Resumen - MA26B

Teoremas de Green y Stokes, Ley de Gauss

Paulina Herrera Montecinos   Juan Mayorga Zambrano

30 de agosto de 2005

1. El Operador Nabla

- Es útil tratar como vector al operador nabla,

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \hat{i}\partial_x + \hat{j}\partial_y + \hat{k}\partial_z.$$

  pues facilita los cálculos.

- Si $f = f(x, y, z)$ y $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ son, respectivamente, un campo escalar y un campo vectorial (ambos de clase C^1), con dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(f) &= \vec{\nabla} f = \hat{i}\partial_x f + \hat{j}\partial_y f + \hat{k}\partial_z f, & (1)\\ \mathrm{div}(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_x \vec{F}_x + \partial_y \vec{F}_y + \partial_z \vec{F}_z, & (2)\\ \mathrm{rot}(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}, & (3)\\ \Delta f &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \partial_{xx} f + \partial_{yy} f + \partial_{zz} f, & (4) \end{aligned}$$

  son, en orden, el gradiente de f, la divergencia de $\vec{F}$, el rotacional de $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ y el laplaciano de f (si es de clase C^2).

- Con esta interpretación es fácil ver que se cumplen las siguientes relaciones:

  1. $\mathrm{rot}(\nabla\phi) = 0$,
  2. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{F})) = 0$,

3. $\mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \mathrm{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \mathrm{rot}(G)$,
4. $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$,
5. $\mathrm{rot}(\phi \vec{F}) = \phi\, \mathrm{rot}(\vec{F}) + \nabla \phi \times \vec{F}$,

donde tanto los campos vectoriales, $\vec{F}$ y $\vec{G}$, como los campos escalares, f, g y ϕ, son de clase C^1.

2. El Teorema de la Divergencia

- Se puede interpretar la divergencia como el flujo neto por unidad de volumen con que se expande ($\mathrm{div}(\vec{F}) > 0$) o contrae ($\mathrm{div}(\vec{F}) < 0$) un fluido.

Teorema 2.1 (de Gauss sobre la divergencia) *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado tal que $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Omega` \supseteq \overline{\Omega}$, de clase $C^1(\Omega')$. Entonces,*

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int\int\int_{\Omega} \mathrm{div}(\vec{F}) dV.$$

- El Teorema de la Divergencia es también válido en dominios no acotados en tanto que las integrales en cuestión sean convergentes.

3. Fórmulas de Green

- Son consecuencia del Teorema de Gauss sobre la divergencia.

Proposición 3.1 (Primera fórmula de Green) *Sean f y g dos campos escalares de respectivamente de clase C^1 y C^2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto tal que $\partial\Omega$ es una superficie cerrada, simple, regular por trozos y orientada según la normal exterior $\vec{n}$. Entonces,*

$$\int\int\int_{\Omega} f \Delta g \, dV = -\int\int\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dV + \int\int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} \, dA,$$

donde $\frac{\partial g}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla g$.

- A la primera fórmula de Green tambié se le refiere como la fórmula de integración por partes.

<u>Proposición</u> 3.2 (Segunda fórmula de Green) *Sean f y g dos campos escalares de clase C^2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto tal que $\partial\Omega$ es una superficie cerrada, simple, regular por trozos y orientada según la normal exterior $\vec{n}$. Entonces,*

$$\int\int\int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\, dV = \int\int_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dA.$$

4. Campos Radiales

- Supongamos que $\vec{F}$ es radial, es decir, $\vec{F}(x, y, z) = g(r)\,\vec{r}$, con r el módulo de $\vec{r} = (x, y, z)$. Entonces,

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3g(r) + rg'(r).$$

- Se tiene que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ si y sólo si $g(r) = \frac{\alpha}{r^3}$, para algún $\alpha > 0$.

- El campo eléctrico generado por una carga puntual Q situada en el origen,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3},$$

tiene divergencia nula excepto en el origen. Lo mismo sucede con el campo gravitacional generado por una masa puntual M situada en el origen.

<u>Teorema</u> 4.1 *Sea $\vec{E}$ el campo eléctrico generado por un conjunto (numerable) de cargas puntuales repartidas en $\mathbb{R}^3$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto tal que ninguna carga yace sobre $\partial\Omega$. Entonces,*

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

donde Q es la carga total encerrada por $\partial\Omega$.

- Para el campo el campo gravitacional,

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM,$$

donde M es la masa encerrada por $\partial\Omega$.

