Hoja 2. Integrales múltiples

1. Halla las siguientes integrales dobles usando integración iterada:

   (a) $\iint_R (x \operatorname{sen} y - y e^x)\, dx\, dy$, donde R es el rectángulo $R = [-1,1] \times [0, \pi/2]$.

   (b) $\iint_R \sqrt{|y-x|}\, dx\, dy$, donde R es el rectángulo $R = [0,1] \times [0,2]$.

   (c) $\iint_D (xy)^2\, dx\, dy$, donde $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0,\, xy < 1,\, (x-y)(x-2y) < 0\big\}$.

   Sol.: (a) $\frac{\pi^2}{8}\left(e^{-1} - e\right)$; (b) $\frac{16\sqrt{2}}{15}$; (c) $\frac{\ln 2}{6}$.

2. Halla las siguientes integrales dobles utilizando el cambio a coordenadas polares:

   (a) $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$, donde $S = \big\{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq a^2,\, x, y \geq 0\big\}$.

   (b) $\iint_D \arctan \frac{y}{x}\, dx\, dy$, donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}\right\}$.

   (c) $\iint_D (x+y)\, dx\, dy$, donde D es la región acotada limitada por la curva $x^2 + y^2 = x + y$.

   Sol.: (a) $\frac{\pi a^3}{6}$; (b) $\frac{\pi^2}{6}$; (c) $\frac{\pi}{2}$.

3. Halla las siguientes integrales dobles utilizando un cambio de variable adecuado:

   (a) $\iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy$, donde T es el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$.

   (b) $\iint_D \frac{x^2 e^{\frac{x^2}{y}}}{y(x^2+y^2)}\, dx\, dy$, donde D es el recinto limitado por las curvas $x = y$, $x = 2y$, $x^2 = y$ y $x^2 = 2y$.

   (c) $\iint_D \sqrt{y^2 - 4x^2}\, dx\, dy$, donde D es el recinto acotado limitado por las curvas $y - 2x = -1$, $y + 2x = -1$ e $y^2 - 4x^2 = \frac{1}{4}$.

   Sol.: (a) $\frac{e - e^{-1}}{4}$; (b) $e(e-1)\left(\arctan 2 - \frac{\pi}{4}\right)$; (c) $\frac{7 - 3\ln 2}{72}$.

4. Halla las áreas de las siguientes regiones planas:

   (a) $\rho \leq 2a$, $\rho \leq 4a\cos\theta$, $a > 0$.

   (b) $\rho \geq 2$, $\rho \leq 2(1 + \cos\theta)$, e interior al primer cuadrante.

   (c) $(x^2 + y^2)^2 \leq \sqrt{xy}$, e interior al primer cuadrante.

   Sol.: (a) $\left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) a^2$; (b) $\frac{\pi + 8}{2}$; (c) $\frac{1}{4}\beta\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

5. Calcula los volúmenes de los sólidos limitados por las siguientes superficies:

   (a) $x^2 + 4y^2 = z$, $z = 0$, $y^2 = x$ y $x^2 = y$.

   (b) $z = 0$, $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ $(p, q > 0)$ y $x^2 + y^2 = a^2$.

   (c) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, $z(2x^2 + y^2) = 2$ y $z = 0$.

   (d) $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$, $x > 0$ e $y > 0$.

   (e) $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x$ y $z = 2x$.

   (f) $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$ y $z = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

   (g) $3x^2 + y^2 = 72z$ y $2x^2 + y^2 = 24(2 - z)$.

   (h) $y^2 + z^2 = -2(x-1)$ e $y^2 + z^2 = 2(x+1)$.

Sol.: (a) $\frac{3}{7}$; (b) $\frac{\pi a^4(p+q)}{8pq}$; (c) $\pi\sqrt{2}\ln 2$; (d) $\frac{9a^4}{4}$; (e) π; (f) $\frac{\pi}{6}$; (g) 24π; (h) 2π.

6. Halla el volumen del sólido limitado por el plano $z=0$, el paraboloide $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ y el cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{a}$.
   Sol.: $\frac{3ab\pi}{2}$.

7. Halla el volumen del recinto interior al cilindro $(x-2)^2+y^2=1$ y limitado por el plano $z=1$ y por el paraboloide $x^2+y^2=z$.
   Sol.: $\frac{7\pi}{2}$.

8. Halla el área de las siguientes superficies:
   (a) La parte del cilindro $x^2+z^2=a^2$ dentro del cilindro $x^2+y^2=a^2$.
   (b) La parte del cono $z^2=x^2+y^2$ dentro del cilindro $x^2+y^2=2x$.
   (c) La parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4z$ dentro del paraboloide $x^2+y^2=z$.

   Sol.: (a) $8a^2$; (b) $2\sqrt{2}\pi$; (c) 4π.

9. Halla la masa y el centro de gravedad de la región plana:
   $$F=\{(x,y)\ :\ 0\le x\le 1\,,\, x^3\le y\le\sqrt{x}\,\}$$
   si la densidad de sus puntos viene dada por $\rho(x,y)=3x$.
   Sol.: Masa: $\frac{3}{5}$; Centro de gravedad: $\left(\frac{25}{42},\frac{25}{48}\right)$.

