

3. MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Es un método para hallar una solución particular de la ecuación lineal completa [2], que consiste fundamentalmente en intuir la forma de una solución particular, formato que en general tendrá coeficientes desconocidos. Si el formato es adecuado, tras sustituir en la ecuación diferencial, se obtienen tales coeficientes. La utilidad del método dependerá de la habilidad para descubrir tal formato, a la vista de la ecuación.

No pueden darse reglas en el caso de ecuaciones lineales con coeficientes variables, pero sí en el caso de coeficientes constantes y el 2º miembro $h(x)$ de la ecuación de algunos tipos especiales.

Antes de dar unas reglas, se consideran algunos ejemplos para motivar el método.

Ejemplo 8

Hallar una solución particular de: $y'' + 2y' + 3y = 6x + 1$.

Obsérvese que al aplicar $L = \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 3$ a cualquier polinomio de primer grado, se obtiene otro polinomio de 1º grado. Por tanto es lógico considerar una solución de la forma $y_p = Ax + B$. Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$L[y_p] = 0 + 2A + 3(Ax + B) = 3Ax + (2A + 3B)$$

y_p será solución si: $3Ax + (2A + 3B) = 6x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Por tanto: $\begin{cases} 3A = 6 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$ Luego: $y_p = 2x - 1$

Ejemplo 9:

Hallar una solución particular de $y'' + 2y' = 4x + 8$

Si se actúa como en el caso anterior, se probaría una solución particular, de la forma $y_p = Ax+B$.

Resulta: $L[y_p] = 0 + 2A$ que no puede identificarse con $4x+8$.

Esto es debido a que, al no existir término en y en el primer miembro de la ecuación, cuando se aplica el operador L a un polinomio $P_m(x)$ de grado m se obtiene otro polinomio de grado $m-1$. Por tanto para obtener un polinomio de 1^{er} grado, habrá de probarse un polinomio de 2^o grado, con cualquier término independiente (p.ej.: 0).

Por ello se probará una y_p de la forma: $y_p = Ax^2+Bx = x(Ax+B)$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$L[y_p] = 4x + 8 \quad \Rightarrow \quad 2A + 2(2Ax + B) = 4x + 8 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por tanto: } \begin{cases} 4A = 4 \\ 2A + 2B = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases} \quad \text{Luego: } \boxed{y_p = x^2 + 3x}$$

Ejemplo 10:

Hallar la solución general de: $y'' - 3y' - 4y = 6e^{2x}$

Ecuación característica de la correspondiente homogénea: $r^2 - 3r - 4 = 0$:

Raíces: $r_1 = 4$ $r_2 = -1$

Solución general de la homogénea: $y_H = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$

Puesto que las derivadas de e^{2x} son múltiplos de e^{2x} , parece lógico probar como solución particular $y_p = A e^{2x}$.

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$L[y_p] = 6e^{2x} \quad \Rightarrow \quad (4A - 6A - 4A) e^{2x} = 6e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por tanto: } A = -1 \quad \text{e} \quad y_p = -e^{2x}$$

Luego la solución general es:

$$\boxed{y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - e^{2x}}$$

Ejemplo 11:

Hallar una solución particular de $y'' - 3y' - 4y = 5e^{-x}$

Actuando como en el caso anterior y probando $y_p = A \cdot e^{-x}$, al sustituir en la ecuación diferencial, resulta:

$L[y_p] = Ae^{-x} + 3Ae^{-x} - 4Ae^{-x} = 0$, lo que muestra que $A e^{-x}$ es solución de la correspondiente homogénea. Luego no puede serlo de la completa.

Si se prueba $y_p = A \cdot x e^{-x}$, resulta: $y_p' = A e^{-x} (1 - x)$, $y_p'' = A e^{-x} (x - 2)$

Luego: $L[y_p] = A e^{-x} [(x - 2) - 3(1 - x) - 4x] = -5A e^{-x}$

Por tanto y_p será solución si $A = -1$. Es decir:

$$y_p = -x e^{-x}$$

Nota:

En general: Sea una ecuación diferencial de coeficientes constantes $L[y] = a e^{\alpha x}$ con polinomio característico $P(r)$.

