

# TEMA 9:

## ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN N

### 1. DEFINICIÓN Y TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.

Se trata ahora de extender al orden  $n$  los resultados vistos, relativos a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

*Una ecuación diferencial lineal de orden  $n$* , es una ecuación de la forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x)$$

o en forma canónica:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = h(x) \quad [1]$$

que en forma simbólica se escribirá:  $L[y] = h(x)$

siendo  $L$  el operador lineal:  $L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x)$

La correspondiente *ecuación diferencial lineal homogénea o incompleta* es :

$$L[y] = 0 \quad [2]$$

La teoría asociada a estas ecuaciones es análoga al caso en que  $n=2$ . Por ello *se van a citar únicamente, sin efectuar demostraciones, las generalizaciones al orden  $n$  de los resultados estudiados en los temas 6, 7 y 8.*

El teorema de existencia y unicidad es ahora:

### Teorema

Si las  $p_i(x)$  ( $i=1,\dots,n$ ) y  $h(x)$  son continuas en  $I=(a,b)$ , entonces, cualesquiera que sean  $x_0 \in I$  e  $y_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathcal{R}$ , existe en todo  $I$  una y solo una solución  $y=v(x)$  del problema de valor inicial:

$$L[y] = h(x) \quad \text{con} \quad \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} \quad [3]$$

Se supondrá en lo sucesivo que las ecuaciones lineales utilizadas cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad en un intervalo  $I=(a,b)$ .

Se verifica:

*El operador  $L$  es una aplicación lineal del espacio vectorial  $C^n(I)$  en el espacio vectorial  $C(I)$ .*

## 2. ECUACIÓN HOMOGÉNEA.

2.1.- *El conjunto  $S$  de soluciones en  $I$  de la ecuación homogénea  $L[y] = 0$ , de orden  $n$ , es un espacio vectorial de dimensión  $n$ , subespacio vectorial de  $C^n(I)$ .*

2.2.- *Si  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \in S$  y son linealmente independientes en  $I$ , entonces la solución general de  $L[y] = 0$  es:*

*$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$   $x \in I$  con  $C_1, C_2, \dots, C_n$  constantes arbitrarias.*

2.3.- Condición necesaria y suficiente para que  $n$  soluciones particulares  $y_1, \dots, y_n$  de la ecuación lineal homogénea  $L[y] = 0$ , sean linealmente independientes en  $I$ , es que  $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0 \quad \forall x \in I$ , siendo:

$$W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad [4] \text{ el wronskiano de } y_1, \dots, y_n.$$

2.4.- La fórmula de Abel-Liouville es :

$$W[y_1, \dots, y_n] = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt} \quad [5]$$

2.5.- Si  $y_1(x)$  es una solución no trivial de  $L[y] = 0$ , el cambio de función  $y = y_1 u$  reduce la ecuación a otra lineal homogénea de orden  $n-1$ , en la variable dependiente

$$v = \frac{du}{dx}.$$

### 3. ECUACIÓN HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES.

Se considera ahora la ecuación:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad [6]$$

con coeficientes constantes y  $a_0 \neq 0$ . Su ecuación característica es:

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Con un estudio análogo al visto en el caso de ecuaciones de 2º orden, se obtiene:

3.1.- Caso 1º:  $P(r) = 0$  tiene  $n$  raíces distintas  $r_1, \dots, r_n$

Entonces son soluciones de [6] linealmente independientes en  $\mathfrak{R}$  las:

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}$$

La solución general es:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$$

### **3.2.- Caso 2º: $P(r) = 0$ tiene $k$ raíces distintas $r_1, \dots, r_k$ con multiplicidades $m_1, \dots, m_k$ ( $m_1 + \dots + m_k = n$ )**

Entonces son soluciones de [6] linealmente independientes en  $\mathfrak{R}$  las :

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{r_1 x}; \dots; e^{r_k x}, x e^{r_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{r_k x}$$

### **3.3.- Caso 3º: $P(r) = 0$ tiene raíces complejas.**

Por cada raíz compleja  $r = \alpha + \beta i$  y su conjugada  $r = \alpha - \beta i$ , ambas con multiplicidad  $m$ , son soluciones linealmente independientes en  $\mathfrak{R}$  las :

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

## **4. ECUACIÓN COMPLETA.**

En el caso general de una ecuación completa  $\boxed{L[y] = h(x)}$  de orden  $n$ , análogamente al caso en que  $n=2$ , se verifica:

**4.1.-** Es válido el principio de superposición.

**4.2.-** La solución general de dicha ecuación completa es:

$$y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_p(x)$$

siendo  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  soluciones linealmente independientes en  $I$  de la correspondiente ecuación homogénea,  $y_p(x)$  una solución particular de la completa y  $C_1, \dots, C_n$  constantes arbitrarias.

