

Auxiliar 4, MA34A-1

Profesor: Servet Martínez

Auxiliares: Francisco Silva, Bolívar Díaz

1. Una urna contiene n bolas negras y n bolas blancas. Ambos conjuntos de bolas poseen una numeración de 1 hasta n .

a) Uno extrae las bolas al azar, una después de la otra, sin reposición (en todo lo que sigue siempre será sin reposición), hasta que no queden bolas negras en la urna. Calcular la probabilidad de que sean necesarias $N = k$ extracciones.

b) Ahora uno extrae n bolas de la urna. Calcule la probabilidad de obtener en orden las bolas numeradas de 1 hasta n .

Uno dirá que hay un reencuentro si el orden en que es sacada una bola coincide con su numeración.

c) Calcule la probabilidad de que haya un reencuentro en la k -ésima extracción. Calcule la probabilidad de que hayan p reencuentros en p posiciones de orden fijos de extracción.

d) Uno saca las $2n$ bolas de a pares. Un par se dice homogéneo si son del mismo color. Calcule la probabilidad de que el primer par sea homogéneo. Calcule la probabilidad de que el p -ésimo par lo sea.

e) Al par de orden p uno asocia la variable aleatoria $X_p = 1$ si el par es homogéneo, $X_p = 0$ si es heterogéneo. Calcule la función de probabilidad discreta de X y grafique su función distribución.

2. a) Hay k urnas cada una con m bolas blancas y n bolas negras. Una bola se extrae aleatoriamente de la primera urna y se transfiere a la segunda, luego se extrae aleatoriamente una bola de la segunda urna y se transfiere a la tercera, y así sucesivamente. Finalmente una bola se extrae aleatoriamente de la k -ésima urna. Pruebe que la probabilidad de que la última bola sea blanca es igual a la probabilidad de que la primera sea blanca.

b) Un mensaje binario (0 o 1) transmitido a través transmitido a través de un canal ruidoso es recibido incorrectamente con probabilidad ϵ_0 y ϵ_1 respectivamente. Los errores en son independientes.

b.1) Suponga que el canal de transmisión envía 0 con probabilidad p y envía 1 con probabilidad $1 - p$. ¿Cuál es la probabilidad de que un símbolo enviado aleatoriamente sea recibido correctamente?

b.2) Suponga que la palabra 1011 es transmitida. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los símbolos en la palabra sean recibidos correctamente?

b.3) En un esfuerzo para aumentar la confiabilidad de la comunicación, cada símbolo es transmitido 3 veces y el símbolo se decodifica por mayoría. ¿Cuál es la probabilidad de que el símbolo 0 sea decodificado correctamente?

b.4) Suponga que el canal envía 0 con probabilidad p y envía 1 con probabilidad $1 - p$, y que el esquema de la parte anterior es usado. ¿Cuál es la probabilidad de que 0 haya sido transmitido dado que se recibió la palabra 101?

3. Los Lakers y los Celtics van a jugar una serie de playoff de n partidos, donde n es impar. En cada partido los Celtics tienen probabilidad p de ganar, independientemente de los demás partidos.

a) Encuentre los valores de p para los cuales a los Celtics les conviene jugar 5 partidos en vez de 3.

b) Para cualquier $k > 0$ encuentre los valores de p para los cuales es para los Celtics más conveniente jugar $n = 2k + 1$ en vez de $n = 2k - 1$ partidos.

Solución al problema pendiente de la auxiliar P3 b) Sea N el número de partidos ganados por los Celtics en los primeros $2k - 1$ juegos. Denotemos por A el evento asociado al hecho de que ganen los Celtics en los $2k + 1$ partidos y B al evento en que los Celtics ganan en los $2k - 1$ partidos. Tenemos que

$$P(A) = P(N \geq k + 1) + P(N = k)(1 - (1 - p)^2) + P(N = k - 1)p^2$$

y

$$P(B) = P(N \geq k) = P(N = k) + P(N \geq k + 1)$$

Considerando la diferencia $P(A) - P(B)$ imponiendo que esta sea positiva y simplificando términos se obtiene que la condición es $p > \frac{1}{2}$ tal como en la parte anterior.