EDO

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Primavera 2005
Matemática aplicada
Universidad de Chile

1 Introducción, definiciones y ejemplos de EDO 3
1.1 Introducción 3
1.2 Definiciones 3
1.2.1 Ecuación diferencial ordinaria explícita 4
1.2.2 Ecuación diferencial ordinaria implícita 4
1.2.3 Ecuación diferencial ordinaria lineal 4
1.2.4 Ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea 4
1.2.5 Ecuación diferencial ordinaria exacta de primer orden 5
1.2.6 Problema de Cauchy o de valores iniciales 5
1.3 Ejemplos 5
1.3.1 Desintegración de elementos radioactivos 5
1.3.2 Circuito eléctrico 6
1.3.3 Mecánica 7
2 EDO explícitas de orden 1 : $y' = f(x, y)$ 9
2.1 Definición y propiedades 9
2.2 EDO explícita de la forma: $y' = f(x)$ 9
2.3 EDO explícita de orden 1 de variables separadas : $Q(y)y' = -P(x)$ 9
2.4 EDO reducibles a ecuaciones de variables separadas 10
2.5 EDO explícita de la forma : $y' = f(ax + by)$ 12
2.6 EDO explícita de la forma : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, o homogénea 13
2.7 EDO explícita de la forma : $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$ 15
2.8 EDO de la forma : $y' = f(x, y)$ con f tal que $f(\lambda x, \lambda^\alpha y) = \lambda^{\alpha-1} f(x, y)$ 19
2.9 EDO homogénea de grado k 19
2.10 EDO de la forma : $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 21
2.10.1 EDO exacta y función potencial 21
2.10.2 EDO no exacta y factores integrantes 25
2.11 EDO lineales de primer orden: $y' + a(x)y = b(x)$ 28
2.11.1 Con un factor integrante 28
2.11.2 Método de '*variación de la constante*' 29
2.11.3 Resolviendo con la suma de la solución general más una solución particular 30

2.11.4 Resolviendo una descomposición $y(x)=u(x).v(x)$ 30
2.12 Ecuación de Bernoulli: $y'+a(x)y+b(x)y^{\alpha}=0$ 34
2.13 Ecuación de Riccati: $y'+a(x)y+b(x)y^{2}=c(x)$ 36
2.14 Ecuación de la forma: $y'=f(x,y)$ 37
2.15 Teorema de existencia y unicidad de soluciones: 38
2.15.1 Ecuación de orden 1: 38
2.15.2 Ecuación lineal de orden 1: 46
3 EDO implícitas de orden 1 : $F\left(x,y,y'\right)=0$ 48
3.1 EDO de la forma :
$\left(y'\right)^{n}+a_{1}(x,y)\left(y'\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x,y)y'+a_{n}(x,y)=0$ 48
3.2 Envolvente 49
3.3 Ecuación de la forma: $y=f\left(x,y'\right)$ 50
3.3.1 Ecuación de la forma $y=f\left(y'\right)$ 50
3.3.2 Ecuación de Lagrange 52
3.3.3 Ecuación de Clairaut 53
3.4 EDO de la forma : $x=f\left(y,y'\right)$ 58
3.4.1 Ecuación de la forma: $x=f\left(y'\right)$ 59
3.4.2 Ecuación de la forma: $x+y\varphi\left(y'\right)+\psi\left(y'\right)=0$ 59
3.4.3 Ecuación de la forma: $x-\frac{y}{y'}+\psi\left(y'\right)=0$ 59
3.5 EDO de la forma : $F\left(y,y'\right)=0$ 60
3.6 EDO de la forma : $F\left(x,y'\right)=0$ 62
3.7 EDO de la forma : $F\left(\frac{y}{x},y'\right)=0$ 62
4 EDO implícitas en las que se puede reducir el orden 65
4.1 EDO de la forma : $F\left(x,y^{(k)},\cdots,y^{(n)}\right)=0 \quad con\, 1\le k\le n$ 65

Lunes 28.07.2003/Lunes 26.07.2004

1 Introducción, definiciones y ejemplos de EDO

1.1 Introducción

En el cálculo diferencial, uno define una función y que depende de una variable x.
El valor de la función y en el punto x es $y(x)$.
Su derivada $\frac{dy}{dx} = y'$ es también una función.
Por ejemplo, si $y(x) = e^{-x^2}$ entonces $\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = -2\,x\,e^{-x^2} = -2\,x\,y(x)$.

El problema que vamos a ver aquí no es de calcular derivadas de funciones, sino de hallar una función y que satisfaga la ecuación:

$$y'(x) = -2\,x\,y(x)$$

que vamos a llamar ecuación diferencial. Hallar tal función es resolver una ecuación diferencial.

Desde ahora, vamos a considerar solamente una variable x, así que muchas veces vamos a omitir el (x) en las expresiones de y, así que vamos a simplificar las notaciones de la manera siguiente:

$$y' = -2\,x\,y$$

1.2 Definiciones

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que relaciona una función y
y sus derivadas y', y'', ... con su variable independiente x.

y se llama la variable **dependiente**, x la variable **independiente**.

Se dice que una **ecuación diferencial** es **ordinaria** cuando la función y depende de una sola variable independiente x. La notaremos **EDO**.

Si la función y depende de más de una variable independiente, se define las derivadas parciales respecto a estas variables y se habla de **ecuaciones en derivadas parciales**.
Aquí solamente vamos a estudiar ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.2.1 Ecuación diferencial ordinaria explícita

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **explícita** cuando su expresión es del tipo:

$$(1.2.1.1) \qquad y^{(n)} = f\left[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)\right]$$

f es una función $f : D \subset R^{n+1} \to R$ donde D es un subconjunto (generalmente abierto) de R^{n+1}. **x** es una **variable independiente** (por ejemplo podría ser el tiempo)
y es una función n veces continuamente derivable: es la **variable dependiente**, solución de la EDO (1.2.1.1).

Tenemos la notación: $$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = y^{(n)}(x) = y^{\overbrace{'\cdots'}^{n\ veces}}(x)$$

donde **n** es el **<u>orden</u>** de la derivada más alta que aparece en la ecuación y se llama el **<u>orden de la ecuación diferencial</u>**.

1.2.2 Ecuación diferencial ordinaria implícita

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **<u>implícita</u>** cuando su expresión es del tipo:

$$(1.2.2.1) \qquad F\left[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right] = 0$$

F es una función $F : I \subset R^{n+2} \to R$ donde I es un subconjunto (generalmente abierto) de R^{n+2}.

1.2.3 Ecuación diferencial ordinaria lineal

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **<u>lineal</u>** cuando su expresión es del tipo:

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = g(x)$$

1.2.4 Ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **lineal <u>homogénea</u>** cuando $g(x) = 0$
Cuando tenemos una ecuación lineal, se llama **ecuación lineal homogénea asociada** la ecuación inicial en la que se ha hecho $g(x) = 0$. Veremos después la utilidad de tal denominación.

1.2.5 Ecuación diferencial ordinaria exacta de primer orden

Una EDO **exacta** de primer orden es una EDO explícita de la forma:

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

o sea:

$$\boxed{P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0}$$

que cumple $\boxed{P_y = Q_x}$ con $\begin{cases} P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ Q_x = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$.

1.2.6 Problema de Cauchy o de valores iniciales

Para resolver una EDO, hay que seguir dos etapas. Una primera etapa para encontrar una **solución general**, y una segunda etapa para encontrar una **solución particular**. Esta segunda etapa sirve para determinar la(s) constante(s) de integración que aparece(n) en el proceso de la primera etapa. Una solución particular puede corresponder a una condición inicial.

El **problema de Cauchy** consiste en encontrar una **solución completa** a una ecuación diferencial ordinaria (o sea una solución general más una solución particular).

1.3 Ejemplos

1.3.1 Desintegración de elementos radioactivos

Notemos N(t) el número de elementos radioactivos al instante t. Estos elementos se van a desintegrar con el tiempo. Suponemos que la variación de este número por unidad de tiempo decrece de manera proporcional al número N presente (no se sabe, pero es la manera más simple y natural de describir tal fenómeno).

$$dN(t) = -\lambda\, N(t)\, dt$$

que vamos a escribir de manera más simple:

$$(1.3.1.1) \qquad dN = -\lambda\, N\, dt \qquad \text{con } \lambda > 0$$

Ponemos un menos para decir que el número disminuye con el tiempo (decrecimiento).

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$$

Vamos a integrar: $\ln[N] = -\lambda\, t + Cste$

o sea: $N = e^{-\lambda t + Cste} = e^{Cste}\, e^{-\lambda t}$

Vamos a ver una manera de determinar la constante. Si conocemos el número inicial de elementos radioactivos, o sea si conocemos N al instante t = 0 y si lo denotamos N_0, vamos a tener:

$$N(t=0) = N_0 = e^{Cste}\, e^{-\lambda 0} = e^{Cste}$$

Entonces tenemos: $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$

Se llama **semi vida** T el tiempo requerido para reducir la población inicial de protones a la mitad, o sea para t = T, tenemos N (t = T) = N_0 / 2.

Entonces: $\dfrac{N_0}{2} = N_0\, e^{-\lambda T}$ o sea $T = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$

Otra manera de notar (1.3.1.1) es: $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$

o sea

$$\boxed{N' = -\lambda N} \quad \text{con } N' = \frac{dN}{dt}$$

Es una ecuación diferencial simple.

Vemos que en el proceso de resolución de la EDO, es necesario determinar una constante. Esta se puede conocer con **condiciones iniciales**. Pero en realidad, se podría de la misma manera determinar la constante con otras condiciones (no necesariamente iniciales).

Ejercicio: determinar en el ejemplo precedente el valor de la constante para un valor N de N_1 para el tiempo $t = 1/\lambda$. ¿Cual es la relación entre N_0 y N_1?

Respuesta:

$N(t = 1/\lambda) = N_1 = e^{Cste}\, e^{-\lambda/\lambda}$. Entonces: $N(t) = e\, N_1\, e^{-\lambda t}$ y $N_1 = \dfrac{N_0}{e}$

Es un ejemplo donde se determina la constante con una condición que es diferente de una condición inicial.

1.3.2 Circuito eléctrico

Capacitor (Condensador) C: $U_C = q$

Resistor (Resistencia) R: $U_R = R\, i = -R \dfrac{dq}{dt}$

Tenemos un circuito en serie de un resistor R, de un capacitor C. Suponemos que el capacitor se descarga en la resistencia. Tenemos $R \dfrac{dq}{dt} + q = 0$, o sea

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{R} q = 0$$

que es similar a la ecuación previa. Tenemos : $q(t) = q_0\, e^{-\frac{1}{R} t}$

Miércoles 28.07.2004

1.3.3 Mecánica

Resorte k: $\vec{F} = -k\,\vec{x}$ (es como el capacitor)

Si se aplica una fuerza F que se pone a un resorte de rigidez k, la variación de longitud del resorte respecto a la posición de equilibrio debido a esa fuerza será denotada x, entonces:
$\vec{F} = -k\,\vec{x}$

Amortiguamiento: $\vec{F} = -\lambda\,\vec{\dot{x}}$ (como el resistor)
Un amortiguamiento (damping en ingles) típico λ opone una resistencia proporcional a la velocidad relativa:

$$\vec{F} = -\lambda\,\vec{\dot{x}}$$

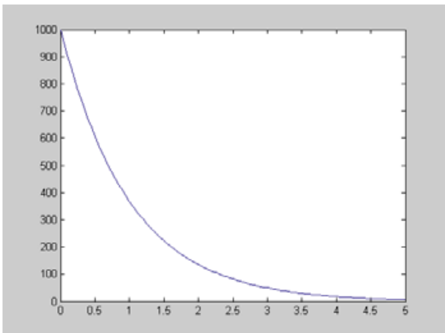
Al equilibrio: $\lambda \dfrac{dx}{dt} + k\,x = 0$. La solución es: $x(t) = x_0\, e^{-\frac{k}{\lambda}t}$

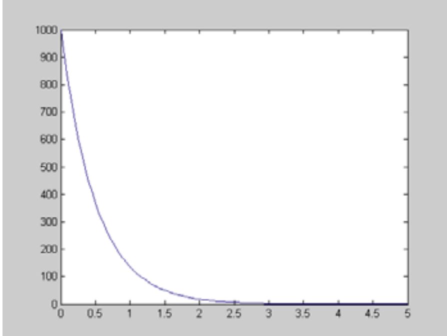
Resumen: una ecuación con una derivada de orden 1 es muchas veces relacionada con la noción de atenuación (resistor en electricidad, amortiguamiento en mecánica) es decir responsable de un régimen transitorio. Veremos que una derivada de orden 2 será relacionada con la noción de oscilación (la self o inductor L en electricidad, la masa en mecánica) correspondiendo a un régimen permanente.

