Pregunta 3 - Control 3

MA26A

7 de junio de 2004

Considere $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ con $A : \Re \longrightarrow M_{n\times n}(\Re)$ continua no trivial y de periodo T, es decir, $A(t+T) = A(t)$ $\forall t$. Además $A(-t) = A(t)$ (impar). Sea $W(t)$ la matriz fundamental talque $W(0) = I$.
Prueba que:

(a) $W(t+T) = W(T)W(t)$ $\forall t$

(b) $W(-t) = W(t)$ $\forall t$

(c) $W(T)^2 = I$

(d) Todas las soluciones $X(t)$ del sistema son periodicas de perido $2T$

Solución

(a)
- Definamos $X_1(t), X_2(t)$ como:

$$X_1(t) = W(t+T)X_0$$

$$X_2(t) = W(t)W(T)X_0$$

- C.I.

$$X_1(0) = W(T)X_0$$
$$X_2(0) = W(0)W(T)X_0 = IW(T)X_0 = W(T)X_0$$

- Para $X_1(t)$ tenemos:

$$\dot{X}_1(t) = \dot{W}(t+T)X_0 = A(t+T)W(t+T)X_0$$
$$= A(t)W(t+T)X_0$$
$$= A(t)X_1(t)$$

Para $X_2(t)$ tenemos:

$$\dot{X}_2(t) = \dot{W}(t)W(T)X_0 = A(t)W(t)W(T)X_0$$
$$= A(t)X_2(t)$$

- Como $X_1(t)$ y $X_2(t)$ cumplen el mismo sistema con las mismas condiciones iniciales y además $A(t)$ es continua, por teorema de existencia y unicidad, se concluye que:

$$W(t+T)X_0 = W(t)W(T)X_0$$

  Como X_0 es un vector cualquiera, si $X_0 \neq 0$, multiplicando por $\frac{X_0}{\|X_0\|}$ obtenemos:

$$W(t+T) = W(t)W(T)$$

(b)
- Sean $X_1(t) = W(t)X_0$, $X_2(t) = W(-t)X_0$ con $X_0 \in \Re^n$ cualquiera talque $X_0 \neq 0$
- $$X_1(0) = IX_0 = X_0$$
$$X_2(0) = IX_0 = X_0$$
- $$\dot{X}_1(t) = \dot{W}(t)X_0 = A(t)W(T)X_0 = A(t)X_1(t)$$
$$\dot{X}_2(t) = \dot{W}(-t)X_0 = -A(-t)W(-t)X_0 = A(t)X_2(t)$$
- Por el mismo argumento de la parte (a) se puede concluir que $W(t) = W(-t)$

(c) Consideremos $W(T-T)$

$$W(T-T) = W(0) = I$$
$$W(T+(-T)) = W(T)W(-T)$$
$$= W(T)W(T)$$
$$= W(T)^2$$

Por lo tanto $W(T)^2 = I$

(d) Sea $X(t) = W(t)X_0$ con $X_0 \in \Re^n$ cualquiera talque $X_0 \neq 0$. Entonces

$$X(t+2T) = W(t+2T)X_0$$
$$= W(t)W(2T)X_0$$
$$= W(t)W(T+T)X_0$$
$$= W(t)W(T)^2X_0$$
$$= W(t)IX_0$$
$$= W(t)X_0$$
$$= X(t)$$

De esto se concluye que $X(t)$ es periodica de periodo $2T$