Pregunta 1 - Control 3

MA26A

7 de junio de 2004

(a) Resuelva usando transformada de Laplace:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = f(t), y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & t < \pi \\ 1 & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases}$$

(b)

$$x\ddot{y} + 2x\dot{y} - 2\dot{y} - 2y = 0, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$$

(c) La función de Bessel de orden 0 es solución de la EDO

$$x^2\ddot{y} + x\dot{y} - x^2 y = 0, y(0) = 1$$

Demuestre que $y(b) = L[y(x)](b)$ es solución de:

$$(s^2 - 1)\dot{y}(s) + sy(s) = 0$$

Escuentre una expresión para y(s)

Solución

(a) Modelamos $f(t)$ usando la función Heaviside:

$$f(t) = H_\pi(t) - H_{2\pi}(t)$$

(0.3 ptos)

$$\Rightarrow \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = H_\pi - H_{2pi}$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$L[\ddot{y}] + 4L[\dot{y}] + 4L[y] = L[H_\pi] - L[H_{2\pi}]$$

$$\Rightarrow s^2L[y]+4sL[y]+4L[y]=\frac{e^{-s\pi}}{s}-\frac{e^{-2s\pi}}{s}$$
$$\Rightarrow (s^2+4s+4)L[y]=\frac{e^{-s\pi}-e^{-2s\pi}}{s}$$
$$\Rightarrow L[y]=\frac{e^{-s\pi}-e^{-2s\pi}}{s(s^2+4s+4)}$$

(0.2 ptos)

Para calcular L^{-1} notamos que:

$$\frac{1}{s(s^2+4s+4)}=\frac{1}{s}\frac{1}{(s+2)^2}=L[1]L[e^{-2t}t]$$

Por convolución tenemos:

$$L[1]L[e^{-2t}t]=\int_0^t 1e^{-2u}udu$$

Integrando por partes tenemos:

$$dv=e^{-2u}, v=-\frac{e^{-2u}}{2}$$
$$u=u, du=1$$

$$\Rightarrow \int_0^t 1e^{-2u}udu=-\frac{ue^{-2u}}{2}|_0^t-\frac{1}{4}e^{-2u}|_0^t$$
$$\Rightarrow \int_0^t 1e^{-2u}udu=-\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}$$

(1 pto)

$$\Rightarrow L[y]=e^{-s\pi}L[-\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}]-e^{-2s\pi}L[-\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}]$$

Y como $L[H_af(t-a)](s)=e^{-sa}L[f(t)](s)$

$$L[y]=L[H_\pi(-\frac{te^{-2(t-\pi)}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2(t-\pi)}+\frac{1}{4})]-L[H_{2\pi}(-\frac{(t-2\pi)e^{-2(t-2\pi)}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2(t-2\pi)}+\frac{1}{4})]$$

$$\Rightarrow y(t)=H_\pi(t)(-\frac{(t-\pi)e^{-2(t-\pi)}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2(t-\pi)}+\frac{1}{4})-H_{2\pi}(t)(-\frac{(t-2\pi)e^{-2(t-2\pi)}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2(t-2\pi)}+\frac{1}{4})$$

(0.5 ptos)

(b) Aplicando transformada de Laplace:

$$L[x\ddot{y}] + 2L[x\dot{y}] - 2L[\dot{y}] - 2L[y] = 0$$

$$L[x\ddot{y}] = -\frac{d}{ds}(L[\ddot{y}]) = -\frac{d}{ds}(s^2L[y] - 1) = -2sL[y] - s^2\dot{L}[y]$$

$$L[x\dot{y}] = -\frac{d}{ds}(L[\dot{y}]) = -\frac{d}{ds}(sL[y]) = -L[y] - s\dot{L}[y]$$

$$\Rightarrow -2sL[y] - s^2\dot{L}[y] - 2L[y] - 2s\dot{L}[y] - 2sL[y] - 2L[y] = 0$$

Multiplicando por -1:

$$\dot{L}[y](s^2 + 2s) + L[y](4s + 4) = 0$$

(0.5 ptos)

$$\Rightarrow \int \frac{d\dot{L}[y]}{L[y]} = -4\int \frac{s+1}{s(s+2)}ds$$

$$\Rightarrow ln(L[y]) = -4[\frac{1}{2}ln(s(s+2)) + C]$$

$$\Rightarrow ln(L[y]) = ln(\frac{1}{s^2(s+2)^2}) + C$$

$$\Rightarrow L[y] = K(\frac{1}{s^2(s+2)^2})$$

(0.5 ptos)
Para el cálculo de la antitransformada:

$$\frac{1}{s^2(s+2)^2} = \frac{1}{s^2}\frac{1}{(s+2)^2} = L[t]L[e^{-2t}t]$$

Por convolución tenemos:

$$L[t]L[e^{-2t}t] = L[\int_0^t (t-u)e^{-2u}udu]$$

La integral resulta:

$$\int_0^t (t-u)e^{-2u}udu = \int_0^t tue^{-2u}du - \int_0^t u^2e^{-2u}du$$

$$= (\frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{te^{-2t}}{2})t - (\frac{1}{4} - \frac{t^2e^{-2t}}{2} - \frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4})$$

(0.5 ptos) Por integración por partes.

$$\Rightarrow y(t) = (\frac{te^{-2t}}{4} + \frac{t}{4} + \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{1}{4})K$$

(0.5 ptos)

Tratar de calcular K y notar que la solución no puede cumplir la condición inicial no es relevante en el puntaje.

(c) Dividimos por x la ecuación y queda:

$$x\ddot{y} + \dot{y} - xy = 0$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$L[x\ddot{y}] + L[\dot{y}] - L[xy] = 0$$

Y como $L[xy(x)] = -\frac{d}{ds}(L[y(x)])$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}(L[\ddot{y}]) + sL[y] - 1 + \frac{d}{ds}(L[y]) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}(s^2L[y] - s - \dot{y}(0))sL[y] - 1 + \dot{L}[y] = 0$$

$$\Rightarrow -[2sL[y] + s^2L[y] - 1] + sL[y] - 1 + \dot{L}[y] = 0$$

$$\Rightarrow -s^2\dot{L}[y] - 2sL[y] + 1 + sL[y] - 1 + \dot{L}[y] = 0$$

$$\Rightarrow -(s^2 - 1)\dot{L}[y] - sL[y] = 0$$

Finalmente $(s^2 - 1)\dot{L}[y] + sL[y] = 0$(1.2 ptos)

Esta ecuación se resuelve a variables separables:

$$\dot{L}[y] = \frac{-sL[y]}{s^2 - 1} \Rightarrow \frac{\dot{L}[y]}{L[y]} = -\frac{s}{s^2 - 1}$$

integrando a ambos lados:

$$ln(L[y]) = -\frac{ln(s^2 - 1)}{2} + C$$

$$\Rightarrow ln(L[y]) = ln(\frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}) + C$$

$$\Rightarrow L[y] = \frac{A}{\sqrt{s^2 - 1}}$$

Con A una constante arbitraria.(0.8 ptos)