- Si α no es raíz de $P(r) = 0$ se probaría una solución particular de la forma:

$$y_p = A e^{\alpha x}.$$

Entonces: $L[A e^{\alpha x}] = A P(\alpha) e^{\alpha x} = A e^{\alpha x} \Rightarrow A = \frac{a}{P(\alpha)}$ Luego $y_p = \frac{a}{P(\alpha)} e^{\alpha x}$

- Si α es raíz simple de $P(r) = 0$, se prueba $y_p = A x e^{\alpha x}$, pues:

$$\begin{aligned} L[A x e^{\alpha x}] &= A \cdot L\left[\frac{d}{d\alpha} e^{\alpha x}\right] = A \frac{d}{d\alpha} L[e^{\alpha x}] = A \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha x} P(\alpha) = A e^{\alpha x} [x P(\alpha) + P'(\alpha)] = \\ &= A P'(\alpha) e^{\alpha x} \Rightarrow A = \frac{a}{P'(\alpha)} \end{aligned}$$

Pero por ser α raíz simple de $P(r) = 0$, resulta: $P(r) = (r - \alpha) P_1(r)$ con $P_1(\alpha) \neq 0$.

Como : $P'(r) = P_1(r) + (r - \alpha) P_1'(r)$, se deduce que $P'(\alpha) = P_1(\alpha)$.

Por tanto, en este caso:

$$A = \frac{a}{P_1(\alpha)}$$

De donde:

$$y_p = \frac{a}{P_1(\alpha)} x e^{\alpha x}$$

Siguiendo la línea de los ejemplos, pueden darse unas reglas para escoger el modelo de solución particular a probar, en el caso de **ecuaciones lineales con coeficientes constantes y con 2º miembro $h(x)$ de forma polinómica, exponencial, seno, coseno o producto de estos dos tipos.** Dichas reglas se van a describir, sin desarrollar su demostración, inspirada en las consideraciones hechas en los ejemplos anteriores.

En la tabla que sigue, se enumeran diversas formas de $h(x)$ y las correspondientes formas de la solución particular y_p a probar por el método de coeficientes indeterminados:

TABLA. Forma de una solución particular $y_p(x)$ de $L[y] = h(x)$, cuando la ecuación tiene coeficientes constantes; siendo su polinomio característico $P(r)$ y p_p, q_p, P_p, Q_p , polinomios de grado p .

a)
$$h(x) = p_p(x) = a_p x^p + \dots + a_0 \Rightarrow y_p(x) = x^m P_p(x) = x^m [A_p x^p + \dots + A_0].$$

siendo m la multiplicidad de $r = 0$ como raíz de $P(r) = 0$

b)
$$h(x) = a e^{\alpha x} \Rightarrow y_p(x) = A x^m e^{\alpha x}$$

siendo m la multiplicidad de $r = \alpha$ como raíz de $P(r) = 0$

c)
$$h(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x \Rightarrow y_p(x) = x^m [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

siendo m la multiplicidad de $r = \beta i$ como raíz de $P(r) = 0$ (Incluye caso $a=0$ ó $b=0$).

d)
$$h(x) = p_p(x) e^{\alpha x} \Rightarrow y_p(x) = x^m P_p(x) e^{\alpha x}$$

siendo m la multiplicidad de $r = \alpha$ como raíz de $P(r) = 0$

e)
$$h(x) = p_p(x) \cos \beta x + q_q(x) \sin \beta x \Rightarrow y_p(x) = x^m [P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x]$$

siendo m la multiplicidad de $r = \beta i$ como raíz de $P(r) = 0$ y $s = \max\{p, q\}$

f)
$$h(x) = a e^{\alpha x} \cos \beta x + b e^{\alpha x} \sin \beta x \Rightarrow y_p(x) = x^m e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

siendo m la multiplicidad de $r = \alpha + \beta i$ como raíz de $P(r) = 0$ (Incluye caso $a=0$ ó $b=0$).

g)
$$\begin{aligned} h(x) &= p_p(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + q_q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p(x) &= x^m e^{\alpha x} [P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x] \end{aligned}$$

siendo m la multiplicidad de $r = \alpha + \beta i$ como raíz de $P(r) = 0$ y $s = \max\{p, q\}$

Además puede considerarse también el caso en que $h(x)$ es suma de los modelos antes citados. Basta usar el principio de superposición.

