MA33A- Cálculo Numérico
Control 2 Otoño 2005

Profesor: Mauricio Telias
Profesor Auxiliar: Cristian Figueroa
4 de junio de 2005

Problema 1

El método de Gauss Jordan es una variante del método de Gauss que consiste en no solamente eliminar la variable de las ecuaciones que están debajo, sino que tambien de las que están encima. Es decir, en el proceso de eliminación de la variable x_k, se elimina la variable x_k de TODAS las ecuaciones, a diferencia de Gauss que solamente lo hace de la ecuacion $k+1$ hasta la n.

Sabiendo que las fórmulas para Gauss son: (interpretadas según lo visto en clases)

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad i = k+1, \ldots, n \quad j = k+1, \ldots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad i = k+1, \ldots, n$$

Se pide:

- Encontrar las fórmulas correspondientes para Gauss Jordan. Mostrar que se llega a una matriz diagonal
- Comparar ambos métodos del punto de vista del número total de operaciones. Deduzca que Gauss es más conveniente (Escribir la solución completa en la comparación)

  *indicación:*Puede serle util recordar que

  $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Problema 2

Una matriz de Housholder se define como:

$$H(v) = I - 2\frac{vv^t}{v^t v} \quad v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

- Mostrar que es simétrica e invertible (*indicación:*Considere $H(v)\cdot H(v)$)(Matriz Ortogonal)

- Mostrar que si $a \in \mathbb{R}^n$ es tal que al menos un elemento distinto del primero es no nulo, entonces :

$$H(a + \|a\|_2 e_1)a = -\|a\|_2 e_1 \quad \text{y} \quad H(a - \|a\|_2 e_1)a = \|a\|_2 e_1$$

  Donde : $\|a\|_2 = (a^t a)^{\frac{1}{2}}$ y $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

- Vamos a usar estas matrices H para hacer una eliminación similar a Gauss:

$$A^{(k)} = H_{k-1}H_{k-2}\dots H_2H_1A \quad k > 1$$

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{(k-1)(k-1)} & a_{(k-1)k} & \cdots & a_{(k-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & a_{(k+1)k} & \cdots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  Para eliminar la variable x_k de las filas $k+1$ hasta n multiplicamos $A^{(k)}$ por la matriz $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \widetilde{H_k} \end{pmatrix}$ con $\widetilde{H_k}(?)a = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

- Que hay que poner en ? para que funcione?

- Explicar que se llega a una matriz triangular superior

$$A^{(n)} = H_{n-1}\dots H_1A$$

  Deducir igual que para LU que hay una factorización $A = QR$ con R triangular superior y Q ortogonal.

Problema 3

Sea A simétrica tal que sus valores propios verifican $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$

Sabemos que la sucesión :

u_o dado;

$$u_k = \frac{Au_{k-1}}{\|Au_{k-1}\|}$$

Converge a v vector propio asociado a λ_1 (método de la potencia iterada)

Sea B una matriz simétrica y $\widetilde{\lambda}_i$ una aproximación a λ_i, valor propio de B que verifica $|\widetilde{\lambda}_i - \lambda_i| < |\widetilde{\lambda}_i - \lambda_j|$, λ_j otro valor propio de B.

- De que matriz es valor propio $\frac{1}{\widetilde{\lambda}_i - \lambda_i}$?
- Puede aplicarse el algoritmo anterior a esa matriz?
- Describa un algoritmo para calcular el vector propio de B asociado a λ_i usando el método de la potencia iterada para esa matriz.(Potencia inversa)