**4.3.-** El método de variación de las constantes es la extensión del procedimiento visto para el caso en que  $n = 2$ .

**4.4.-** En el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, para obtener una solución particular de la ecuación completa, puede usarse el método de coeficientes indeterminados si  $h(x)$  es de ciertos tipos, siendo válida la Tabla citada en el Tema 8 para  $n=2$ , sin más que considerar que ahora  $m$  puede tomar valores entre 0 y  $n$ .

**4.5.-** También puede aplicarse la reducción de orden a la ecuación completa, efectuando el cambio  $y = y_1 u$ , seguido de  $u' = v$ , siendo  $y_1$  una solución particular de la correspondiente ecuación homogénea.

## **5. EJEMPLOS.**

**5.1.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial:**

$$8y''' - 12y'' + 6y' - y = 0$$

Es una ecuación diferencial lineal homogénea, de tercer orden. con coeficientes constantes.

La ecuación característica es:  $8r^3 - 12r^2 + 6r - 1 = 0$ , es decir:  $(2r - 1)^3 = 0$ .  
Sus única raíz es:  $r_1 = 1/2$  con multiplicidad 3.

Luego la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{x/2} (A + Bx + Cx^2)$$

**5.2.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial:  $y''' + 9y' = 2 \operatorname{sen} 2x$**

Es una ecuación diferencial lineal completa, de tercer orden. con coeficientes constantes.

La ecuación característica es:  $r^3 + 9r = 0$ , es decir:  $r(r^2 + 9) = 0$ .

Sus raíces son:  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 3i$ ,  $r_3 = -3i$ .

Luego la solución general de la correspondiente ecuación homogénea es:

$$y_H = A + B \cos 3x + C \operatorname{sen} 3x$$

Por el método de coeficientes indeterminados, se probaría como solución particular de la ecuación completa dada, una de la forma:

$$y_p = a \cos 2x + b \operatorname{sen} 2x$$

Entonces:

$$\begin{aligned}y_p &= a \cos 2x + b \sin 2x \\y_p' &= -2b \cos 2x + 2a \sin 2x \\y_p'' &= 4b \cos 2x - 4a \sin 2x \\y_p''' &= -4b \sin 2x - 4a \cos 2x\end{aligned}$$

Luego:

$$y_p''' - y_p' = 10b \cos 2x - 10a \sin 2x = 2 \sin 2x$$

Es decir:  $b = 0$ ,  $a = -1/5$ , e  $y_p = -1/5 \cos 2x$

La solución general es por tanto:

$$y = A + B \cos 3x + C \sin 3x - (1/5) \cos 2x$$

### 5.3.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial: $y''' - y' = 2e^x$

Es una ecuación diferencial lineal completa, de tercer orden. con coeficientes constantes.

La ecuación característica es:  $r^3 - r = 0$ , es decir:  $r(r+1)(r-1) = 0$ .

Sus raíces son:  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = -1$ .

Luego la solución general de la correspondiente ecuación homogénea es:

$$y_H = A + B e^x + C e^{-x}$$

Por el método de coeficientes indeterminados, se probaría como solución particular de la ecuación completa dada, una de la forma:

$$y_p = a x e^x$$

Entonces:

$$\begin{aligned}y_p &= a x e^x \\y_p' &= a e^x (x + 1) \\y_p'' &= a e^x (x + 2) \\y_p''' &= a e^x (x + 3)\end{aligned}$$

Luego:

$$y_p''' - y_p' = 2a e^x = 2 e^x$$

Es decir:  $a = 1$ , e  $y_p = x e^x$

La solución general es por tanto:

$$y = A + B e^x + C e^{-x} + x e^x$$

### 5.4.- Sea la ecuación diferencial lineal:

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 5e^{2x} - 2 + 12\cos 2x + 10e^x \sin x$$

**Se pide:** a) *Escribir la solución general de la correspondiente homogénea.*

b) *¿Qué tipo de solución particular de la ecuación dada se probaría por el método de coeficientes indeterminados?*

a) Es una ecuación diferencial lineal completa, de tercer orden. con coeficientes constantes.

