

# Guía N°5 Ma26a-01 2005-1

## Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

PROF. MANUEL DEL PINO; AUXS.: WALDO ARRIAGADA - CLAUDIO MUÑOZ

Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM - U. de Chile

### Transformada de Laplace

1. Pruebe que las funciones siguientes son de orden exponencial y encuentre sus transformadas de Laplace.  
(a)  $f(t) = \sinh(at)$ , (b)  $f(t) = \cosh(at)$ , (c)  $f(t) = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$ , (d)  $f(t) = \int_0^t g(s)ds$ ,  $g$  de orden exponencial;  
(e)  $f(t) = |\sin(at)|$ , (f)  $f(t) = U_{\pi/2}(t) \sin t$ , (g)  $f(t) = t^2 \sin(at)$ .
2. (a) Sea  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función periódica con periodo  $T > 0$  (ie,  $f(t) = f(t+T)$ ,  $\forall t > 0$ ). Demuestre que:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\int_0^T e^{-s\xi} f(\xi) d\xi}{1 - e^{-sT}}$$

(b) Calcule  $\mathcal{L}(\tanh x)$ .

3. Suponiendo que  $f$  es una función continua por tramos y de orden exponencial muestre las siguientes propiedades

(a)  $\mathcal{L}\{f(t) \cosh at\} = \frac{1}{2}[\mathcal{L}\{f\}(s-a) + \mathcal{L}\{f\}(s+a)]$

(b)  $\mathcal{L}\{f(t)/t\} = \int_s^\infty \mathcal{L}\{f\}(s) ds$ , donde además,  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)/t$  existe.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones usando el método de la Transformada de Laplace.

(a)  $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 6$ .

(b)  $y'' + 16y = \cos 4t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

(c)  $y'' + 16y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , donde  $f(t) = \cos 4t$ , si  $0 \leq t < \pi$  y  $f(t) = 0$ , si  $t \geq \pi$ .

(d)  $y'' + ty = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , donde  $f(t) = 1 - t$ , si  $0 \leq t < 1$  y  $f(t) = 0$ , si  $t \geq 1$ .

(e)  $y = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t y(s)e^{t-s} ds$ .

(f)  $ty'' + 2(t-1)y' - 2y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

(g)  $y'' + 4y' + 4y = \delta(t-1)$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ .

(h)  $y'' + ty' + y = \delta(t-a) \cos(x+1)$ , con  $a > 0$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ .

(i)  $y' + 6y + 9 \int_0^t y(s) ds = 1$ ,  $y(0) = 0$ .

5. Definimos la siguiente transformada lineal del tipo "Mellin" para funciones  $y(x)$  continuas para  $x \in ]0, 1[$ :

$$M[y(x)](s) = \int_0^1 x^{s-1} y(x) dx \quad s > 0 \text{ (cuando existe)}.$$

- (a) Demuestre que  $M[1] = \frac{1}{s}$  y que  $M[x^a y](s) = M[y](s+a)$  para  $a \in \mathbb{R}$ .  
 (b) Si  $y(x)$  satisface que  $\forall s > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^s y(x) = 0$ , demuestre que  $M[xy'] = -sM[y] + y(1)$ .

- (c) Demuestre que  $M[\int_x^1 y(u)/u du] = \frac{1}{s} M[y]$ .

*Ind.:* defina  $z(x) = \int_x^1 y(u)/u du$  y use (ii).

- (d) Resuelva la siguiente EDO usando la transformada de Mellin y las propiedades demostradas en los puntos anteriores:

$$x(xy')' + 2xy' = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

*Ind.:* Se sabe que si  $M[f] = M[g]$  entonces  $f = g$  para  $f, g$  continuas en  $]0, 1]$

6. (a) Resuelva usando Transformada de Laplace la ecuación

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1/\epsilon & a < t \leq a + \epsilon \\ 0 & t \geq a + \epsilon \end{cases}$$

- (b) Usando el resultado de (i), pruebe que  $z(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(t)$ ,  $t \geq 0$  satisface la ecuación

$$z'' + z = 0, \quad z(a) = 0, \quad z'(a) = 1$$

7. (a) Un péndulo quieto en el instante inicial es golpeado infinitas veces a intervalos de tiempo 1. La ecuación que modela este fenómeno (normalizando constantes físicas) es

$$y'' + y = \sum_{n \geq 1} \delta(x - n); \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Encuentre la solución de este problema. ¿Cómo modificaría los instantes de golpe para que se produzca resonancia?

- (b) Se define la *derivada* de la delta de Dirac centrada en un punto  $a > 0$  por la siguiente relacion

$$\int_0^\infty \delta'(x - a) f(x) dx = -f'(a),$$

para  $f$  derivable en  $[0, \infty)$ . Calcule la correspondiente Transformada de Laplace. Resuelva

$$y'' + y = \delta'(x - a); \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

¿Qué significado físico debería tener la derivada de la delta?.