Electricidad	**Mecánica**
L (inductor)	M (masa)
R (resistor)	λ (amortiguador)
C (capacitor)	k (resorte)

Dibujo en matlab:

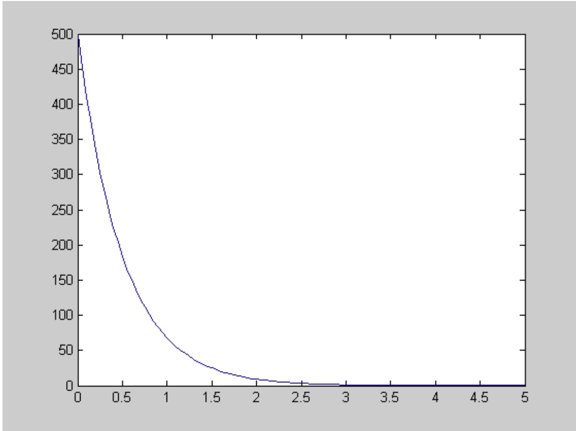
```
t = 0 : 0.05 : 5 ;
n0 = 1000 ;
lambda = 1 ;
n = n0 * exp (-lambda * t ) ;
plot ( t , n ) ;
```






```
t = 0 : 0.05 : 5 ;
n0 = 1000 ;
lambda = 2 ;
n = n0 * exp (-lambda * t ) ;
plot ( t , n ) ;
```

```
t = 0 : 0.05 : 5 ;
n0 = 500 ;
lambda = 2 ;
n = n0 * exp (-lambda * t ) ;
plot ( t , n ) ;
```



Viernes 30.07.2004

2 EDO explícitas de orden 1 : $y' = f(x, y)$

2.1 Definición y propiedades

Una **EDO de primer orden** corresponde a n = 1. Se puede escribir de dos maneras diferentes (**explícita o implícita**):

$$\boxed{\begin{cases} y' = f(x, y) \\ F(x, y, y') = 0 \end{cases}} \qquad (2.1.1)$$

En una primera etapa, vamos a ver las ecuaciones explícitas de primer orden : $y' = f(x, y)$.

Encontrar una solución de una EDO de primer orden, es encontrar una función y(x) que verifica una de las dos fórmulas (2.1.1). En realidad, no se sabe resolver todas las ecuaciones diferenciales. Solamente se sabe hacerlo para algunas de ciertos tipos que vamos a ver ahora.

Vamos a ver diferentes casos particulares.

2.2 EDO explícita de la forma: $y' = f(x)$

$y' = f(x)$ es la ecuación diferencial la más sencilla que puede pensarse.

La solución general de tal EDO de primer orden es:

$$\boxed{y(x) = \int f(x)\,dx + Cste}$$

Una solución particular puede determinarse fijando una solución. Por ejemplo digamos que para $x = x_0$, la función y toma el valor : $\boxed{y(x_0) = y_0}$. En este caso vamos a tener:

$$\boxed{y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0}$$

2.3 EDO explícita de orden 1 de variables separadas : $Q(y)\,y' = -P(x)$

Son ecuaciones exactas donde $P(x, y)$ depende solamente de x, que notaremos $P(x)$ y donde $Q(x, y)$ depende solamente de y, que notaremos $Q(y)$ así que son del tipo:

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$$

o sea:

$$Q(y)\,y' = -P(x)$$

Vamos a ver que estas ecuaciones son muy sencillas de resolver, así que para resolver una EDO, intentaremos, siempre que se pueda, de llegar a una **ecuación de variables separadas**.

Se pueden resolver simplemente integrando:

$$\boxed{\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = Cste}$$

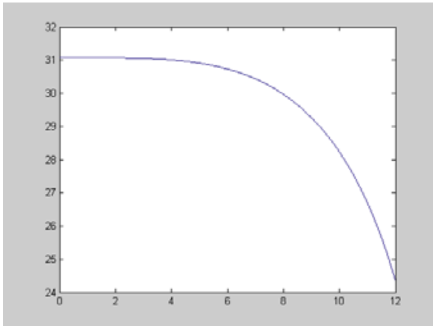
Ejemplo: Resolver $y' = -\dfrac{x^3}{y^2}$

Podemos expresar esta EDO de la manera: x^3 dx + y^2 dy = 0

Solución general: integrando, tenemos directamente: $\boxed{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}y^3 = \text{Cste}}$

Vamos a tomar una constante Cste de tal manera que nos quedamos con números reales:

```
x = 0 : 0.01 : 10 ;
C = 10000 ;
d = 1/3 ;
y =  ( 3 * (C -1/4 * x .^4) ) .^ d ;
plot ( x, y) ;
```



2.4 EDO reducibles a ecuaciones de variables separadas

Caso 1: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \boxed{f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0}$

Si se divide por $f_2(x)\,g_1(y)$, se obtiene:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = 0$$

que se puede resolver como el caso precedente:

$$\boxed{\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = Cste}$$

siempre que exista una primitiva de $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ y de $\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}$.

Miércoles 30.07.2003

Ejemplo 1: Resolver $y' = -\dfrac{y}{1+x^2}$

Podemos expresar esta EDO de la manera: $(1 + x^2)\, dy + y\, dx = 0$

Solución general: se divide por $y\,(1 + x^2)$ y así: $\dfrac{1}{1+x^2}\, dx + \dfrac{1}{y}\, dy = 0$

Se integra: $$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int \frac{1}{y}\, dy = Cste$$

$$arctg(x) + \ln y = Cste$$

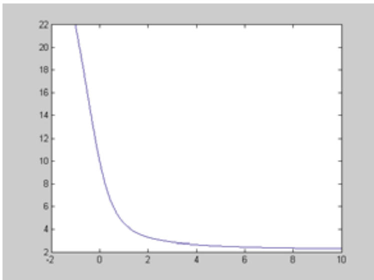
Notemos la Cste como un ln de otra cste: $Cste = \ln C$

$$\ln y - \ln C = -\,arctg(x)$$

$$\ln\left(\frac{y}{C}\right) = -\,arctg(x)$$

$$\boxed{y = C\, e^{-\,arctg(x)}}$$

```
x = -1 : 0.01 : 10 ;
C = 10 ;
y =  C * exp ( -atan (x) ) ;
plot ( x , y ) ;
```



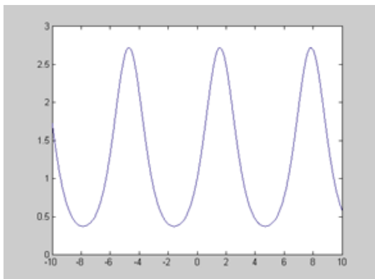
Ejemplo 2: Resolver $y' = y\cos(x)$

Se puede escribir de la forma: $\dfrac{1}{y}\, dy = \cos(x)\, dx$, integrando tenemos:

$\ln(y) = sen(x) + Cste$ o sea $y = e^{sen(x) + Cste}$. Si notamos $K = e^{Cste}$, entonces tenemos

$$\boxed{y = K\, e^{sen(x)}}$$

```
x = -10 : 0.01 : 10 ;
C = 1 ;
y =  C * exp ( sin (x) ) ;
plot ( x , y ) ;
```



2.5 EDO explícita de la forma : $y' = f\left(a\,x + b\,y\right)$

<u>Si a = 0</u> : $y' = f\left(b\,y\right)$. Es una EDO de variables separables. Sabemos resolver.

<u>Si b = 0</u> : $y' = f\left(a\,x\right)$. Es una EDO de variables separables. Sabemos resolver.

<u>Si</u> $ab \neq 0$. Hacemos el cambio de variable: $\boxed{z = a\,x + b\,y}$.

Entonces tenemos: $$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + b\,y'$$

o sea: $$y' = \frac{\frac{dz}{dx} - a}{b} = f\left(z\right) \text{ y } \frac{dz}{dx} = a + b\,f\left(z\right)$$

$$dx = \frac{dz}{a + b\,f\left(z\right)}$$

$$x = \int \frac{dz}{a + b\,f\left(z\right)} = \Phi\left(z\right) = \Phi\left(a\,x + b\,y\right)$$

Así tenemos una función y solución de la EDO en función de x.

<u>Ejemplo</u> : Resolver $y' = e^{x}\,e^{y} - 1$

Tenemos: $y' = e^{x+y} - 1$.

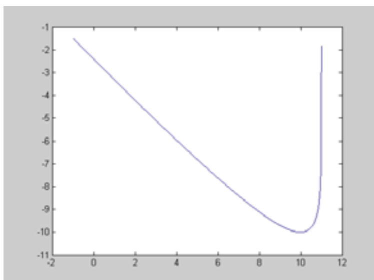
Hacemos el cambio de variable: z = x + y .

Así $\frac{dz}{dx} = 1 + y' = e^{z}$, o sea $e^{-z}\,dz = dx$. Integrando, tenemos $-\;e^{-z} = x + Cste$ o sea:

$$-\;e^{-x-y} = x + Cste$$
$$\ln\left(-x - Cste\right) = -x - y$$

es decir que la solución es : $\boxed{y = -x - \ln\left(-x - Cste\right)}$

```
x = -1 : 0.001 : 11 ;
C = - 11.0001 ;
y =  -x -log ( - x - C) ;
plot ( x , y ) ;
```



Lunes 02.08.2004

2.6 EDO explícita de la forma : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, o homogénea

La ecuación de tipo $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ se llama EDO **homogénea**.

Hagamos el cambio de variable : $\boxed{u = \frac{y}{x}}$.

Tenemos $y = xu$

y derivando respecto a x tenemos: $y' = u + x\frac{du}{dx}$.

Notemos $\qquad f(u) = u + x\frac{du}{dx}$.

O sea $\qquad u'x = f(u) - u$ que es de variables separadas.

- **Si** $f(u) \neq u$**:**

  entonces $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$

  Integrando tenemos: $\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln\left(\frac{x}{Cste}\right)$

  o sea $x = Cste\, e^{\Phi(u)}$ con $\Phi(u) = \int \frac{du}{f(u)-u}$

Entonces tenemos el sistema: $\boxed{\begin{cases} x = Cste\, e^{\Phi(u)} \\ y = Cste\ u\, e^{\Phi(u)} \end{cases}}$

Se puede dejar así o escribirse también de la forma:

$$\boxed{x = Cste\, e^{\Phi(y/x)}}$$

De allí se puede encontrar una función H tal que: u = H (x , Cste) y así y = x H (x , Cste).

