Resumen - MA26B

Curvas, Superficies, Integración de Campos Vectoriales

Paulina Herrera Montecinos Juan Mayorga Zambrano

22.8.2005

1. Curvas

- Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada por $\vec{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (I un intervalo), i.e.

  $$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in I\}, \text{ también notado } \Gamma : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, t \in I,$$

  $(n = 2, 3)$.

- Toda aplicación $\theta : I \to J \subseteq \mathbb{R}$ biyectiva y bicontinua (i.e. θ^{-1} es continua) permite reparametrizar Γ (de manera equivalente):

  $$\Gamma : \vec{p}(\theta) = \begin{pmatrix} x_1(\theta) \\ \vdots \\ x_n(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in J,$$

  donde $\vec{p}(\theta) = \vec{r}(t(\theta))$.

  Si θ es $\uparrow$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ y $\vec{p} = \vec{p}(\theta)$ tienen el mismo sentido. Si θ es $\downarrow$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ y $\vec{p} = \vec{p}(\theta)$ tienen sentido opuesto.

  Proposición 1.1 *Si r es simple y regular. Entonces todas sus parametrizaciones regulares son inyectivas y equivalentes.*

- Si $\vec{r} = \vec{r}(t)$ es inyectiva y regular, se calcula la longitud de Γ mediante

$$L(\Gamma) = \int_I \|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\| dt;$$

la longitud de arco es:

$$\begin{aligned} s : I &\rightarrow J = [0, L(\Gamma)] \\ t &\rightarrow s(t) = \int_{\text{ínf } I}^{t} \|\frac{d\vec{t}}{d\alpha}(\alpha)\| d\alpha \end{aligned}$$

Puesto que $\frac{ds}{dt}(t) = \|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\| > 0$, $\forall t \in I$, s define la parametrización canónica o natural:

$$\Gamma : \vec{r}_1(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{pmatrix}, s \in [0, L(r)],$$

donde $\vec{r}_1(s) = \vec{r}(t(s))$.

- Si el parámetro $t \in I$ representa el tiempo,

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt}(t) : \text{ velocidad al tiempo } t, \\
v(t) &= \|\frac{dr}{dt}(t)\| = \frac{ds}{dt}(t) : \text{ rapidez al tiempo } t, \\
T(t) &\equiv \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = T_1(s) \equiv \frac{d\vec{r}_1}{ds}(s) : \text{ vector tangente a } \Gamma \text{ cuando } t = t(s) \\
\kappa_1(s) &\equiv \|\frac{dT_1}{ds}(s)\| = (\frac{dT}{dt}(t))/v(t) \equiv \kappa(t) : \text{ curvatura de } \Gamma \text{ cuando } t = t(s) \\
R_1(s) &= \frac{1}{\kappa_1(s)} : \text{ radio de curvatura cuando } t = t(s) \\
N_1(s) &\equiv (\frac{dT_1}{ds}(s))/\kappa_1(s) = N(t) = (\frac{dT}{dt}(t))/\kappa(t) : \text{ vector normal a } \Gamma \text{ cuando } t = t(s) \\
B(t) &\equiv T(t) \times N(t) = B_1(s) = T_1(s) \times N_1(s) : \text{vector binormal a } \Gamma \text{ cuando } t = t(s) \\
\tau_1(s) &\equiv -N_1(s) \cdot \frac{dB_1}{ds}(s) = \tau(t) \equiv -N(t) \cdot (\frac{dB}{dt}(t))/v(t) : \text{ torsión asociada a} \\
& \quad \Gamma \text{ cuando } t = t(s)
\end{aligned}$$

- Fórmulas de Frénet:

1. $\frac{dT_1}{ds}(s) = \kappa_1(s)N_1(s)$,
2. $\frac{dN_1}{ds}(s) = -\kappa_1(s)T_1(s) + \tau_1(s)N_1(s)$,
3. $\frac{dB_1}{ds}(s) = -\tau_1(s)N_1(s)$

- Planos de Frenet

i) Plano osculador: definido por $T_1(s)$ y $N_1(s)$.

