

Auxiliar 11, MA34A-1

Profesor: Servet Martínez

Auxiliares: Francisco Silva, Bolivar Díaz

1. Sea $p \in (0, 1)$ fijo. Sean $(Y_i : i \in \{1, \dots, n\})$ variables aleatorias independientes de distribución Bernoulli de parámetro p (esto último quiere decir $\mathbb{P}(Y_j = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_j = 0)$). Fije m con $1 \leq m < n$.

(a) Sean J un subconjunto fijo de $\{1, \dots, n\}$, conteniendo m elementos ($|J| = m$). Notaremos $J^c = \{1, \dots, n\} \setminus J$.

(a1) Calcule $\mathbb{P}(Y_j = 1 \ \forall j \in J, Y_j = 0 \ \forall j \in J^c)$.

(a2) Calcule $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n Y_i = m)$.

(a3) Deduzca que

$$\mathbb{P}(Y_j = 1 \ \forall j \in J \mid \sum_{i=1}^n Y_i = m) = \frac{1}{\binom{n}{m}}$$

(b) Se define la variable aleatoria $S := \inf\{i \in \{1, \dots, n\} : Y_i = 1\}$ (se coloca $S = \infty$ si $Y_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$). Sea $\ell \in \{1, \dots, n\}$ fijo. Calcule la probabilidad que S sea ℓ dado que la suma de las n variables aleatorias es m , es decir

$$\mathbb{P}(S = \ell \mid \sum_{i=1}^n Y_i = m).$$

2. Romeo y Julieta acuerdan juntarse a escondidas a las 2 A.M, pero debido a problemas en sus casas en general llegan atrasados. El tiempo de atraso de ambos se distribuye como una exponencial de parámetro λ . Calcule la densidad de probabilidad de la v.a que mide la diferencia entre la hora en el cual llega Romeo con la de Julieta.

3. Sea X una v.a uniformemente distribuida en $(-1, 1)$. Encuentre la densidad de la v.a $\sqrt{|X|}$ y la densidad de $-\ln |X|$.

4. Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a's independientes con la misma densidad f (Puede considerar $\Omega = \mathbb{R}^n$, $F =$ Borelianos). Sean T_k las v.a's definidas como los k -ésimas mas pequeños entre los X_i . Encuentre la distribución individual y la conjunta de los T_k .