Miramos un caso particular: Si conocemos un u_0 que satisface f (u_0) = u_0. En este caso es fácil mostrar que y = u_0 x es solución de la ecuación inicial porque

$$y' = u_0 = f(u_0) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Esta solución no se obtiene con un método general pero las que salen así de manera particular se llama una **solución singular**.

- **Si** $f(u) = u$:

entonces $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$

que es una EDO de variables separables que ya se sabe resolver.

<u>Ejemplo</u> : Resolver $y' = \frac{2xy - y^2}{x^2}$

Hacemos el cambio de variable: $y = ux$.

Tenemos $y' = \frac{2y}{x} - \left[\frac{y}{x}\right]^2 = 2u - u^2$.

Como $y' = u'x + u$, sustituyendo tenemos $u'x + u = 2u - u^2$ o sea $u'x = u - u^2$.

- **<u>Si</u>** $\underline{u \neq u^2}$: tenemos $\frac{du}{u-u^2} = \frac{dx}{x}$. Para integrar, descomponemos

  $\frac{1}{u-u^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u}$. Se encuentra: A = 1 y B = 1.

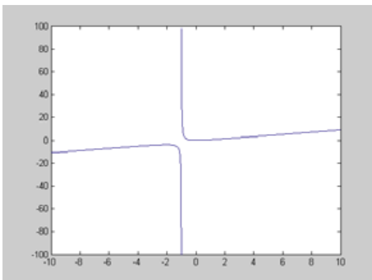
Integrando, tenemos: $\ln(u) - \ln(1-u) = \ln\left(\frac{x}{C}\right)$ o sea $\frac{u}{1-u} = \frac{x}{C}$ es decir: $\frac{y/x}{1-y/x} = \frac{x}{C}$.

De eso: $Cy = x(x-y)$, sea $\boxed{y = \frac{x^2}{C+x}}$

- **<u>Si</u>** $\underline{u = u^2}$:es decir si u = 0 o u = 1

se tiene las soluciones singulares y = 0 y también y = x.

```
x = -10 : 0.01 : 10 ;
C = 1 ;
y =  x .^ 2  ./ ( C + x ) ;
plot ( x , y ) , axis ([-10  10 -100 100]) ;
```



Viernes 01.08.2003

2.7 EDO explícita de la forma : $y' = f\left(\dfrac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{a_2\,x + b_2\,y + c_2}\right)$

Vemos que este caso corresponde a una EDO reducible a una EDO de tipo : $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

En el plano (x , y), la ecuación $a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0$ es una recta 1.
De igual manera, la ecuación $a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0$ es una recta 2.
Vamos a distinguir dos casos:

<u>**Caso 1**</u>: <u>**estas rectas se cortan en un punto**</u> $(x_0\,,y_0)$.

Eso significa que el punto $(x_0\,,y_0)$ verifica las ecuaciones de la recta 1 o sea :

$$a_1\,x_0 + b_1\,y_0 + c_1 = 0$$

y de la recta 2 o sea:

$$a_2\,x_0 + b_2\,y_0 + c_2 = 0$$

y que se cortan en este punto o sea :

$$a_1\,x_0 + b_1\,y_0 + c_1 = a_2\,x_0 + b_2\,y_0 + c_2\,.$$

Entonces la EDO se escribe:

$$y' = f\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{a_2\,x + b_2\,y + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y - a_1\,x_0 - b_1\,y_0}{a_2\,x + b_2\,y - a_2\,x_0 - b_2\,y_0}\right).$$

$$y' = f\left(\frac{a_1\left(x - x_0\right) + b_1\left(y - y_0\right)}{a_2\left(x - x_0\right) + b_2\left(y - y_0\right)}\right)$$

Vamos a hacer los 2 cambios de variable : $\boxed{\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}}$

Así tenemos: $Y' = f\left(\dfrac{a_1\,X + b_1\,Y}{a_2\,X + b_2\,Y}\right) = f\left(\dfrac{a_1 + b_1\,Y/X}{a_2 + b_2\,Y/X}\right) = g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$ que ya sabemos resolver.

<u>Caso 2</u>: **<u>estas rectas son paralelas</u>**.

Eso significa que :

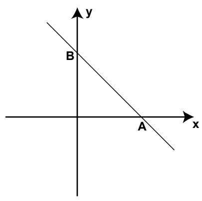
$$\boxed{a_2 = K\, a_1 \text{ y } b_2 = K\, b_1}.$$

Entonces tenemos: $y' = f\left(\dfrac{a_1\, x + b_1\, y + c_1}{K\, a_1\, x + K\, b_1\, y + c_2} \right) = f\left(\dfrac{a_1\, x + b_1\, y + c_1}{K\left(a_1\, x + b_1\, y\right) + c_2} \right).$

Hagamos el cambio de variable: $\boxed{z = a_1\, x + b_1\, y}$.

Entonces: $z' = \dfrac{d\,z}{d\,x} = f\left(\dfrac{z + c_1}{K\, z + c_2} \right)$ que es una EDO de variables separadas que ya sabemos resolver.

Ojo. Una manera rápida de ver si dos rectas son paralelas es decir que sus vectores direccionales son paralelos. Si tenemos la ecuación $a_1\, x_0 + b_1\, y_0 + c_1 = 0$, los puntos A y B definen un vector en la dirección de la recta 1. $A_1 \left| \begin{matrix} -\dfrac{c_1}{a_1} \\ 0 \end{matrix} \right.$ y $B_1 \left| \begin{matrix} 0 \\ -\dfrac{c_1}{b_1} \end{matrix} \right.$.



Entonces $\vec{A_1 B_1} \left| \begin{matrix} \dfrac{c_1}{a_1} \\ -\dfrac{c_1}{b_1} \end{matrix} \right.$ o sea un vector paralelo $\vec{A_1 B_1} \left| \begin{matrix} \dfrac{1}{a_1} \\ -\dfrac{1}{b_1} \end{matrix} \right.$.

De igual manera, un vector de la recta 2 será: $\vec{A_2 B_2} \left| \begin{matrix} \dfrac{1}{a_2} \\ -\dfrac{1}{b_2} \end{matrix} \right.$. Las dos rectas son paralelas si sus vectores direccionales son paralelos o sea: $\begin{cases} \dfrac{1}{a_1} = K\, \dfrac{1}{a_2} \\ \dfrac{1}{b_1} = K\, \dfrac{1}{b_2} \end{cases}$ o sea $\begin{cases} a_2 = K\, a_1 \\ b_2 = K\, b_1 \end{cases}$

Miércoles 04.08.2004

Ejemplo 1 : Resolver $y' = \dfrac{-2x+4y-6}{x+y-3}$

Esta relación no esta satisfecha aquí, entonces las dos rectas se cortan en el punto que

satisface: $\begin{cases} -2x_0+4y_0-6 = x_0+y_0-3 \\ -2x_0+4y_0-6=0 \\ x_0+y_0-3=0 \end{cases}$.

Se puede mostrar fácilmente que $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Entonces tenemos: $y' = \dfrac{-2x+4y+2x_0-4y_0}{x+y-x_0-y_0} = \dfrac{-2(x-x_0)+4(y-y_0)}{(x-x_0)+(y-y_0)}$.

Hacemos el cambio de variables: $\boxed{X = x - x_0}$ y $\boxed{Y = y - y_0}$.

Así : $Y' = \dfrac{-2X+4Y}{X+Y} = \dfrac{-2+4Y/X}{1+Y/X}$

Hacemos otro cambio de variable: $\boxed{u = Y/X}$.

Entonces : $Y = uX$ de allí : $Y' = u'X + u$ porque $\dfrac{dX}{dx} = X' = 1$.

Entonces $Y' = u'X + u = \dfrac{-2+4u}{1+u}$ que se puede escribir: $-\dfrac{du}{dX}X = \dfrac{u^2-3u+2}{u+1}$.

Tenemos que analizar dos casos:

Caso 1: $u^2-3u+2 \neq 0$.

Tenemos : $-\dfrac{(u+1)du}{u^2-3u+2} = \dfrac{dX}{X}$

$u^2-3u+2 = (u-1)(u-2)$ entonces: $-\dfrac{(u+1)}{u^2-3u+2} = \dfrac{A}{(u-1)} + \dfrac{B}{(u-2)}$.

Podemos mostrar fácilmente que A = 2 y B = - 3.

Integrando, tenemos : $2\ln(u-1) - 3\ln(u-2) = \ln\left(\dfrac{X}{C}\right)$ o sea $X = C\dfrac{(u-1)^2}{(u-2)^3}$.

Como $u = Y/X$ tenemos: $C(Y-X)^2 = (Y-2X)^3$ o sea: $\boxed{C(y-x-1)^2 = (y-2x)^3}$

Caso 2: $u^2 - 3u + 2 = 0$

Tenemos 2 casos:

$u_0 = 1$ o sea $Y = X$ o sea $\boxed{y = x + 1}$

$u_0 = 2$ o sea $Y = 2X$ o sea $\boxed{y = 2x}$

Lunes 04.08.2003

Ejemplo 2 : Resolver $y' = \dfrac{x - y - 1}{x - y - 2}$

Hacemos el cambio de variable: $\boxed{z = x - y}$.

Tenemos $z' = 1 - y'$

así: $1 - z' = \dfrac{z - 1}{z - 2}$

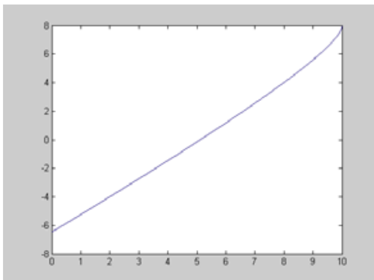
o sea: $(z - 2)\,dz = -dx$.

Integrando: $\dfrac{1}{2}z^2 - 2z = -x + C$ o $\dfrac{1}{2}(z - 2)^2 = -x + K$.

Como $z = x - y$ tenemos como solución las soluciones de : $(x - y - 2)^2 + 2x = 2K$ o sea:

$$\boxed{y = x - 2 \pm \sqrt{2K - 2x}}$$

```
x = 0 : 0.01 : 10 ;
C = 10 ;
y =  x - 2  - sqrt( 2 * C – 2 * x ) ;
plot ( x , y )  ;
```



2.8 EDO de la forma : $y' = f(x,y)$ con f tal que $f(\lambda x, \lambda^{\alpha} y) = \lambda^{\alpha-1} f(x,y)$

- **<u>Si</u>** $\alpha = 0$, tenemos $y' = f(x,y) = \lambda f(\lambda x, y)$. Tomando $\lambda = 1/x$ tenemos $y' = 1/x\, f(1,y)$ que es una ecuación en variable separadas.

- **<u>Si</u>** $\alpha = 1$, tenemos $y' = f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ que ya vimos

- **<u>En los otros casos</u>**, hacemos $\boxed{y = z^{\alpha}}$.

  Derivando, $y' = \alpha z^{\alpha-1} z' = f(x, z^{\alpha})$

  o sea: $z' = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha-1} f(x, z^{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{1}{z}x, \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha} z^{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{x}{z}, 1\right)$

  que es una EDO homogénea.

2.9 EDO homogénea de grado k

Es una EDO de la forma $y' = f(x,y)$ con f tal que:

$$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{k} f(x,y)}.$$

Se dice que f es **<u>homogénea de grado k</u>**.

El caso particular k=1, $y' = f(x,y)$ es homogénea si se puede escribir de la forma:

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Se resuelven con el cambio de variable: $\boxed{z = \frac{y}{x}}$.

Viernes 06.08.2004

<u>Ejemplo</u>: resolver: $y' = \frac{y}{2x} - 3\frac{\sqrt{x}}{y^2}$

Vamos a notar $f(x,y) = \frac{y}{2x} - 3\frac{\sqrt{x}}{y^2}$.

