^n > 0$. Así existe $\lambda > 0$ tal que $g(1) = e^{-\lambda}$. Mediante el mismo argumento se tiene que para enteros $p,q \geq 1$
$$g(\frac{p}{q}) = g(\frac{1}{q})^p = g(1)^{\frac{p}{q}}$$
así $g(r) = e^{-\lambda r}$ para todos los racionales $r > 0$. Ahora para un real cualquiera $t > 0$, escogemos racionales cercanos, $r \leq t \leq s$. Notemos que claramente, por definición, nuestra función g es decreciente y por lo tanto
$$g(r) = e^{-\lambda r} = g(r) \geq g(t) \geq g(s) = e^{-\lambda s}$$

Como podemos escoger r ,s suficientemente cercanos a t, esto fuerza, debido a la continuidad de la función exponencial, que $g(t) = e^{-\lambda t}$, de donde concluimos.

2. Como el ángulo se distribuye uniforme se tiene que $f(\alpha) = \frac{2}{\pi}\quad \alpha\epsilon(0, \frac{\pi}{2})$ La altura está dada por $h(\alpha) = tg(\alpha)$ que es estrictamente monótona. De cátedra se sabe que $f_y(y) = f_x(h^{-1}(y))|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}|$ luego:
$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{d}{dh}(acrtg(h))$$
$$\frac{2}{\pi(1+h^2)}$$
con $tg(0) < h < tg(\frac{\pi}{2})$, i.e. $\forall h\epsilon(0,\infty)$
La distribución anterior es conocida como distribución de Cauchy.
3. Se desea obtener:
$$\mathbb{P}(T \geq 10|X+T) = \frac{\mathbb{P}(X+T \geq 10|T \geq 10)}{\mathbb{P}(T \geq 10)}$$
Por otro lado se tiene $f(T,X) = g(X)h(T) = \frac{1}{0{,}02} = 10e^{-0{,}2T}0{,}2e^{-0{,}2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 10 - T|T \geq 10) &= \int_0^{0{,}01}\int_{10}^{\infty} 10e^{-0{,}2T}dTdX + \int_{-0{,}01}^{0}\int_{10-X}^{\infty} 10e^{-0{,}2T}dTdX \\ &= \int_0^{0{,}01} 50e^{-2}dX + \int_{-0{,}01}^{0} 50(e^{X-2})dX \\ &= 0{,}01\cdot 50e^{-2} + 50\cdot e^{-2}\cdot e^X|_{-0{,}01}^{0}\end{aligned}$$

Por otra parte:
$$\mathbb{P}(T \geq 10) = \int_{10}^{\infty} 0{,}2e^{-0{,}2T}dT = -e^{-0{,}2T}|_1 0^{\infty} = e^{-2}$$
Reemplazando:
$$\mathbb{P}(T \geq 10|X+T) = 0{,}9975$$

4. Nótese que la variable $Y = H(X)$ es mixta, es discreta en 0 e Y_0 y continua entre $[-x_0, -a]$ y $[a, x_0]$. Como $X \rightarrow U(-k, k)$ se tiene que:

$$f_x(X) = \frac{1}{2k}$$

Además

$$Y(X) = Y_0 \ \ si \ \ |X| \geq X_0$$

$$Y(X) = \frac{-Y_0}{X_0 - a}X - \frac{Y_0 a}{X_0 - a} \ \ si \ \ -X_0 \leq X \leq -a$$

$$0 \ \ si \ \ |x| \leq a$$

$$Y(X) = \frac{Y_0}{X_0 - a}X - \frac{Y_0 a}{X_0 - a} \ \ si \ \ a \leq X \leq X_0$$

a) Si $k < a, Y$ necesariamente vale cero y se tiene:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(-a \leq X \leq a) = \mathbb{P}(-k \leq X \leq k) = \int_{-k}^{k} \frac{1}{2k} dx = 1$$

Luego

$$\mathbb{P}(Y) = 0 \ \ siy \neq 0$$

b) Si $a < k < X_0$, como X solo puede tomar valores en $[-k, k]$ se tendrá que $Y = 0$ o $Y \epsilon [0, Y(k) = y(-k)]$, equivalentemente $Y = 0$ o $Y \epsilon [0, Y_0 \frac{k-a}{X_0 - a}]$ Luego tendremos:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(-a \leq X \leq a) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2k} dt = \frac{a}{k}$$

Análogamente buscamos: $\mathbb{P}(0 < Y \leq y)$ con $y \leq Y_0 \frac{k-a}{X_0 - a}$.
Por otro lado:

$$\mathbb{P}(-x \leq X \leq a) + \mathbb{P}(a \leq X \leq x) = 2\mathbb{P}(a \leq X \leq x)$$

$$= 2 \int_{a}^{x} \frac{1}{2k} dt = 2\frac{x - a}{2k}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(0 < Y \leq y) = \frac{x - a}{k}$$

Pero $x = y\frac{X_0 - a}{Y_0} + a$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(0 < Y \leq y) = y\frac{X_0 - a}{Y_0 k} = F(y)$$

Luego, para obtener la densidad se deriva con respecto a y, obteniéndose:

$$f_y(Y) = \frac{X_0 - a}{Y_0 k}$$

Por lo tanto se tiene la distribución mixta dada por:

$$\mathbb{P}(0 \leq Y \leq y) = \frac{a}{k} + \int_0^y \frac{X_0 - a}{Y_0 k} dt$$