

## **4.- OTRAS CUESTIONES.**

### **4.1.- REDUCCIÓN DE ORDEN.**

El método de reducción de orden visto para las ecuaciones lineales homogéneas, puede aplicarse igualmente a las ecuaciones lineales completas  $y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$ .

**La sustitución**  $y = y_1(x)u$  **donde  $y_1(x)$  es una solución particular de la correspondiente ecuación homogénea**, reduce la ecuación completa a otra completa **de primer orden**, en la variable dependiente  $v = \frac{du}{dx}$

#### **Ejemplo 14:**

***Resolver la ecuación:  $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3$ , buscando por inspección una solución particular de la correspondiente homogénea.***

Es evidente que  $y_1 = x$  es una solución particular de la correspondiente homogénea.

Efectuando el cambio  $y = xu$ , resulta:

$$y = x u$$

$$y' = u + x u'$$

En la ecuación completa:

$$y'' = 2u' + x u''$$

$$x^2 [2u' + x u''] - x(x+2)(u + x u') + (x+2)xu = x^3$$

$$\text{Luego: } x^3 u'' - x^3 u' = x^3, \quad \text{es decir: } u'' - u' = 1$$

$$\text{Tomando } \underline{u' = v}, \text{ es } \underline{v' - v = 1}. \quad \text{Luego: } v = C_1 e^x - 1$$

$$\text{Por tanto: } u = C_1 e^x - x + C_2.$$

$$\text{Es decir: } \boxed{y = C_1 x e^x - x^2 + C_2 x}$$

También podría resolverse la correspondiente homogénea usando el método de reducción de orden y buscando luego una solución particular de la completa por el método de variación de las constantes.

### **Ejemplo 15:**

**Resolver la ecuación:**  $y'' \operatorname{sen}^2 x - 3y' \operatorname{sen} x \cos x + (1 + 2 \cos^2 x)y = 3 \cos x$   
**sabiendo que una solución particular de la correspondiente homogénea es  $y_1 = \operatorname{sen} x$**   
**y una particular de la completa  $y_p = \cos x$**

Evidentemente la solución general buscada tendrá la forma:  $y = A \operatorname{sen} x + B y_2 + \cos x$   
Basta buscar otra solución particular  $y_2$  de la homogénea. Para ello se empleará la reducción de orden en la homogénea, pues ya se conoce una solución particular de la completa.

Cambio en la homogénea:  $y = u \operatorname{sen} x$ . Resulta:

$$y = u \operatorname{sen} x$$

$$y' = u \cos x + u' \operatorname{sen} x$$

$$y'' = 2u' \cos x - u \operatorname{sen} x + u'' \operatorname{sen} x$$

Sustituyendo en la ecuación  $L[y] = 0$ :

$$(\operatorname{sen}^3 x)u'' + (2 \operatorname{sen}^2 x \cos x - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x)u' = 0 \Rightarrow (\operatorname{sen} x)u'' - (\cos x)u' = 0$$
$$\underline{u' = v} \quad \underline{(\operatorname{sen} x)v' - (\cos x)v = 0} \quad \frac{v'}{v} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow v = ae^{\ln|\operatorname{sen} x|}$$

$v = a \cdot \operatorname{sen} x$  Una solución particular será:  $v = \operatorname{sen} x$ . Luego  $u_1 = \cos x$

Y por tanto:  $y_2 = u_1 \operatorname{sen} x = \cos x \operatorname{sen} x$

La solución general de la homogénea será:  $y_H = A \operatorname{sen} x + B \cos x \operatorname{sen} x$

Y la solución general de la ecuación dada:  $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x \operatorname{sen} x + \cos x$

## **4.2.- ECUACIONES DE EULER COMPLETAS.**

Ya se vió que las ecuaciones de Euler-Cauchy homogéneas  $a_0 x^2 y'' + a_1 xy' + a_2 y = 0$ , se reducían a ecuaciones lineales con coeficientes constantes, mediante el cambio  $|x| = e^t$ .