Calculamos $f(\lambda x, \lambda^{\alpha} y) = \frac{\lambda^{\alpha} y}{2\lambda x} - 3\frac{\sqrt{\lambda x}}{(\lambda^{\alpha} y)^2} = \lambda^{\alpha-1}\left(\frac{y}{2x} - 3\frac{\lambda^{3/2-3\alpha}\sqrt{x}}{y^2}\right)$.

Esta expresión vale $f(x,y) = \frac{y}{2x} - 3\frac{\sqrt{x}}{y^2}$ para $3/2 - 3\alpha = 0$ o sea $\alpha = 1/2$.

Hagamos el cambio de variable : $y = z^{1/2}$.

Entonces $y' = \dfrac{1}{2} z^{-1/2} z' = \dfrac{z^{1/2}}{2x} - 3\dfrac{\sqrt{x}}{z}$

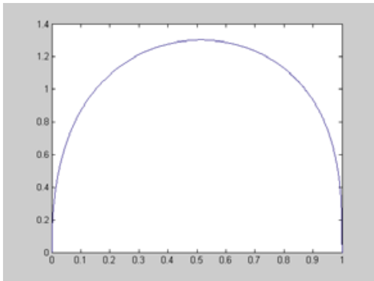
o sea : $z' = \dfrac{z}{x} - 6\left(\dfrac{z}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Hacemos otro cambio de variable: $u = \dfrac{z}{x}$.

De allí, $z' = u + x u' = u - 6 u^{-1/2}$.

Es una EDO a variables separadas, así que tenemos: $\boxed{\begin{cases} x = C\, e^{-\frac{1}{9} u^{3/2}} \\ y = (Cu)^{1/2}\, e^{-\frac{1}{18} u^{3/2}} \end{cases}}$

```
u = 0 : 0.01 : 100 ;
C = 1 ;
x = C * exp ( -1/9 * u .^1.5  ) ;
y =  sqrt (x .* u) ;
plot ( x , y )  ;
```



2.10 EDO de la forma : $y' = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

Se puede también escribir $y' = \dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ o sea

(2.10.1) $\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$

2.10.1 EDO exacta y función potencial

Se dice que esta EDO es **exacta** si cumple además $\boxed{P_y = Q_x}$ con $\boxed{\begin{cases} P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ Q_x = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}}$

Para resolver tal ecuación (2.10.1), vamos primero comentar algunos puntos. Suponemos de antemano que P y Q son de clase C^1 (continuas con derivadas parciales continuas) en su dominio donde está definido (un abierto de R^2).

Demostración: Suponemos que podemos encontrar una función $F(x,y)$ en la que su diferencial sea :

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

entonces la ecuación diferencial tendrá como solución:

$$F(x,y) = C$$

donde C es una constante respecto a x y y.

Se necesita 2 cosas:

1. encontrar bajo que condiciones impuestas a P y Q tiene lugar una función F tal que su diferential total sea exactamente $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$
2. si dichas condiciones son satisfechas, determinar realmente la función F.

Por razones de cálculo, tenemos:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy$$

de modo que tenemos por inspecciones:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

Vamos ahora a derivar P respecto a y y Q respecto a x:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y)$$

Por cálculo, tenemos:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y)$$

entonces tenemos:

$$(2) \qquad \boxed{\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}$$

que es la condición que debe satisfacer la ecuación (1) para que sea exacta.

Al revés, ahora mostramos que si la condición anterior se satisface, la ecuación inicial es exacta. Sea $\varphi(x,y)$ una función para la cual:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$

entonces $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.

Como (2) es satisfecha, tenemos: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

Integramos respecto a x (mientras y se mantiene constante):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) + B(y)$$

donde B(y) es una constante respecto a x (pero que puede depender de y).

Ahora si tomamos como función F: $F(x,y) = \varphi(x,y) - \int B(y)\,dy$
entonces tenemos

$$dF = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy - B(y)\,dy$$
$$dF = P\,dx + [Q + B(y)]\,dy - B(y)\,dy = P\,dx + Q\,dy$$

De aquí concluimos que la ecuación (1) es exacta, y terminamos una demostración enunciado.

Otra manera de ver: Una expresión diferencial $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ es una diferencial cerrada en una región R del plano xy si se verifica: $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ para todo (x,y). Se dice exacta si además existe una función $F(x,y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q$ para todo (x,y). Otra manera de decir es que el diferencial de F es : $dF = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. F es única (salvo constantes) se llama **<u>función potencial</u>**. El teorema de Schwartz sobre igualdad de derivadas cruzadas nos asegura que cualquier diferencial exacta es cerrada.

Entonces, una ecuación diferencial exacta es una expresión igualada exactamente a cero. Si $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, entonces existe una diferencial F que verifica $dF = 0$. Su solución es: $F(x,y) = C$, (con C una constante arbitraria respecto a x e y).

<u>El problema entonces es hallar F tal que</u> $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q$

o sea vamos a empezar a integrar respecto a x:

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx \quad + \varphi(y)$$

donde $\varphi(y)$ es la constante de integración respecto a x (entonces puede depender de y).

Debemos verificar la segunda condición :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \quad + \frac{d}{dy}\varphi(y)$$

Entonces $$\varphi'(y) = \frac{d}{dy}\varphi(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx.$$

Como es independiente de x, su derivada respecto a y debe ser cero.

Lo vamos a verificar :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q(x,y)) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \right) = \frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)\,dx \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

porque $P_y = Q_x$.

Una vez que se conoce $\varphi'(y)$, integrando se deduce $\varphi(y)$, y sustituyendo su valor, llegamos a la **<u>función</u>** **<u>potencial</u>** $F(x,y)$. Así tenemos todas las soluciones $\boxed{F(x,y) = C}$

Miércoles 06.08.2003 / Lunes 09.08.2004

Ejemplo: Resolver : $3\,y + e^{x} + \left(3\,x + \cos y \right) y' = 0$

Vamos a poner la ecuación de la forma

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

con $P(x, y) = 3\,y + e^{x}$

y $Q(x, y) = 3\,x + \cos y$.

Verifiquemos si la EDO es exacta, es decir si la condición $P_y = Q_x$ es satisfecha.
Tenemos $P_y = 3 = Q_x$.
Entonces la ecuación diferencial es exacta.
Buscamos la función potencial F tal que:

$$dF(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

Como $$dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\,dy$$

tenemos por inspección:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3\,y + e^{x}$$

Integrando respecto a x, tenemos

$$F(x, y) = 3\,y\,x + e^{x} + \varphi(y)$$

Derivando respecto a y, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3\,x + \frac{d\varphi(y)}{dy} = Q = 3\,x + \cos y$$

es decir $$\frac{d\varphi(y)}{dy} = \cos y$$

Integrando tenemos: $\varphi(y) = sen\,y + C$.

La solución es :

$$F(x, y) = 3\,y\,x + e^{x} + sen\,y + C = K$$

o sea simplemente

$\boxed{3\,y\,x + e^{x} + sen\,y = C_1}$ con C_1 una constante.

2.10.2 EDO no exacta y factores integrantes

Si la ecuación:

$$(1)\quad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \text{ no es exacta,}$$

una posibilidad para resolverla es encontrar una función $\mu(x,y)$ (no nula) tal que:

$$(2)\quad \mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0 \text{ sea exacta.}$$

Como las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes, sus soluciones serán las mismas. La función $\mu(x,y)$ se llama **factor integrante**. Lamentablemente, no hay un método general para encontrar factores integrantes. Se puede encontrar tal factor integrante fácilmente solamente para algunos casos que vamos a ver ahora.

Caso 1: $\mu(x,y) = \mu(x)$

Queremos que la ecuación:

$$\mu(x)P(x,y)\,dx + \mu(x)Q(x,y)\,dy = 0 \text{ sea exacta}$$

o sea que verifique:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)P(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)Q(x,y)]$$

Derivando, tenemos:

$$\mu(x)P_y(x,y) = \mu'(x)Q(x,y) + \mu(x)Q_x(x,y)$$

o sea

$$\mu(x)\left[P_y(x,y) - Q_x(x,y)\right] = \mu'(x)Q(x,y)$$

o sea

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

Eso es posible si este coeficiente depende exclusivamente de x.

Notamos $h(x) = \dfrac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}$ a este coeficiente. Entonces:

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int h(x)\,dx}}.$$

<u>Caso 2</u>: $\mu(x,y)=\mu(y)$

Es el caso simétrico del caso anterior.

Entonces tenemos: $\mu(y)=e^{\int g(y)dy}$ con $g(y)=\dfrac{Q_x(x,y)-P_y(x,y)}{P(x,y)}$

<u>Caso 3</u>: Otros casos.

Aparte de los 2 casos anteriores, se puede intentar varios factores integrantes, imponiendo ciertas condiciones restrictivas, como por ejemplo: $\mu(x,y)=x^{\alpha}\,y^{\beta}$ con α y β constantes a determinar, o también $\mu(x+y)\,o\,\mu(xy)$.

<u>En la práctica</u>, se puede empezar a buscar un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=\mu(x)$. Si no se puede, se puede intentar un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=\mu(y)$. Si no se puede, intentar alguno de la forma dado en el caso 3.

<u>Ejemplo</u>: Resolver : $(2x^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$

En este caso, tenemos: $P(x,y)=2x^2+y$ y $Q(x,y)=x^2y-x$.

Tenemos $P_y(x,y)=1$ y $Q_x(x,y)=2xy-1$.

La EDO es exacta si la relación $P_y=Q_x$ es satisfecha.

Lo es si $xy=1$.

Veamos si en este caso la EDO es satisfecha para $y=x^{-1}$
o sea si $(2x^2+x^{-1})dx+(x^2x^{-1}-x)dy=(2x^2+x^{-1})dx=0$

Entonces la ecuación no es exacta.

Vamos a intentar un factor integrante.

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{P_y(x,y)-Q_x(x,y)}{Q(x,y)}=\frac{1-(2xy-1)}{x^2y-x}=\frac{2(1-xy)}{-x(1-xy)}=\frac{-2}{x}.$$

Esta expresión depende solamente de x, así que en principio es posible encontrar un factor integrante. $\mu(x)=x^{-2}$.

Entonces, multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(x)=x^{-2}$ se obtiene la ecuación exacta : $(2+yx^{-2})dx+(y-x^{-1})dy=0$.
Resolvemos esa ecuación exacta. Tenemos $P(x,y)=2+yx^{-2}$ y $Q(x,y)=y-x^{-1}$.

Verifiquemos que $P_y = Q_x$.

Tenemos $P_y = x^{-2}$ y $Q_x = x^{-2}$.

Ahora $F_x(x, y) = 2 + y x^{-2}$ o sea $F(x, y) = 2x - y x^{-1} + \varphi(y)$, y derivando respecto a y: $F_y(x, y) = -x^{-1} + \varphi'(y) = y - x^{-1}$, o sea $\varphi'(y) = y$ o sea $\varphi(y) = \frac{1}{2} y^2 + C$.

Entonces tenemos $F(x, y) = 2x - y x^{-1} + \frac{1}{2} y^2 + C$. Entonces las soluciones de la ecuación inicial son la funciones y que verifican: $\boxed{2x - y x^{-1} + \frac{1}{2} y^2 = K}$

Jueves 07.08.2003 / Miércoles 11.08.2004

2.11 EDO lineales de primer orden: $y' + a(x)y = b(x)$

Vamos a resolver este tipo de ecuación con tres métodos.