$$H_\theta = \{u \in \mathbb{R}^3 : (u - \vec{r}_1(s)) \cdot B_1(s) = 0\}, \text{ i.e.}$$

$$\begin{aligned} H_\theta &: (\vec{u} - \vec{r}_1(s)) \cdot B_1(s) = 0, \text{ o también} \\ H_\theta &: (\vec{u} - \vec{r}(t)) \cdot B(t) = 0, \text{ cuando } t = t(s). \end{aligned}$$

ii) Plano normal: definido por $N_1(s)$ y $B_1(s)$.

$$H_N : (\vec{u} - \vec{r}(t)) \cdot T(t) = 0, \text{ cuando } t = t(s)$$

iii) Plano rectificante: definido por $T_1(s)$ y $B_1(s)$.

$$H_R : (\vec{u} - \vec{r}(t)) \cdot N(t) = 0, \text{ cuando } t = t(s)$$

2. Integral de Línea

- Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, $\Omega \supseteq \Gamma$. La integral de línea de f sobre Γ:

$$\int_\Gamma f d\ell \equiv \int_I f(\vec{r}(t)) \|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\| dt$$

- Si f representa la densidad lineal de masa, entonces $M = \int_r f d\ell$ es la masa total de la curva y

$$\left.\begin{aligned} X_G &= \tfrac{1}{M} \int_r x f d\ell \\ Y_G &= \tfrac{1}{M} \int_r y f d\ell \\ Z_G &= \tfrac{1}{M} \int_r z f d\ell \end{aligned}\right\} : \text{ coordenadas del centro de masa}$$

3. Integral de Trabajo

- Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, $\Omega \supseteq \Gamma$. La integral de trabajo de $\vec{F}$ sobre Γ:
$$W_F = \int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_I \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\, dt$$

- Obsérvese que si $\vec{F} = \vec{G} + \vec{H}$, entonces $W_F = W_G + W_H$.

- El campo de fuerzas $\vec{F}$ es <u>conservativo</u> si existe $g : \Omega \to \mathbb{R}$ (potencial) diferenciable y tal que
$$\vec{F} = -\nabla g.$$
En este caso, $W_F = g(\vec{r}(\inf I)) - g(\vec{r}(\sup I))$.

<u>Teorema</u> 3.1 *Las tres propiedades siguientes son equivalentes*

1. $\vec{F}$ *es conservativo,*
2. *Si* Γ *es regular por trozos y cerrada,* $\int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_F = 0$.
3. *Si* Γ_1 *y* Γ_2 *tienen igual punto inicial y final,*
$$\int\limits_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

4. Sistemas de Coordenadas Curvilíneas

- Sea $\vec{p} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un sistema de coordenadas curvilíneas (i.e. es inyectiva):
$$\vec{p}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in D.$$
Factores escalares:
$$h_u = \|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u}\|, \quad h_v = \|\frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\|, \quad h_w = \|\frac{\partial \vec{p}}{\partial w}\|,$$
Triedro de vectores unitarios:
$$\hat{u} = \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial u}, \quad \hat{v} = \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}, \quad \hat{w} = \frac{1}{h_w} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial w}$$

4.1. Coordenadas cilíndricas:

Dominio:

$$D : \rho \in [0, \infty[, \theta \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R},$$

Relación con cartesianas y factores escalares:

$$\begin{cases} x = x(\rho, \theta, z) = \rho \cos\theta \\ y = y(\rho, \theta, z) = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} h_p = 1 \\ h_\theta = \rho \\ h_z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \theta(x, y, z) = \arctan(y/x) \\ z = z(x, y, z) = z \end{cases}$$

Triedro:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ sen\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{z} = \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ortogonalidad:

$$\hat{\rho} \times \hat{\theta} = \hat{k}$$

5. Coordenadas esféricas

Dominio:

$$D : r \in [0, \infty[, \theta \in [0, 2\pi[, \varphi \in [0, \pi]$$

Relación con cartesianas y factores escalares:

$$\begin{cases} x = x(r, \theta, \varphi) = r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = y(r, \theta, \varphi) = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = z(r, \theta, \varphi) = r \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \theta(x, y, z) = \arctan(y/x) \\ \varphi = \arctan(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}) \end{cases} \qquad \begin{cases} h_r = 1 \\ h_\theta = r \operatorname{sen}\varphi \\ h_\varphi = r \end{cases}$$