5. Divergencia en coordenadas curvilíneas

- Sea $\vec{p}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un sistema de coordenadas curvilíneas (i.e. es inyectiva):

$$\vec{p}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in D.$$

Factores escalares:

$$h_u = \|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u}\|, \quad h_v = \|\frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\|, \quad h_w = \|\frac{\partial \vec{p}}{\partial w}\|,$$

Triedro de vectores unitarios:

$$\hat{u} = \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial u}, \quad \hat{v} = \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}, \quad \hat{w} = \frac{1}{h_w} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial w}$$

Componentes y divergencia, en $\vec{p}$, de $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$F_u = \vec{F} \cdot \hat{u}, \quad F_v = \vec{F} \cdot \hat{v}, \quad F_w = \vec{F} \cdot \hat{w},$$

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\partial_u(F_u h_v h_w) + \partial_v(h_u F_v h_w) + \partial_w(h_u h_v F_w)\right].$$

5.1. Coordenadas cilíndricas:

Dominio:

$$D: \rho \in [0,\infty[, \theta \in [0,2\pi[, z \in \mathbb{R},$$

Relación con cartesianas y factores escalares:

$$\begin{cases} x = x(\rho,\theta,z) = \rho\cos\theta \\ y = y(\rho,\theta,z) = \rho\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} h_p = 1 \\ h_\theta = \rho \\ h_z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \theta(x,y,z) = \arctan(y/x) \\ z = z(x,y,z) = z \end{cases}$$

Triedro:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ sen\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{z} = \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ortogonalidad:

$$\hat{\rho} \times \hat{\theta} = \hat{k}$$

Componentes y divergencia de $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$F_\rho = \vec{F} \cdot \hat{\rho}, \quad F_\theta = \vec{F} \cdot \hat{\theta}, \quad F_z = \vec{F} \cdot \hat{k}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k} = F_\rho \hat{\rho} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{k}$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho} \left[\partial_\rho(\rho F_\rho) + \partial_\theta(F_\theta) + \partial_z(\rho F_z) \right].$$

5.2. Coordenadas esféricas

Dominio:

$$D : r \in [0, \infty[, \theta \in [0, 2\pi[, \varphi \in [0, \pi]$$

Relación con cartesianas y factores escalares:

$$\begin{cases} x = x(r,\theta,\varphi) = r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = y(r,\theta,\varphi) = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = z(r,\theta,\varphi) = r \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \theta(x,y,z) = \arctan(y/x) \\ \varphi = \arctan(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}) \end{cases} \qquad \begin{cases} h_r = 1 \\ h_\theta = r \operatorname{sen}\varphi \\ h_\varphi = r \end{cases}$$

Triedro:

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$$

Ortogonalidad:

$$\hat{\varphi} \times \hat{\theta} = \hat{r}$$

Componentes y divergencia de $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$F_r = \vec{F} \cdot \hat{r}, \quad F_\theta = \vec{F} \cdot \hat{\theta}, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \hat{\varphi}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\varphi \hat{\varphi}$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi} \left[\partial_r(r^2 \operatorname{sen}\varphi F_r) + \partial_\theta(r F_\theta) + \partial_\varphi(r \operatorname{sen}\varphi F_\varphi) \right].$$

6. El Teorema de Stokes

- Se puede interpretar el rotor asociado a un campo $\vec{F}$ como la velocidad angular local de este, que se produce cuando el fluido (en el punto en cuestión) rota sobre si mismo.

- Si $\vec{F}$ representa el campo de velocidades de un flujo, la condición $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ significa que el fluido no rota, es decir que una rueda chica sumergida en el flujo se desplazará con este, pero no rotará sobre si misma.

<u>**Teorema**</u> **6.1 (Teorema de Stokes)** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie simple, orientable, regular por trozos y tal que su borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1, con $\Omega \supseteq S \cup \partial S$. Asumimos que $d\vec{A}$ y $d\vec{r}$ siguen la regla de la mano derecha. Entonces,*

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{A}.$$

- Un campo vectorial $\vec{F}$ de clase C^1 es conservativo si y sólo si $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$.

7. Rotacional en coordenadas curvilíneas

- Usamos la notación de la sección 5.

- Las coordenadas de $\mathrm{rot}(\vec{F})$ en $\vec{p}$:

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{u} = \frac{1}{h_v h_w} \left[\partial_v (F_w h_w) - \partial_w (F_v h_v)\right],$$

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{v} = \frac{1}{h_u h_w} \left[\partial_w (F_u h_u) - \partial_u (F_w h_w)\right],$$

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{w} = \frac{1}{h_u h_v} \left[\partial_u (F_v h_v) - \partial_v (F_u h_u)\right].$$

- Se tiene que

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \hat{u} & \hat{v} & \hat{w} \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ F_u & F_v & F_w \end{pmatrix}.$$

8. El Teorema de Green (en el plano)

- Se lo puede obtener como un corolario del Teorema de Stokes.

<u>**Teorema**</u> **8.1 (Teorema de Green)** *Sea* $S \subset \mathbb{R}^2$ *una región acotada tal que su frontera* ∂S *es una curva cerrada y regular por trozos, orientada en el sentido antihorario. Sea* $\vec{F} = (f_1, f_2) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, donde* $\Omega \supseteq S \cup \partial S$*, un campo vectorial de clase* $C^1(\Omega)$*. Entonces,*

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S (\partial_x f_2 - \partial_y f_1)\, dA.$$