2.11.1 Con un factor integrante

La EDO se escribe:

$$[a(x)y - b(x)]\,dx + dy = 0$$

es decir

$$P(x,y) = a(x)y - b(x) \quad \text{y} \quad Q(x,y) = 1$$

Buscamos un factor integrante de la forma: $\mu(x,y) = \mu(x)$, es decir buscamos $\mu(x)$ tal que $\mu(x)P(x,y)\,dx + \mu(x)Q(x,y)\,dy = 0$ sea exacta.

Notamos $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = a(x)$.

Entonces $$\mu(x) = e^{\int a(x)dx}.$$

Entonces:

$e^{\int a(x)dx}[a(x)y - b(x)]\,dx + e^{\int a(x)dx}\,dy = 0$ tiene que ser exacta.

Buscamos una función potencial F que es tal que: $dF = 0$ (la solución de la EDO será: $F(x,y) = C$).

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

Por inspección, tenemos:

$$\begin{cases} (1) \quad F_x = e^{\int a(x)dx}[a(x)y - b(x)] \\ (2) \quad F_y = e^{\int a(x)dx} \end{cases}$$

Vamos a resolver (2) que es más fácil:

$$F_y(x,y) = e^{\int a(x)dx}$$

o sea

$$F(x,y) = y\,e^{\int a(x)dx} + \varphi(x)$$

Ahora derivando F(x,y) respecto a x:

$$F_x(x,y) = y\,[a(x)]\,e^{\int a(x)dx} + \varphi'(x)$$

y por otra parte

$$F_x(x,y) = [a(x)\,y - b(x)]\,e^{\int a(x)dx}$$

Igualando las dos expresiones, tenemos:

$$b(x)\,e^{\int a(x)dx} = \varphi'(x)$$

así que $\varphi(x) = \int b(x)\,e^{\int a(x)dx}\,dx$

Entonces: $F(x,y) = y\,e^{\int a(x)dx} - \int b(x)\,e^{\int a(x)dx}\,dx$.

Las soluciones de la EDO son: $y\,e^{\int a(x)dx} - \int b(x)\,e^{\int a(x)dx}\,dx = C$, o sea:

$$\boxed{y = \left[\int b(x)\,e^{\int a(x)dx}\,dx + C\right] e^{\int -a(x)dx}}$$

2.11.2 Método de '*variación de la constante*'

- Resolver primero la ecuación homogénea asociada $y' + a(x)\,y = 0$. Esta ecuación es de variable separada: $\frac{dy}{y} = -a(x)\,dx$. Su solución es $y(x) = C\,e^{\int -a(x)dx}$.
- El método de variación de la constante consiste a considera la constante C como una función de x, o sea $C = C(x)$, es decir que tenemos: $y(x) = C(x)\,e^{\int -a(x)dx}$.
  Vamos a buscar $C(x)$ que verifique a ecuación que queremos resolver, o sea: $y' + a(x)\,y = 0$. Derivando y, tenemos:
  $y'(x) = C'(x)\,e^{\int -a(x)dx} - C(x)\,a(x)\,e^{\int -a(x)dx}$, poniendo en la ecuación inicial tenemos:
  $C'(x)\,e^{\int -a(x)dx} - C(x)\,a(x)\,e^{\int -a(x)dx} + a(x)\,C(x)\,e^{\int -a(x)dx} = b(x)$

o sea: $C'(x) = b(x)\,e^{\int a(x)dx}$, integrando tenemos: $C(x) = \int b(x)\,e^{\int a(x)dx} + K$.

Con eso, tenemos la expresión final:

$$y(x) = \left[\int b(x)\,e^{\int a(x)dx} + K\right] e^{\int -a(x)dx}$$

que es igual como a la del método anterior.

2.11.3 Resolviendo con la suma de la solución general más una solución particular

Suponemos que por un método cualquiera hemos encontrado una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación. Entonces la solución general será la suma de esta solución particular $y_p(x)$ más la solución de la ecuación homogénea asociada, o sea:

$$y(x) = y_p(x) + C\,e^{\int -a(x)dx}$$

La justificación es simple:

$y_p(x)$ es solución de la EDO significa que : $y_p{}' + a(x)y_p = b(x)$
$y_0(x)$ es solución de la EDO homogénea asociada es decir: $y_0{}' + a(x)y_0 = 0$

Vamos a verificar entonces que $y_p(x) + y_0(x)$ es solución de la ecuación inicial, o sea:

$$\left[y_p(x) + y_0(x)\right]' + a(x)\left[y_p(x) + y_0(x)\right] = b(x)\ .$$

Tenemos :

$$\left[y_p(x) + y_0(x)\right]' + a(x)\left[y_p(x) + y_0(x)\right] = \left[y_p(x)\right]' + a(x)\left[y_p(x)\right]$$
$$+\left[y_0(x)\right]' + a(x)\left[y_0(x)\right] = b(x) + 0$$

lo que teníamos que mostrar.

2.11.4 Resolviendo una descomposición $y(x) = u(x).v(x)$

Resolviendo con una descomposición $y(x) = u(x).v(x)$

Entonces tenemos: $y' = u'.v + u.v'$.

La EDO inicial es: $u'.v + u.v' + a(x)u\,v = b(x)$

o sea : $u'.v + u.\left[v' + a(x)v\right] = b(x)$.

Lo que buscamos, son dos funciones u y v de tal manera que sus producto u.v satisface la ecuación. Vamos a intentar unas fáciles.

Si intentamos v tal que $v' + a(x)v = 0$

entonces u deberá satisfacer : $u'.v = b(x)$.

Ya sabemos resolver la EDO $v' + a(x)v = 0$.

Su solución es : $v(x) = e^{-\int a(x)dx}$.

Nos queda a encontrar u que verifique: $u'.v = b(x)$ o sea $u' = b(x)e^{\int a(x)dx}$.

Integrando, tenemos para u:

$$u = \int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx + C.$$

La solución final es: $\boxed{y(x) = \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx + C\right]e^{-\int a(x)dx}}$

Lunes 11.08.2003

<u>Ejemplo</u>: $2xy' - 3y = 4x^2$

<u>Método 1</u>:

La EDO se escribe : $y' - \dfrac{3y}{2x} = 2x$

es decir $$dy = \left[\frac{3y}{2x} + 2x\right]dx$$

es decir $P\,dx + Q\,dy = 0$ con $P(x,y) = \dfrac{3y}{2x} + 2x$ y $Q(x,y) = -1$.

Como $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{-3}{2x}$, existe un factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{-3}{2x}dx} = e^{-\frac{3}{2}\ln(x)} = x^{-3/2}$.

Entonces la ecuación $x^{-3/2}\left[\dfrac{3y}{2x} + 2x\right]dx - x^{-3/2}\,dy = 0$ es exacta.

Vamos a buscar una función potencial F tal que $dF = 0$, o sea $F(x,y) = Cste$.

Tenemos $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy$, o sea $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -x^{-3/2}$

es decir $F(x,y) = -x^{-3/2}y + \varphi(x)$

y debe verificar: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = x^{-3/2}\left[\dfrac{3y}{2x} + 2x\right] = \dfrac{3}{2}yx^{-5/2} + 2x^{-1/2} = \dfrac{3}{2}yx^{-5/2} + \varphi'(x)$.

De allí deducimos $\varphi(x) = 4x^{1/2}$. Así $F(x,y) = -x^{-3/2}y + 4x^{1/2}$.

La solución de la EDO es : $-x^{-3/2}y + 4x^{1/2} = C$ es decir $\boxed{y = 4x^2 - Cx^{3/2}}$

Viernes 13.08.2004

Método 2: Empezamos por resolver la ecuación homogénea asociada : $2\,x\,y' - 3\,y = 0$.

Se puede también escribir : $\frac{d\,y}{y} = \frac{3\,d\,x}{2\,x}$ que es de variables separadas, así que tenemos:

$\log y = \frac{3}{2}\log x + K$, o sea : $y = C\,x^{3/2}$.

Aplicamos ahora el método de variación de la constante, es decir $C = C(x)$ así conociendo C tendremos la solución: $y = C(x)\,x^{3/2}$.

Derivando, tenemos: $y' = C'(x)\,x^{3/2} + \frac{3}{2}C(x)\,x^{1/2}$,

sustituyendo en la EDO inicial: $2\,x\,y' - 3\,y = 4\,x^2$ tenemos:

$2\,x\left[C'(x)\,x^{3/2} + \frac{3}{2}C(x)\,x^{1/2}\right] - 3\,C(x)\,x^{3/2} = 4\,x^2$ o sea: $C'(x) = 2\,x^{-1/2}$.

Integrando tenemos: $C(x) = 4\,x^{1/2} + K$.

Así tenemos: $\boxed{y = \left(4\,x^{1/2} + K\right)x^{3/2} = K\,x^{3/2} + 4\,x^2}$

Método 3: En este método, debemos encontrar una solución particular. No hay método general para hallar tal solución. Mirando la ecuación que debemos resolver, podemos sospechar que tal vez una solución de tipo polinómica podría ser una solución particular.

Intentamos entonces de encontrar una solución particular del tipo: $y = a\,x^2 + b\,x + c$.

Derivando, $y' = 2\,a\,x + b$.

Sustituyendo en la EDO inicial: $2\,x\,y' - 3\,y = 4\,x^2$ tenemos:

$$2\,x(2\,a\,x + b) - 3\left(a\,x^2 + b\,x + c\right) = 4\,x^2.$$

Tenemos: $2\,x(2\,a\,x + b) - 3\left(a\,x^2 + b\,x + c\right) = 4\,x^2$

o sea: $a\,x^2 - b\,x - 3\,c = 4\,x^2$

Igualando los términos de mismo grado tenemos: $a = 4 \quad y \quad b = c = 0$.

Así una solución particular es: $y_p = 4\,x^2$.

La solución de la ecuación homogénea asociada es (ya lo hemos hecho): $y_0 = C\,x^{3/2}$.

La solución general es la solución particular más la solución de la ecuación homogénea asociada o sea:

$$\boxed{y = C\,x^{3/2} + 4\,x^2}$$

<u>Método 4</u>: El ultimo método consiste a escribir y de la forma de un producto de dos funciones dependiendo de x:

$$y = u(x)\,v(x).$$

Derivando: $$y' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x).$$

Sustituyendo en: $2\,x\,y' - 3\,y = 4\,x^2$ tenemos:

$$2\,x\left[u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)\right] - 3\,u(x)\,v(x) = 4\,x^2$$

o sea: $$2\,x\,u'\,v + \left[2x\,v' - 3\,v\right]u = 4\,x^2.$$

El propósito es de encontrar dos funciones u y v tal que el producto satisface la EDO inicial, y no de encontrar todas la funciones u y v que satisfacen tal condición.

Vemos que si el termino factor de u es 0, será más fácil resolver la ecuación.

Entonces vamos a buscar v tal que: $$2x\,v' - 3\,v = 0$$

o sea: $$\frac{v'}{v} = \frac{3}{2\,x}.$$

Integrando tenemos: $\log v = \dfrac{3}{2}\log x + K$

o sea: $v = C\,x^{3/2}$.

Como buscamos u y v tal que y = u v, podemos tomar la constante C = 1, porque no buscamos todas las funciones u y v sino una función v y una vez fijada una función u que dependerá de como hemos encontrado la función v, de tal manera que y = u v. Pero para mostrar eso, guardamos la constante C y vemos que va a pasar con ella. Ahora la ecuación con esta condición queda: $2\,x\,u'\,v = 4\,x^2$

es decir $u' = \dfrac{2\,x}{v} = \dfrac{2\,x^{-1/2}}{C}$. Integrando: $u = \dfrac{4\,x^{1/2}}{C} + K$.