10. Halla las siguientes integrales triples usando integración iterada:
   (a) $\iiint\limits_R \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1+x+y+z}}$, donde $R=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.
   (b) $\iiint\limits_D \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, donde D es el tetraedro acotado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ y $x+y+z=1$.

   Sol.: (a) $\frac{8}{15}\left(31-27\sqrt{3}+12\sqrt{2}\right)$; (b) $\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}$.

11. Halla las siguientes integrales triples:
   (a) $\iiint\limits_D (4x-y+z)\,dx\,dy\,dz$, donde D es el recinto acotado limitado por las superficies $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$ y $z=2-x^2$.
   (b) $\iiint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, donde D es el recinto acotado limitado por las superficies $x^2+y^2=2z$ y $z=2$.
   (c) $\iiint\limits_D x\,dx\,dy\,dz$, donde D es la región acotada del primer octante limitada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=2$ y por el paraboloide $z=x^2+y^2$.
   (d) $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$, donde V es el recinto del semiespacio $z\ge 0$ interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y al cono $x^2+y^2=z^2$.
   (e) $\iiint\limits_V \sqrt{2-x^2-y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde V es el recinto acotado del semiespacio $z\ge 0$ limitado por las superficies $x^2+y^2+z=4$ y $z^2=2(x^2+y^2)$.
   (f) $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde D es el recinto encerrado por la superficie $x^2+y^2=z(1-z)$.
   (g) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)^{3/2}\,dx\,dy\,dz$, donde V es el recinto encerrado por la superficie $x^2+y^2+z^2=z$.

   Sol.: (a) $\frac{5}{3}$; (b) $\frac{16\pi}{3}$; (c) $\frac{8\sqrt{2}}{15}$; (d) $\frac{\pi}{8}$; (e) $\pi\sqrt{2}\left(\frac{64}{15}-\frac{\pi}{2}\right)$; (f) $\frac{\pi^2}{64}$; (g) $\frac{\pi^2}{2^9}$.

12. Halla las siguientes integrales triples:

    (a) $\iiint\limits_D \sqrt{|y|}\,dx\,dy\,dz$, con $D = \{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2 \le 2x\ ,\ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$.

    (b) $\iiint\limits_D \left|x^2 - z^2\right|\,dx\,dy\,dz$, con $D = \left\{(x,y,z)\ :\ x^2+z^2 \le y \le 1\right\}$.

    Sol.: (a) $\frac{5\pi}{7}$; (b) $\frac{1}{3}$.

13. Calcula los volúmenes de los sólidos limitados por las siguientes superficies:

    (a) $x^2+y^2+z^2 = 2rz$, con $r > 0$, y $x^2+y^2 = z^2$, y que contiene al punto $(0,0,r)$ en su interior.

    (b) $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z$, $a > 0$.

    (c) $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 x$, $a > 0$.

    (d) $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2z(x^2+y^2)$.

    Sol.: (a) πr^3; (b) $\frac{\pi a^3}{3}$; (c) $\frac{\pi a^3}{3}$; (d) $\frac{2\pi}{15}$

14. Halla las siguientes integrales dobles impropias:

    (a) $\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, donde $S = \left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \le 1\right\}$.

    (b) $I(p) = \iint\limits_S \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$, $p > 0$, donde $S = \left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \ge 1\right\}$.

    (c) $\iint \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$, extendida a todo el plano y a cada uno de los recintos limitados por $y^2 = 2x$.

    Sol.: (a) 2π; (b)$I(p) = \frac{\pi}{p-1}$ si $p > 1$, e $I(p) = \infty$ si $0 < p \le 1$; (c) π, $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ y $\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\pi$.

15. Calcula el área del recinto del primer cuadrante comprendido entre el eje de ordenadas y la curva $x^2+y^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^r$, $0 < r < 1$.
    Sol.: $\frac{\pi}{4\cos\frac{\pi r}{2}}$.

16. Halla las siguientes integrales triples impropias:

    (a) $I(p,q,r) = \iiint\limits_D \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$, con $p,q,r > 0$, donde $D = \{(x,y,z)\ :\ 0 \le x,y,z \le 1\}$.

    (b) $\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

    (c) $\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$.

    Sol.: (a) $I(p,q,r) = \frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)}$ si $0 < p,q,r < 1$, y divergente en el resto de casos; (b) $\frac{\pi^2}{a}$; (c) $\pi\sqrt{\pi}$.

17. Halla el volumen del cuerpo del primer octante limitado por la superficie $x^2+y^2 = e^{-2z}\sqrt{\frac{y}{x}}$.
    Sol.: $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

18. Calcula el volumen del sólido que contiene al punto $(0,0,1)$ y está comprendido entre las superficies $z = 0$ y $z = -2\ln\sqrt{x^2+y^2}$.
    Sol.: π.

19. Halla el volumen del recinto:

    $$\Omega = \{(x,y,z)\ :\ 0 < x^2+4y^2 \le 4\ ,\ z^2 \le (x^2+4y^2)\ln\frac{4}{x^2+4y^2}\ ,\ z \ge 0\}$$

    Sol.: $2\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{3/2}$.