Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra	:	Fernando Lema
Profesor Auxiliar	:	José Luis Malverde

Clase Auxiliar

15 de Agosto 2005

1. Considere un juego donde usted lanza cuatro dados perfectos. Indique el espacio muestral.
   a) Calcule la probabilidad de obtener los cuatro dados iguales.
   b) Calcule la probabilidad de obtener tres dados iguales.
   c) Calcule la probabilidad de obtener dos pares.
   d) Calcule la probabilidad de obtener par.
   e) Calcule la probabilidad de obtener todos los dados distintos.
   f) Plantee una nueva formulación para el espacio muestral, donde solo importe el juego obtenido.
2. En la mesa redonda del Rey Arturo están sentados N caballeros, cada uno de ellos está enemistado con sus dos vecinos inmediatos. El Rey desea escoger un grupo de k caballeros para rescatar una princesa de la cueva del Dragón.
   a) De cuántas maneras se puede elegir el grupo de modo que no haya enemigos en él?
   b) Con qué probabilidad no hay enemigos en un grupo de cinco caballeros elegidos al azar?

3. Una caja contiene $2n$ helados, n de los cuales son de naranja y el resto de frutilla. De un grupo de $2n$ personas m prefieren el helado de naranja $(0 < m < n)$, s prefieren el de frutilla $(0 < s < n)$ y el resto no tiene preferencia. Encuentre la probabilidad de que se respeten las preferencias de todos si los helados se distribuyen al azar entre las $2n$ personas.

Solución

1. Para resolver el problema es necesario notar que las configuraciones que puede adoptar la $4-$ *tupla* de dados son equiprobables, por ello se procederá a contar los casos favorables, en cada uno de los casos planteados. El espacio muestral en este caso es $\Omega = \{x \epsilon \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4\}$
   a) Para el caso del póker los casos favorables están dados por las formas de sacar 4 dados iguales, estas formas son 6, correspondiente a las seis pintas distintas que posee un dado. Las formas de sacar los dados son claramente 6^4 (6 formas de sacar el primero, por 6 formas de sacar el segundo...) por lo que la probabilidad queda dada por:

   $$\frac{6}{6^4}$$

   b) Para el caso de sacar un trío las formas de obtenerlo son 6 (las posibles pintas que puede tener el trío) por 5 (las posibles pintas que puede tener el dado restante por $\binom{4}{1}$ (las posibles ubicaciones del dado distinto entre los demás). En consecuancia las formas de sacar un trío son:$6 * 5 * \binom{4}{1}$ y la probabilidad queda dada por:

$$\frac{6 * 5 * \binom{4}{1}}{6^4}$$

c) Para sacar dos pares las formas de hacerlo son $\binom{6}{2}$ (las posibles formas de escoger las pintas para los pares) por $\binom{4}{2}$ las posibles formas de ordenar los dos pares. Entonces la probabilidad queda dada por:

$$\frac{\binom{6}{2} * \binom{4}{2}}{6^4}$$

d) Un par puede obtenerse de 6 formas (las posibles pintas para el par) por 5 (las posibles pintas que puede tener uno de los dados restantes) por 4 formas de elegir el dado restante, por $\binom{4}{2}$ formas de ubicar los dados distintos entre el par. La probabilidad queda dada por

$$\frac{6 * 5 * 4 * \binom{4}{2}}{6^4}$$

e) Las formas de que todos los dados sean distintos, por los mismos argumentos anteriores, son $6 * 5 * 4 * 3$ y por ende la probabilidad de obtener todos los dados distintos es:

$$\frac{6 * 5 * 4 * 3}{6^4}$$

f) en base a lo anterior el espacio muestral puede quedar definido por los eventos A_1: Obtener todos los dados distintos, A_2: Obtener un par, A_3: Obtener un trío, A_4: Obtener dos pares, A_5: Obtener un póker. De esta forma el espacio muestral puede redefinirse como :

$$\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$$

2. *a*) Para que no haya enemigos en el grupo, entre dos caballeros escogidos debe haber al menos uno que no haya sido escogido. Para ello suponemos un Caballero de referencia arbitrario. Si denotamos x_i a la cantidad de caballeros no escogidos entre el $i-esimo$ escogido y el $i+1-esimo$ escogido (x_k será la cantidad de Caballeros no escogidos entre el último escogido y el primero), la condición anterior queda dada por:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = n - k, x_j \geq 1$$

Para ver las posibles soluciones a la ecuación planteada consideramos el siguiente modelo:

- $\circ$: Un Caballero escogido.
- $|$: Separación entre Caballeros no escogidos, i.e. Un Caballero escogido.

e.g.1. Si hay tres Caballeros no escogidos entre la referencia y el primer escogido, uno entre el primer y segundo escogido y dos entre el segundo y el tercero (suponemos N=6, k=3) Entonces se tendrá:

$$\circ \circ \circ | \circ | \circ\circ$$

e.g.2. Si hay un Caballero no escogido entre la referencia y el primer escogido, ninguno entre el primer y segundo escogido y cinco entre el segundo y el tercero (note que este caso es infactible, pues tendría dos enemigos juntos) Entonces se tendrá:

$$\circ \,||\, \circ\circ\circ\circ\circ$$

En consecuencia se tienen $N-k$ puntos y $k-1$ rayas, luego las formas posibles de elegir los pasteles es equivalente a las combinaciones de las $k-1$ rayas entre $N-k$ puntos (i.e. las $N-k-1$ posiciones posibles) (note la equivalencia con el problema de la pizzas visto en cátedra). Para este razonamiento se hizo uso de un Caballero como referencia, para añadir esta información al modelo se considera una nueva variable $x_0 \geq 0$, que será la cantidad de caballeros entre una referencia arbitraria y el primero escogido y se cambia la restricción para x_k por $x_k \geq 0$. La nueva ecuación tendrá tantas soluciones como formas de ubicar k rayas entre $n-k$ puntos (note que el k-ésimo caballero y la referencia pueden quedar juntos) En consecuencia la forma de elegir los caballeros queda dada por:

$$\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$$

b) Las formas de escoger k Caballeros "al azar", entre los N presentes, son $\binom{N}{k}$, lo cual constituye los casos totales, por lo tanto la probabilidad de escoger un grupo que no tenga enemigos es:

$$\frac{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{N}{k}}$$

3. Primero es necesario notar que las formas de asignar los helados son equiprobables. En segundo lugar note que bastará asignar los helados de naranja (equivalentemente los de frutilla) para que la asignación quede completamente determinada, pues aquellas personas que no reciban un helado de naranja, recibirán uno de frutilla.
Supóngase que asigna primero los m helados de naranja a quienes gustan de este helado solamente, luego le restará por asignar $n-m$ helados de naranja entre las $2n-m-s$ personas que no tienen preferencia alguna. Esto último se puede hacer de: $\binom{2n-m-s}{n-m}$ formas (i.e. las combinaciones de $n-m$ helados entre $2n-m-s$ personas
Por otra parte, las formas de asignar los helados son:

$$\binom{2n}{n}$$

por el mismo argumento utilizado anteriormente (que basta asignar solo los de un tipo)
En consecuencia la probabilidad de respetar todas las preferencias queda dada por:

$$\frac{\binom{2n-m-s}{n-m}}{\binom{2n}{n}}$$

NOTA: Si usted realiza la asignación, partiendo con los helados de frutilla, lo podrá hacer de:

$$\binom{2n-m-s}{n-s}$$

formas.
Sin embargo, usted ya habrá notado que:

$$\binom{2n-m-s}{n-m} = \binom{2n-m-s}{n-s}$$

Por lo que ambos resultados son equivalentes.