Como teníamos $y = u(x)\,v(x)$, tenemos: $\boxed{y = \left[\dfrac{4\,x^{1/2}}{C} + K\right] C\,x^{3/2} = 4\,x^2 + D\,x^{3/2}}$

2.12 Ecuación de Bernoulli: $y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0$

Caso 1: Si $\alpha = 0$, la EDO es lineal. Ya sabemos resolver.

Caso 2: Si $\alpha = 1$, la EDO es de variables separadas. Ya sabemos resolver.

Caso 3: En otros casos, vamos a ver como resolverla.

Vemos que lo que nos molesta es el ultimo termino y^{α}.

Si no estuviese, casi tendríamos una EDO lineal.

Dividimos entonces por y^{α}.

Así tenemos: $\dfrac{y'}{y^{\alpha}} + a(x)y^{1-\alpha} + b(x) = 0$.

Vamos entonces a efectuar el cambio de variable: $\boxed{y^{1-\alpha} = z}$.

Derivando: $(1-\alpha)y^{-\alpha}\,y' = z'$ es decir: $\dfrac{y'}{y^{\alpha}} = \dfrac{z'}{1-\alpha}$.

Así tenemos: $\dfrac{z'}{1-\alpha} + a(x)z + b(x) = 0$

o sea: $z' + (1-\alpha)a(x)z = (\alpha - 1)b(x)$

que es una ecuación lineal que sabemos resolver.

Otra manera de resolver, es descomponer $y = u(x)v(x)$.

Derivando, $y' = u'.v + u.v'$

Sustituyendo en la EDO tenemos: $y' = u'.v + u.v'$

$$u'.v + u.v' + a(x)u\,v + b(x)u^{\alpha}\,v^{\alpha} = 0$$

o sea $$u'.v + u\left[v' + a(x)v\right] + b(x)u^{\alpha}\,v^{\alpha} = 0.$$

Vamos a buscar un v tal que $$\left[v' + a(x)v\right] = 0 .$$

De eso, encontramos la función v(x), y queda:

$$u'.v + b(x)u^{\alpha}\,v^{\alpha} = 0$$

que es una ecuación de variables separables. Resolviéndola, tenemos u(x), y así y.

Ejemplo: $x\,y' + 2\,y + x^5\,y^3\,e^x = 0$

Dividiendo por x, tenemos: $y' + 2\,\frac{y}{x} + x^4\,y^3\,e^x = 0$.

Es una ecuación de Bernoulli con $\alpha = 3$.

Dividiendo por y^3 tenemos

$$\frac{y'}{y^3} + 2\,\frac{1}{x\,y^2} + x^4\,e^x = 0$$

Hacemos el cambio de variable: $\frac{1}{y^2} = z$

así $z' = -2\,y^{-3}\,y'$ o sea $\frac{y'}{y^3} = -\frac{z'}{2}$.

En la EDo, da: $$-\frac{z'}{2} + 2\,\frac{z}{x} + x^4\,e^x = 0$$

sea $$z' - 4\,\frac{z}{x} = 2\,x^4\,e^x$$

que es una ecuación lineal. La solución es:

$$z = \left[\int 2\,x^4\,e^x\,e^{\int -\frac{4}{x}dx}\,dx + C\right] e^{\int \frac{4}{x}dx} = x^4\left(2\,e^x + C\right) \text{ o sea}$$

$$y = x^{-2}\left(2\,e^x + C\right)^{-1/2}$$

Podemos también resolver tal ecuación haciendo el cambio $y = u(x)\,v(x)$

2.13 Ecuación de Riccati: $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$

Para resolverla, tenemos que seguir 2 pasos:

Paso 1: Encontrar una solución particular $y_p(x)$. Esa solución verifica:
$y_p' + a(x)y_p + b(x){y_p}^2 = c(x)$

Paso 2: Hacer el cambio $y = y_p + z$ y así llegar a una ecuación de Bernoulli.

Así tenemos derivando: $y' = y_p' + z'$.

Sustituyendo, $y_p' + z' + a(x)[y_p + z] + b(x)[y_p + z]^2 = c(x)$.

Como $y_p' + a(x)y_p + b(x){y_p}^2 = c(x)$ queda:

$z' + a(x)[z] + b(x)[z]^2 + 2b(x)z\,y_p = 0$

es decir: $z' + [a(x) + 2b(x)y_p(x)]z + b(x)[z]^2 = 0$

que es una ecuación de Bernoulli con $\alpha = 2$.

Así se hace un cambio $u = z^{-1}$ que se reducirá a una ecuación lineal.

Ejemplo: $y' + y^2 = x^2 - 2x$

Paso 1: Encontrar una solución particular $y_p(x)$.

Vamos a intentar un polinomio de primer orden: $y_p(x) = ax + b$
Vamos a ver si es posible encontrar (a,b) que satisface la EDO: $a + (ax + b)^2 = x^2 - 2x$.
Se encuentra (a , b) = (- 1 , 1).

o sea: $$y_p(x) = -x + 1$$

Paso 2: Se hace el cambio $y = y_p + z$.

Así tenemos derivando: $y' = y_p' + z'$.

Sustituyendo, tenemos: $y_p' + z' + (y_p + z)^2 = x^2 - 2x$.

Queda: $z' + 2(-x + 1)z + z^2 = 0$ que es una ecuación de Bernoulli con $\alpha = 2$.

Así se hace un cambio $z = u^{-1}$ que se reducirá a una ecuación lineal

$$u' + 2(x-1)u = 1.$$

La solución es: $u = \left[\int e^{x^2-2x}\,dx + C\right]e^{2x-x^2} = \frac{1}{z} = \frac{1}{y+x-1}$

Así: $$\boxed{\frac{1}{y+x-1} = \left[\int e^{x^2-2x}\,dx + C\right]e^{2x-x^2}}$$

Lunes 16.08.2004

2.14 Ecuación de la forma: $y' = f(x, y)$

Para resolverla, si no es de ningún tipo que ya vimos, se puede intentar un cambio de variable astuto. Todo el problema es encontrarlo.

2.15 Teorema de existencia y unicidad de soluciones:

Se trata de determinar las condiciones suficientes para asegurar la existencia de una solución que tenga ciertas propiedades.

2.15.1 Ecuación de orden 1:

Sea la ecuación de orden 1:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

y T la región rectangular, de centro (x_0, y_0) definida por:

$$|x - x_0| \leq a \quad \text{y} \quad |y - y_0| \leq b$$

Supongamos que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas de x y y en cada punto de T. Entonces, existe un intervalo alrededor de x_0, $|x - x_0| \leq h$ y una función $\varphi(x)$ que tiene las propiedades siguientes:

a) $y = \varphi(x)$ es una solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ en el intervalo $|x - x_0| \leq h$

b) En el intervalo $|x - x_0| \leq h$, $\varphi(x)$ satisface la desigualdad

$$|\varphi(x) - y_0| \leq b$$

c) En x = x_0, tenemos: $\varphi(x_0) = y_0$

d) $\varphi(x)$ es única en el intervalo $|x - x_0| \leq h$ en el sentido de que es la única función que tiene todas las propiedades enunciadas en a), b) y c).

El intervalo $|x - x_0| \leq h$ puede o no ser más pequeño que el intervalo $|x - x_0| \leq a$ en el cual se impusieron las condiciones sobre f(x,y) y $\frac{\partial f}{\partial y}$

El teorema establece que si f(x,y) 'se comporta bien' cerca del punto (x_0,y_0), entonces la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tiene una solución que pasa por el punto (x_0,y_0) y esa solución es única cerca de (x_0,y_0).

Para mostrar eso, vamos a ver 3 pasos importantes:

A. **Condición de Lipschitz**
B. **Demostración del teorema de existencia**
C. **Demostración del teorema de unicidad**

e implica la prueba de que cierta sucesión de funciones tiene un límite y que la función límite es la solución deseada. La sucesión considerada será definida como sigue (iteraciones de **Piccard**):

$$y_0(x) = y_0$$
$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_0(t)\right)dt$$
$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_1(t)\right)dt$$
$$\vdots$$
$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right)dt$$

Antes de empezar la demostración, vamos a dar algunos ejemplos para ilustrar el problema.

Ejemplo 1: Demuestre que la sucesión de funciones definidas en las ecuaciones previas converge en una solución para el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = y; \qquad x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

Tenemos:

$$y_0(x) = 1$$
$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$
$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$
$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

Con base en el patrón que se desarrolla, es fácil conjeturar que:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

y se lo puede mostrar por inducción.

El límite de esta sucesión existe para todo número real x, ya que no es más que el desarrollo en serie de Maclaurin para e^x , que converge para toda x. Esto es:

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Pueden verificar que e^x es efectivamente una solución al problema de valor inicial dado.

Nota: El desarrollo de **Maclaurin** (matemático escocés) es una serie de Taylor acerca de 0:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Ver en anexo 1 algunos desarrollos para algunas funciones.

Ejemplo 2: Demuestre que la sucesión de funciones definidas en las ecuaciones previas converge en una solución para el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = x^2; \qquad x_0 = 2, \quad y_0 = 1$$

Tenemos:

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_2^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_2^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

$$y_n(x) = 1 + \int_2^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

Queda claro que el límite de esta sucesión es $\frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$ y esta función es solución del problema de valor inicial (se puede verificar facilmente).

Ahora vamos a mostrar las tres etapas del teorema.

A. Condición de Lipschitz

En las hipótesis del teorema de existencia anterior hemos supuesto que la función f y su derivada $\partial f / \partial y$ son continuas en el rectángulo T. Así, cuando (x,y_1) y (x,y_2) son puntos en T, se puede aplicar el teorema del valor medio a f como una función de y. De aquí que exista un número y* entre y_1 y y_2 tal que:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y^*\right)\left(y_1 - y_2\right)$$

La suposición de que $\partial f / \partial y$ sea continua en T nos permite asegurar que $\partial f / \partial y$ es acotada en T. Esto es, existe un número K>0 tal que:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le K$$

para todo punto en T. Como $\left(x, y^*\right)$ está en T, resulta que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y^*\right)\right| . \left|y_1 - y_2\right|$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K . \left|y_1 - y_2\right| \quad (1)$$

para toda pareja de puntos (x,y_1) y (x,y_2) en T.

La desigualdad (1) es llamada **condición de Lipschitz** para la función f. Hemos demostrado que bajo las hipótesis de nuestro teorema de existencia, la condición de Lipschitz (1) se cumple para cada par de puntos (x,y_1) y (x,y_2) en T.

B. Demostración del teorema de existencia

Vamos a usar la condición de Lipschitz en lugar de la hipótesis de continuidad de $\partial f / \partial y$. Por lo tanto, podríamos reformular el teorema de existencia en términos de la condición (1) en vez de suponer $\partial f / \partial y$ es continua en T.

Una hipótesis del teorema de existencia que acabamos de hacer es que f es continua en el rectángulo T. De ello resulta que f debe ser acotada en T. Supongamos que M>0 es un número tal que $|f(x,y)| \leq M$ para todo punto en T. Ahora tomamos h como el más pequeño de los dos números a y b/M, y definimos el rectángulo R como el conjunto de puntos (x,y) para el que:

$$|x - x_0| \leq h \quad \text{y} \quad |y - y_0| \leq b$$

Resulta evidente que R es un subconjunto de T.

Ahora, vamos a considerar la sucesión de funciones (iteraciones de **Piccard**):

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) dt$$

y vamos a demostrar el siguiente lema.

Lema 1: Si $|x - x_0| \leq h$, entonces: $|y_n(x) - y_0| \leq b$ para n=1,2,3,...

Lo vamos a demostrar por inducción.