Triedro:

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$$

Ortogonalidad:

$$\hat{\varphi} \times \hat{\theta} = \hat{r}$$

5.1. Coordenadas Toroidales

Dominio:

$$D : r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi[, \varphi \in [0, \pi]$$

Relación con cartesianas y factores escalares:

$$\begin{cases} x = x(r, \theta\varphi) = (R + r \operatorname{sen} \varphi) \cos \theta \\ y = y(r, \theta\varphi) = (R + r \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} h_r = 1 \\ h_\theta = (R + r \operatorname{sen} \varphi) \\ h_\varphi = r \end{cases}$$

Triedro

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\theta} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix},$$

Ortogonalidad:

$$\hat{\varphi} \times \hat{\theta} = \hat{r}$$

6. Diferencial de Volumen

Sea $\vec{p} = \vec{p}(u, v, w)$ un sistema de coordenadas curvilíneas. Si $f = f(x, y, z)$ es un campo escalar,

$$\nabla f = \frac{\hat{u}}{h_u} \partial_u f(p) + \frac{\hat{v}}{h_v} \partial_v f(p) + \frac{\hat{w}}{h_w} \partial_w f(p).$$

- Si $p(D) = \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, la fórmula del cambio de variable:

$$\int\limits_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_{D} f(\vec{p}(u, v, w)) |\det(\vec{p}_u, \vec{p}_v, \vec{p}_w)| dudvdw.$$

- El diferencial de volumen:

$$dV = \begin{cases} dxdydz & \text{coordenadas cartesianas} \\ |\vec{p}_w \cdot (\vec{p}_u \times \vec{p}_v| du\, dv\, dw & \text{c. curvilíneas} \\ h_u h_v h_w du\, dv\, dw & \text{sistema ortogonal} \\ \rho \cdot d\rho\, d\theta\, dz & \text{c. cilídricos} \\ r^2 \operatorname{sen} \varphi \cdot dr\, d\theta\, d\varphi & \text{c. esféricas} \\ r(R + r \operatorname{sen} \varphi) \cdot dr\, d\theta\, d\varphi & \text{c. toroidales} \end{cases}$$

7. Superficies

- Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\vec{\sigma} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (Ω conexo), i.e.,

$$\Sigma = \{\vec{\sigma}(u,x) : (u,v) \in D\}, \text{ también notado}$$

$$\Sigma : \vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in D.$$

Vectores tangentes:

$$\hat{u} = (\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} / \| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \|, \qquad \hat{v} = (\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}) / \| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \|$$

Vector normal

$$\hat{n} = \hat{n}(u,v) = [\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}] / \| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \|$$

- Si $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(u,v)$ es inyectiva y regular, se calcula el área de Σ mediante

$$A(\Sigma) = \int\limits_D dA,$$

donde

$$dA = \| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \| \cdot du dv$$

8. Integral de Superficie

- Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua, $U \supseteq \Sigma$. La integral de superficie de f sobre Σ:

$$\int\limits_\Sigma f dA = \int\limits_D f(\vec{\sigma}(u,v)) dA$$

- Si f representa la densidad superficial de masa, entonces

$$M = \int\limits_\Sigma f \, dA : \text{ masa total de la superficie}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_G = \frac{1}{M} \int\limits_\Sigma x f dA \\ y_G = \frac{1}{M} \int\limits_\Sigma y f dA \\ z_G = \frac{1}{M} \int\limits_\Sigma z f dA \end{array}\right\} : \text{ coordenadas del centro de masa .}$$

9. Integral de Flujo

- Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continua. El flujo asociado al campo $\vec{F}$ está definido por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt}(t, \vec{r}_0) = \vec{F}(\phi(t, \vec{r}_0)) \\ \phi(0, \vec{r}_0) = \vec{r}_0. \end{cases}$$

- La integral de flujo de $\vec{F}$ sobre Σ:

$$\begin{aligned} Q_F &= \int\limits_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int\limits_{\Sigma} \vec{F} \cdot \hat{n} dA \\ &= \int\limits_{\Sigma} \vec{F}(\vec{\sigma}(u, v)) \cdot [\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}] dudv \end{aligned}$$