La ecuación característica es:  $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0$ , es decir:  $(r - 2)(r^2 + 1) = 0$ .

Sus raíces son:  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = i$ ,  $r_3 = -i$ .

Luego la solución general de la correspondiente ecuación homogénea es:

$$y_H = A e^{2x} + B \cos x + C \sin x$$

b) Por el método de coeficientes indeterminados, se probaría como solución particular de la ecuación completa dada, una de la forma:

$$y_p = a x e^{2x} + b + c \cos 2x + d \sin 2x + e^x (f \sin x + g \cos x)$$

**5.5- Hallar la ecuación  $y = y(x)$  de la curva que satisface a la ecuación diferencial:**

$$y''' + 3y'' + 2y' = 4x + 10$$

**y cuya gráfica tiene al eje OX como tangente de inflexión en el origen.**

Es una ecuación diferencial lineal completa, de tercer orden. con coeficientes constantes.

La ecuación característica es:  $r^3 + 3r^2 + 2r = 0$ , es decir:  $r(r + 1)(r + 2) = 0$ .

Sus raíces son:  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = -1$ ,  $r_3 = -2$ .

Luego la solución general de la correspondiente ecuación homogénea es:

$$y_H = A + B e^{-x} + C e^{-2x}$$

Por el método de coeficientes indeterminados, se probaría como solución particular de la ecuación completa dada, una de la forma:  $y_p = x(ax + b)$

Entonces:

$$\begin{aligned} y_p &= a x^2 + b x \\ y_p' &= 2 a x + b \\ y_p'' &= 2 a \\ y_p''' &= 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$y_p''' + 3y_p'' + 2y_p' = 6a + 2(2ax + b) = 4x + 10$$

Es decir:  $4a = 4$ , y  $6a + 2b = 10$ . Por tanto:  $a = 1$ ,  $b = 2$ , e  $y_p = x^2 + 2x$

La solución general es por tanto:

$$\underline{y = A + B e^{-x} + C e^{-2x} + x^2 + 2x}$$

Sus derivadas:

$$\begin{aligned} y' &= -B e^{-x} - 2C e^{-2x} + 2x + 2 \\ y'' &= B e^{-x} + 4C e^{-2x} + 2 \end{aligned}$$

Las condiciones geométricas indicadas, significan que se busca la solución  $y = y(x)$  tal que:  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$  Es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + C & A &= -4 \\ 0 &= -B - 2C + 2 & \text{De donde: } B &= 6 \\ 0 &= B + 4C + 2 & C &= -2 \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de la curva buscada es:

$$\boxed{y = 6 e^{-x} - 2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 4}$$

**5.6- Dada la ecuación diferencial lineal completa:  $y''' + y'' + y' + y = h(x)$**

**escribir la solución general de la correspondiente homogénea y el formato de solución particular  $y_p$  de la completa, que se probaría por el método de coeficientes indeterminados, en los distintos casos de  $h(x)$  que se indican:**

- a)  $h(x) = 3 \cos 2x$
- b)  $h(x) = x^2 e^{-x} + e^x$
- c)  $h(x) = 1 + x \sen x$
- d)  $h(x) = x(e^{2x} + 1)$

Es  $r^3 + r^2 + r + 1 = 0$ , es decir:  $(r + 1)(r^2 + 1) = 0$ . Raíces:  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = i$ ,  $r_3 = -i$ .

Solución general de la homogénea:  $y_H = A e^{-x} + B \cos x + C \sen x$

Solución particular de la completa en los distintos casos:

- a)  $y_p = a \cos 2x + b \sen 2x$
- b)  $y_p = x(a x^2 + b x + c) e^{-x} + d e^x$
- c)  $y_p = a + x [(b x + c) \cos x + (d x + g) \sen x]$
- d)  $y_p = (a x + b) e^{2x} + c x + d$