Si $|x - x_0| \leq h$, tenemos: $|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_0(t)\right) dt \right|$

$$\leq M \left| \int_{x_0}^{x} dt \right|$$

$$\leq M \, |x - x_0| \leq Mh \leq b$$

Ahora, si $|x - x_0| \leq h$ y si $|y_n(x) - y_0| \leq b$, mostramos que $|y_{n+1}(x) - y_0| \leq b$

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_n(t)\right) dt \right|$$

$$\leq M \left| \int_{x_0}^{x} dt \right|$$

$$\leq M \, |x - x_0| \leq Mh \leq b$$

Entonces, el lema esta demostrado.

Podemos enunciar el lema 1 de una manera un poco diferente:
si $|x - x_0| \leq h$, entonces los puntos (x, $y_n(x)$) con n=0,1,2,... están en R. La condición de Lipschitz puede usarse ahora para deducir el lema siguiente.

Lema 2: Si $\left| x - x_0 \right| \leq h$, entonces:

$$| f(x, y_n(x)) - f(x, y_{n-1}(x)) | \leq K \cdot \left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| \text{para n=1,2,3,...}$$

Lema 3: Si $\left| x - x_0 \right| \leq h$, entonces:

$$| y_n(x) - y_{n-1}(x) | \leq \frac{M \cdot K^{n-1} \cdot \left| x - x_0 \right|^n}{n!} \leq \frac{M \cdot K^{n-1} \cdot h^n}{n!} \text{para n=1,2,3,...}$$

Lo vamos a demostrar por inducción.

Para n=1: Si $\left| x - x_0 \right| \leq h$, tenemos:

$$\left| y_1(x) - y_0 \right| \leq M \left| x - x_0 \right|$$

eso usando el lema 1.

Ahora, suponemos que:

$$| y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x) | \leq \frac{M \cdot K^{n-2} \cdot \left| x - x_0 \right|^{n-1}}{(n-1)!}$$

debemos mostrar que $| y_n(x) - y_{n-1}(x) | \leq \dfrac{M \cdot K^{n-1} \cdot \left| x - x_0 \right|^n}{n!}$

$$\begin{aligned} | y_n(x) - y_{n-1}(x) | &= \left| \int_{x_0}^{x} \left[f\left(t, y_{n-1}(t)\right) - f\left(t, y_{n-2}(t)\right) \right] dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \left| f\left(t, y_{n-1}(t)\right) - f\left(t, y_{n-2}(t)\right) \right| dt \\ &\leq K \int_{x_0}^{x} \left| y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t) \right| dt \end{aligned}$$

$$\leq K \int_{x_0}^{x} \frac{M \cdot K^{n-2} \cdot \left| t - x_0 \right|^{n-1}}{(n-1)!} dt \leq \frac{M \cdot K^{n-1}}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} \left| t - x_0 \right|^{n-1} dt \leq \frac{M \cdot K^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\left| x - x_0 \right|^n}{n}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Para el caso $x_0 - h \leq x \leq x_0$, el mismo tipo de argumento dará el mismo resultado. Así la demostración del lema 3 queda completa.

Vamos ahora utilizar los resultados del lema 3, comparando las dos series infinitas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right] \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M \cdot K^{n-1} h^n}{n!}$$

La segunda serie es una serie absolutamente convergente. Ademas, por el lema 3, la segunda serie domina la primera. De aquí que, por el criterio M de Weierstrass, la serie:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right]$ converge absoluta y uniformemente en el intervalo $\left| x - x_0 \right| \le h$.
Si consideramos la k-ésima suma parcial de esta serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right] = \left[y_1(x) - y_0(x) \right] + \left[y_2(x) - y_1(x) \right] + \cdots$$
$$+ \left[y_k(x) - y_{k-1}(x) \right]$$

vemos que: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right] = y_k(x)$

El enunciado de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right]$ converge absoluta y uniformemente equivale al enunciado de que la sucesión yn(x) converge uniformemente en el intervalo: $\left| x - x_0 \right| \le h$

Vamos ahora definir :

$$\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$$

y recordamos que, según la definición de la sucesión yn(x), cada yn(x) es continua en $\left| x - x_0 \right| \le h$, resulta que $\Phi(x)$ también es continua (ya que la convergencia es uniforme) y:

$$\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t) \right) dt$$

A causa de la continuidad de f y de la convergencia uniforme de la sucesión yn(x), podemos intercambiar el orden de los dos procesos de límite para demostrar que $\Phi(x)$ es una solución de la ecuación entegral:

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Phi(t))\, dt$$

Derivando, se deduce inmediato que $\Phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ en el intervalo } \left| x - x_0 \right| \le h$$

Además de $\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Phi(t))\, dt$ queda claro que $\Phi(x_0) = y_0$

Por último, como mostramos en el lema 1 que $\left| y_n(x) - y_0 \right| \le b$ para cada n y para $\left| x - x_0 \right| \le h$, deducimos que la misma desigualdad se cumple para $\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$.

Esto es, si $\left| x - x_0 \right| \le h$, entonces $\left| \Phi(x) - y_0 \right| \le b$

Así terminamos la demostración del teorema de existencia. Vamos ahora a ver la prueba de la unicidad.

C. Demostración del teorema de unicidad

Para mostrar la unicidad de la solución $\Phi(x)$, vamos a suponer que existen 2 soluciones y que son las mismas. Vamos a llamar $\Lambda(x)$ una otra función solución, o sea que verifica:

$$\frac{d\Lambda}{dx} = f\,(\,x\,,\Lambda(x)\,) = y_0$$
$$\left|\,\Lambda\,(\,x\,) - y_{\,0}\,\right| \leq b$$

para $\left|\,x - x_{\,0}\,\right| \leq h$

Entonces podemos escribir: $\Lambda(x) = y_{\,0} + \int_{x_0}^{x} f\,(\,t\,,\Lambda\,(\,t\,)\,)\,dt$

Si comparamos $\Lambda(x)$ con la función de la sucesión $y_n(x)$ anterior, vemos que:

$$|\,\Lambda(x) - y_n(x)\,| \leq \int_{x_0}^{x} \left|\,f\,(\,t\,,\Lambda\,(\,t\,)\,) - f\left(\,t\,,y_{\,n-1}\,(\,t\,)\right)\right| dt$$

Ahora, demostraremos que cuando $n \to \infty$, la integral del lado derecho anterior se aproxima a cero para $\left|\,x - x_{\,0}\,\right| \leq h$. Entonces resulta que $\Lambda(x) = \lim_{n \to \infty} y_{\,n}\,(\,x\,)$ de modo que, finalmente $\Lambda(x) = \Phi\,(\,x\,)$ en el intervalo $\left|\,x - x_{\,0}\,\right| \leq h$.

Para cualquier x dentro del intervalo $\left|\,x - x_{\,0}\,\right| \leq h$, ocurre que (x, $\Lambda(x)$) y (x, y_{n-1}(x)) están en el rectángulo R, de aquí que la condición de Lipschitz nos permita decir:

$$|\,\Lambda(x) - y_n(x)\,| \leq K \int_{x_0}^{x} \left|\,\Lambda\,(\,t\,) - y_{\,n-1}\,(\,t\,)\right| dt$$

Ahora continuemos con una demostración inductiva y limitemos nuestra atención a los valores de x mayores que x_0 (un argumento análogo logra el mismo resultado para $x_0 - h \leq x \leq x_0$).

Para n=1, tenemos:

$$|\,\Lambda(x) - y_1(x)\,| \leq K \int_{x_0}^{x} \left|\,\Lambda\,(\,t\,) - y_{\,0}\,(\,t\,)\right| dt \leq K\,b\left|\,x - x_{\,0}\,\right|$$

Queremos demostrar que si:

$$|\,\Lambda(x) - y_n(x)\,| \leq \frac{b\,.\,K^n}{(n)!}\left|\,x - x_{\,0}\,\right|^n$$

entonces tenemos:

$$|\,\Lambda(x) - y_{n+1}(x)\,| \leq \frac{b\,.\,K^{n+1}}{(n+1)!}\left|\,x - x_{\,0}\,\right|^{n+1}$$

Para $x_0 - \leq x \leq x_0$:

$$
\begin{aligned}
\left| \Lambda(x) - y_{n+1}(x) \right| &\leq \int_{x_0}^{x} \left| f\left(t, \Lambda(t)\right) - f\left(t, y_n(t)\right) \right| dt \\
&\leq K \int_{x_0}^{x} \left| \Lambda(t) - y_n(t) \right| dt \\
&\leq \frac{b \,.\, K^{n+1}}{(n)!} \int_{x_0}^{x} \left| t - x_0 \right|^n dt \\
&\leq \frac{b \,.\, K^{n+1}}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1}
\end{aligned}
$$

que es lo que queríamos mostrar.

Para $\left| x - x_0 \right| \leq h$ tenemos de la desigualdad $\left| \Lambda(x) - y_n(x) \right| \leq \frac{b \,.\, K^n}{(n)!} \left| x - x_0 \right|^n$ que

$\left| \Lambda(x) - y_n(x) \right| \leq \frac{b \,.\, K^n}{(n)!} h^n$

Cuando $n \to \infty$, la expresión del lado derecho tiende a cero. De aquí resulta que para $\left| x - x_0 \right| \leq h$, $y_n(x) \to \Lambda(x)$. Por lo tanto, $\Lambda(x)$ debe ser la misma función $\Phi(x)$ que obtuvimos antes. Esto es, la solución $\Phi(x)$ es única.

2.15.2 Ecuación lineal de orden 1:

Sea la ecuación lineal de orden 1:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Por el momento, supongamos que para $y' + a(x)y = b(x)$ existe un factor de integración positivo $\mu(x) > 0$ función solamente de x.

Entonces:

$$\mu(x)\left[\frac{dy}{dx} + a(x)y \right] = \mu(x)b(x)$$

es una ecuación exacta.

Se puede anotar esta ecuación:

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

con

$$P = \mu(x)a(x)y - \mu(x)b(x)$$

y

$$Q = \mu(x)$$

si la ecuación $\mu(x)\left[\frac{dy}{dx}+a(x)y\right]=\mu(x)b(x)$ es exacta, debe satisfacer:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

o sea:

$$\mu(x)a(x)=\frac{d\mu}{dx}$$

es decir:

$$a(x)dx=\frac{d\mu}{\mu(x)}$$

o sea:

$$\mu(x)=e^{\int a(x)dx}$$

Entonces mostramos que si la ecuación $y'+a(x)y=b(x)$ tiene un factor integrante independiente de y, entonces ese factor es de la forma: $\mu(x)=e^{\int a(x)dx}$

Nos falta ahora mostrar que la función $\mu(x)=e^{\int a(x)dx}$ es en realidad un factor de integración de la ecuación: $y'+a(x)y=b(x)$

Vamos a multiplicar la ecuación $y'+a(x)y=b(x)$ por $\mu(x)=e^{\int a(x)dx}$.
Tenemos:

$$e^{\int a(x)dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)+a(x)\left(e^{\int a(x)dx}\right)y=b(x)e^{\int a(x)dx}$$

El término izquierdo de esa ecuación es la derivada del producto:

$$y\left(e^{\int a(x)dx}\right)$$

entonces:

$$\frac{d\left[y\left(e^{\int a(x)dx}\right)\right]}{dx}=F(x)$$

con $F(x)=b(x)e^{\int a(x)dx}$ que depende solamente de x.

Entonces $e^{\int a(x)dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)+a(x)\left(e^{\int a(x)dx}\right)y=b(x)e^{\int a(x)dx}$ es exacta.

3 EDO implícitas de orden 1 : $F(x, y, y') = 0$

3.1 EDO de la forma :

$$(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x,y)\,y' + a_n(x,y) = 0$$

Pesamos esta expresión como un polinomio en y' de grado n.