El método es también válido para la ecuación de Cauchy-Euler completa:

$$a_0 x^2 y'' + a_1 xy' + a_2 y = g(x)$$

Puede resolverse la homogénea correspondiente, mediante el cambio  $|x| = e^t$ , y luego resolver la completa por el método de variación de las constantes. O bien, efectuar el cambio en la ecuación completa.

### **Ejemplo 16:**

**Resolver la ecuación :**  $x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2$

a) Cambio en la completa:  $|x| = e^t$  ó  $t = \ln |x|$

Para  $x > 0$

$$\left. \begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \dot{y} \frac{1}{x} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \ddot{y} \frac{1}{x^2} - \dot{y} \frac{1}{x^2} \end{aligned} \right\} \text{ En la completa: } (\ddot{y} - \dot{y}) + \dot{y} - 4y = 4e^{2t} \Rightarrow \ddot{y} - 4y = 4e^{2t}$$

Solución general de la homogénea:  $y_H(t) = A e^{2t} + B e^{-2t}$

Solución de la completa: Se prueba una solución de la forma:  $y_p = a t e^{2t}$

Entonces: 
$$\begin{cases} y_p = a e^{2t} (2t + 1) \\ \dot{y}_p = a e^{2t} (4t + 4) \end{cases}$$

Y substituyendo en la ecuación:  $\ddot{y} - 4y = 4 e^{2t}$ , resulta:

$$a e^{2t} [4t + 4 - 4t] = 4 e^{2t} \Rightarrow a = 1$$

Luego:  $y_p = t e^{2t}$ . Por tanto:  $y(t) = A e^{2t} + B e^{-2t} + t e^{2t}$

De donde:

$$\boxed{y(x) = A x^2 + \frac{B}{x^2} + x^2 \ln|x| \quad x \neq 0}$$

### b) Cambio en la homogénea

Efectuando el cambio  $|x| = e^t$  se resolvería la ecuación homogénea, obteniéndose

$$y_H(x) = A x^2 + \frac{B}{x^2}$$

Y aplicando ahora el método de variación de las constantes, se obtendría la solución general de la completa.

### 4.3.- OTROS MÉTODOS PARA RESOLVER LA ECUACIÓN COMPLETA.

Además del método de variación de las constantes o el de coeficientes indeterminados, existen otros métodos como el de los anuladores o el de operadores, para buscar una solución particular de la ecuación lineal completa.

Así, en el caso de coeficientes constantes, el método de operadores actúa como se ve en el ejemplo siguiente:

#### Ejemplo 17:

Sea la ecuación diferencial :  $L[y] = y'' - y' - 2y = e^x$

Podría escribirse  $y' = Dy$   $y'' = D^2y$  y entonces  $L[y] = (D^2 - D - 2)y$  o mejor  $L[y] = (D+1)(D-2)y$ . La ecuación es:

$$(D + 1)(D - 2)y = e^x$$

Sea  $u = (D-2)y$ . Entonces, resolver la ecuación diferencial dada equivale a resolver las dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (D+1)u = e^x \\ (D-2)y = u \end{array} \right. \\ \hline (D+1)u = e^x \Rightarrow u' + u = e^x \Rightarrow u = ae^{-x} + \frac{e^x}{2} \\ (D-2)y = u \Rightarrow y' - 2y = ae^{-x} + \frac{e^x}{2} \\ \hline \end{array}$$

En ésta es:  $y_H = b e^{2x}$ . Y para la completa, se prueba :  $y_p = A e^{-x} + B e^x$

Entonces:  $y_p' = -A e^{-x} + B e^x$ . Y sustituyendo en la completa:

$$-3Ae^{-x} - Be^x = ae^{-x} + \frac{e^x}{2} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{a}{3} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_p = -\frac{a}{3}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x$$

Por tanto:  $y = be^{2x} - \frac{a}{3}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x$

Es decir:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^x$$