Los distintos tipos de funciones $h(x)$ que intervienen en la tabla, son casos particulares del último y más general:

$$p_p(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + q_q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

donde $p_p(x)$ y $q_q(x)$ son polinomios de grados p, q respectivamente.

La validez del método se apoya en que los $h(x)$ considerados son tales que al aplicarles L se obtiene una función del mismo tipo.

Ejemplo 12:

Hallar la solución general de: $y'' + y' - 2y = (6x + 2)e^x + 20 \cos 2x$

Ecuación característica de la homogénea: $r^2 + r - 2 = 0$ Raíces: $r_1 = 1$, $r_2 = -2$.

Solución general de la homogénea: $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

Según las normas de la tabla y el principio de superposición se prueba:

$$y_p = x(Ax + B)e^x + C \cos 2x + D \sin 2x$$

Entonces: $y'_p = e^x [Ax^2 + (B + 2A)x + B] + 2D \cos 2x - 2C \sin 2x$

$$y''_p = e^x [Ax^2 + (B + 4A)x + (2B + 2A)] - 4C \cos 2x - 4D \sin 2x$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$e^x [6Ax + (3B + 2A)] + (2D - 6C) \cos 2x - (6D + 2C) \sin 2x = (6x + 2)e^x + 20 \cos 2x$$

$$\text{Luego: } \begin{cases} 6A = 6 \\ 3B + 2A = 2 \\ 2D - 6C = 20 \\ 6D + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -3 \\ D = 1 \end{cases} \Rightarrow y_p = x^2 e^x - 3 \cos 2x + \sin 2x$$

Solución general: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + x^2 e^x - 3 \cos 2x + \sin 2x$

Otra forma:

Por el principio de superposición, sería solución particular y_p de la ecuación dada, la suma de soluciones particulares y_p^1 e y_p^2 correspondientes a las ecuaciones:

$$L[y] = (6x + 2)e^x \quad y \quad L[y] = 20 \cos 2x$$

- Para obtener y_p^1 , se procedería como antes, probando una solución del tipo: $y_p^1 = x(Ax + B)e^x$, obteniéndose $y_p^1 = x^2 e^x$.

- Para obtener y_p^2 , teniendo en cuenta que $\cos 2x$ es la parte real de e^{2ix} , se buscaría una solución particular de $L[y] = 20 e^{2ix}$ y se tomaría la parte real de la misma. Así pues, para esta última ecuación se prueba: $y_p^* = C e^{2ix}$.

Sustituyendo en la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = 20 e^{2ix}$, se obtiene:

$$L[y_p^*] = C e^{2ix} [-4 + 2i - 2] = 20 e^{2ix}.$$

Luego: $C(2i - 6) = 20$ y $C = \frac{10}{i-3} = 10 \frac{i+3}{-10} = -3 - i$. Resulta: $y_p^* = -(3+i) e^{2ix}$.

Por tanto: $y_p^2 = \operatorname{Re} y_p^* = \operatorname{Re} : -(3+i) e^{2ix} = \operatorname{Re} [-(3+i) (\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)]$, es decir:
 $y_p^2 = -3 \cos 2x + \operatorname{sen} 2x$

La solución particular de la ecuación dada sería: $y_p = x^2 e^x - 3 \cos 2x + \operatorname{sen} 2x$

Ejemplo 13:

¿Qué forma se probaría como solución particular de la ecuación diferencial:
 $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + x e^x + 2 e^{2x} + x^2 + x \cos x + \operatorname{sen} 2x$?

Ecuación característica de la homogénea:

$$r^2 - 3r + 2 = 0. \quad \text{Raíces: } r_1 = 1 \quad r_2 = 2. \quad \text{Luego } y_H = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Como solución particular según las reglas dadas se probaría:

$y_p = A e^{3x} + x(Bx + C) e^x + Dx e^{2x} + E x^2 + F x + G + (Hx + I) \cos x + (Jx + K) \operatorname{sen} x + L \cos 2x + M \operatorname{sen} 2x$
--