Resolverla, es obtener sus raíces $y' = f_i(x,y)$ con $i = 1, n$, sea:

$$[y' - f_1(x,y)][y' - f_2(x,y)]\cdots[y' - f_n(x,y)] = 0$$

Las soluciones de la EDO inicial son las de cada EDO $\boxed{y' - f_i(x,y) = 0}$ con $i = 1, n$.

Tenemos así n familias de curvas uniparamétricas.

Hemos pasado de un polinomio de grado n a n ecuaciones diferenciales de orden 1.

<u>Ejemplo</u>: $y^2\left[(y')^2 + 1\right] = 1$

Se escribe: $(y')^2 = \dfrac{1-y^2}{y^2}$.

Así tenemos dos ecuaciones: $$dy = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,dx$$

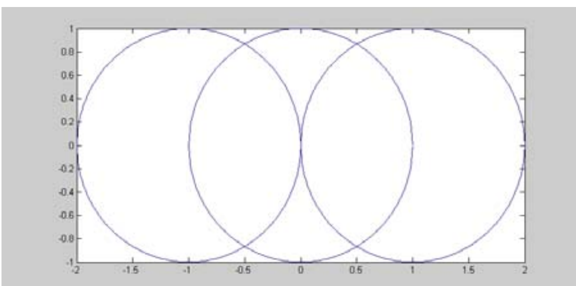
sea: $$\frac{\pm y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx .$$

Integrando: $\pm\sqrt{1-y^2} = x + C$, sea:

$$\boxed{(x+C)^2 + y^2 = 1}.$$

Son círculos de centro –C, de radio 1.

```
for i=1:3
C = 2-i;
x1=i-3;
x2=i-1;
x = x1 : 0.01 : x2 ;
xC = x + C ;
y1 = + sqrt( 1- (xC) .^2 ) ;
y2 = - sqrt( 1- (xC) .^2 ) ;
plot ( x , y1 )  ;
hold on
plot ( x , y2 )  ;
hold on
end
```



3.2 Envolvente

Si tenemos una familia uniparamétrica de curvas en el plano, la envolvente de la familia es una nueva curva tal que en cada punto de contacto de la envolvente con las curvas, la tangente de la envolvente y de la curva es la misma.

Familia de curvas de la forma: $F(x, y, C) = 0$

Para cada constante C, tenemos una curva.
Una envolvente es una curva que pasa por un punto de la curva y de misma tangente en este punto, o sea debe satisfacer:

Las envolventes se obtienen eliminando el parámetro C del sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial C} F(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Familia de curvas de la forma: $\begin{cases} x = x(t, C) \\ y = y(t, C) \end{cases}$

La envolvente se obtiene diciendo que el Jacobiano es 0 para satisfacer la condición de una envolvente:

$$Jacobiano = 0 = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial C} & \dfrac{\partial y}{\partial C} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Con el ejemplo precedente, debemos eliminar C del sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, C) = (x + C)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial C} F(x, y, C) = 2(x + C) = 0 \end{cases}$$

es decir:

$$\begin{cases} (x + C)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ (x + C) = 0 \end{cases}$$

es decir tenemos 2 líneas como envolvente: $\begin{cases} y_1 = +1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$, que intuitivamente es lo esperado para una familia de círculos trasladados horizontalmente.

3.3 Ecuación de la forma: $y = f\left(x , y' \right)$

Para resolver tal ecuación, generalmente se toma como cambio de variable:

$$\boxed{y' = p}$$

después derivamos $y = f\left(x , y' \right)$ respecto de x, así tenemos:

$$y' = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d y'}{d x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, p) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, p)\, p'$$

que es una ecuación diferencial en p, que a veces es más fácil de resolver. Si es el caso, tendremos :

$$x = \varphi\left(p , C \right)$$

y la solución final será:

$$\boxed{\begin{cases} x = \varphi\left(p , C \right) \\ y = f\left(\varphi\left(p , C \right), p \right) \end{cases}}$$

que es una familia de curvas en paramétricas.

Pero no es siempre posible resolver la ecuación en p. Vamos ahora a ver 3 casos clásicos por los cuales se puede.

3.3.1 Ecuación de la forma $y = f\left(y' \right)$

Empezamos haciendo el cambio de variable:

$$\boxed{y' = p}$$

después derivamos $y = f\left(y' \right)$ respecto de x, así tenemos:

$$y' = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d y'}{d x} = \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \frac{\partial f}{\partial y'}(p)\, p' \;=\; \frac{d f}{d p}(p)\, p'$$

que es una ecuación diferencial en p, que se puede escribir de la forma:

$$p = f'(p)\,p'$$

<u>Si $p \neq 0$</u>:

$$dx = \frac{f'(p)}{p}\,dp$$

que es de variables separadas.

Integrando: $$x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp = \varphi(p) + C$$

Las soluciones serán las curvas:

$$\boxed{\begin{cases} x = \varphi(p) + C \\ y = f(p) \end{cases}}$$

Todas las curvas tienen la misma forma, se diferencian únicamente en un desplazamiento horizontal.

<u>Si p=0</u>: la solución es: $\boxed{y = f(0)}$

Miércoles 18.08.2004

3.3.2 Ecuación de Lagrange

Es una ecuación de la forma:

$$\boxed{y + x\,\varphi\left(y'\right) + \psi\left(y'\right) = 0}$$

Empezamos haciendo el cambio de variable:

$$\boxed{y' = p}$$

Después derivamos respecto de x, así tenemos:

$$p + \varphi(p) + x\,\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} = 0$$

<u>Caso 1</u>: $p + \varphi(p) \neq 0$. Tenemos, multiplicando por dx/dp:

$$\frac{dx}{dp} + x\,\frac{\varphi'(p)}{p + \varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p + \varphi(p)} = 0$$

donde x es la función y p la variable. Si la podemos resolver, tenemos como solución:

$x = \theta(p, C)$, o sea las soluciones de la ecuación de Lagrange es:

$$\boxed{\begin{cases} x = \theta(p, C) \\ y = -\,\theta(p, C)\,\varphi(p) - \psi(p) \end{cases}}$$

<u>Caso 2</u>: $p + \varphi(p) = 0$

Significa que existe un λ tal que: $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$

Tomamos $y' = \lambda$, así tenemos:

$$y + x\,\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0$$

es decir : $$\boxed{y = x\,\lambda - \psi(\lambda)}$$

Son rectas, soluciones de la ecuación de Lagrange, **<u>soluciones singulares</u>** de la ecuación. Se dice que **<u>una solución es singular cuando la solución no es única</u>**.

Ahora, recíprocamente, si $y = x\,\lambda - \psi(\lambda)$ es solución de la ecuación de Lagrange, entonces cumple: $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$, que es verdad porque $y = x\,\lambda - \psi(\lambda)$ satisface la ecuación.

3.3.3 Ecuación de Clairaut

Es una ecuación de la forma:

$$\boxed{y - x\,y' + \psi\left(y'\right) = 0}$$

Entonces es una caso particular de ecuación de Lagrange con $\varphi\left(y'\right) = -y'$
es decir somos en el caso 2 anterior de una ecuación de Lagrange que satisface $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$. Solo aparecen rectas. Las soluciones son las familias de rectas:

$$\boxed{y = \lambda\,x - \psi(\lambda)}$$

Vamos a ver que además existe una solución particular, que es la envolvente de estas familias de rectas.

Las envolventes se obtienen despejando λ del sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = y - \lambda\,x + \psi(\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda} F(x, y, \lambda) = -x + \psi'(\lambda) = 0 \end{cases}$$

Eso no es siempre posible o simple. Nos vamos a quedar con su expresión paramétrica:

$$\begin{cases} x = \psi'(\lambda) \\ y = \lambda\,\psi'(\lambda) - \psi(\lambda) \end{cases}$$

Pero podríamos resolver una ecuación de Clairaut sin saber que es un caso particular de una ecuación de Lagrange. Al igual que una ecuación de Lagrange, podemos hacer el cambio de variable:

$$\boxed{y' = p}$$

Después derivamos la ecuación de Clairaut respecto de x, así tenemos:

$$p - p - x\,p' + \psi'(p)\,p' = 0$$

es decir:

$$\left[-x + \psi'(p)\right]p' = 0$$

Tenemos entonces 2 casos posibles:

$$\begin{cases} p' = 0 \\ \psi'(p) = x \end{cases}$$

<u>Si $p' = 0$:</u>

$$p' = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2 y}{d x^2} = 0$$

$$\int \frac{dp}{dx}\, d x = \int \frac{d^2 y}{d x^2}\, d x = \lambda \quad constante$$

$$p = \frac{d y}{d x} = \lambda \quad constante$$

$$\boxed{y = \lambda x - \psi(\lambda)}$$

<u>Si $\psi'(p) = x$:</u> las soluciones son: $\boxed{\begin{cases} x = \psi'(p) \\ y = p\psi'(p) - \psi(p) \end{cases}}$ que son las soluciones singulares

<u>Ejemplo 1</u>: Resolver: (E) $y = \left(y'\right)^2 + 2\left(y'\right)^3$
¿Cual es son las envolventes?

1. Hagamos el **<u>cambio de variable</u>**:

$$\boxed{y' = p}$$

2. **<u>Derivamos (E) respecto a x</u>**:

$$\frac{d(E)}{dx}: \qquad y' = 2\left(y'\right)y'' + 6\left(y'\right)^2 y''$$

$$p = 2(p)p' + 6(p)^2 p'$$

$$p = p\,p'(2 + 6p)$$

<u>Caso 1</u>: $p \neq 0$
En este caso, podemos dividir por p, y tenemos:

$$1 = p'(2 + 6p)$$

$$dx = dp(2 + 6p)$$

3. Integrando, tenemos como **<u>solución una familia de curvas paramétricas</u>**:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + C \\ y = (p)^2 + 2(p)^3 \end{cases}}$$

Caso 2: $p = 0$

En este caso, como (E) es : $y = \left(y\,' \right)^2 + 2\left(y\,' \right)^3 = (\,p\,)^2 + 2\,(\,p\,)^3 = 0$.

La solución es la **solución singular** : $\boxed{y = 0}$.

Para encontrar las envolventes, igualamos el Jacobiano a 0:

$$Jacobiano = 0 = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial C} & \dfrac{\partial y}{\partial C} \\ \dfrac{\partial x}{\partial p} & \dfrac{\partial y}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2+6p & 2p+6p^2 \end{vmatrix}$$

$$p(2+6p) = 0$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ p = -1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 1/27 \end{cases}$$

Para p=0, tenemos y=0 que es solución de (E).
Para p=-1/3, tenemos y=1/27 que no es solución de (E).

Como en cada punto (x,y) la tangente es $\left(\dot{x},\dot{y}\right) = \left(\dfrac{dx}{dp},\dfrac{dy}{dp}\right) = \left(2+6p, 2p+6p^2\right)$, cuando p=0, el vector tangente es (2,0), pero cuando p=-1/3, el vector tangente es (0,0), es decir que no hay vector tangente.

La envolvente es la curva y=0. La recta y=1/27 es el lugar geométrico de los puntos de retroceso de la familia de curvas solución.

```
close all; clear all;

p = [-100 : 0.1 : 100] ;

%Solucion: familia de curvas.
%Para cada C hay una curva.
%Dibujamos 10 curvas con 10 valores
%diferentes de C (por ejemplo hemos
%tomas aqua: c = C +i * 1000
%con i variando de 1 a 10
% y el valor inicial de C es -1

C = -1
for i=1:10
   C = C + i * 1000;
   x = 2*p + 3*p .^2 + C;
   y = p .^2 + 2*p .^3 ;
   plot ( x , y ) ;
   hold on
end

print -dps fig3331.ps
```