ESCUELA UNIVERSITARIA POLITÉCNICA DE SEVILLA
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería Mecánica.
Solución a los Problemas del Segundo Parcial (9-6-2003).

PROBLEMA 1.-
Dada la función $f(x, y) = e^{x^2-2x+y^2}$ se pide:

a) (**2 puntos**) Encontrar y clasificar los puntos críticos de $f(x, y)$.

b) (**2 puntos**) Calcular los extremos absolutos de $f(x, y)$ en la región del plano cerrada y acotada $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

c) (**2 puntos**) Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $f(x, y) = e^{x^2-2x+y^2}$ en los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 0, e^{-1})$.

d) (**2 puntos**) Hallar la derivada direccional de $f(x, y)$ en el punto $P(1, 1)$ en la dirección del vector que une P con $Q(0, -1)$. ¿Cuál es el valor máximo que alcanza la derivada direccional en el punto $P(1, 1)$?

e) (**2 puntos**) Utilizar la regla de la cadena para obtener $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ siendo $x = \operatorname{sen} s$ e $y = t^2 \ln s^2$.

Solución:

a) En primer lugar, buscamos los puntos críticos de f resolviendo el sistema $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$

Puesto que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x - 2)e^{x^2-2x+y^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{x^2-2x+y^2}$, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} (2x - 2)e^{x^2-2x+y^2} = 0, \\ 2ye^{x^2-2x+y^2} = 0, \end{cases}$$

Como $e^{x^2-2x+y^2} \neq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es $x = 1, y = 0$. Por lo tanto el único punto crítico de f es el punto $(1, 0)$.

Ahora clasificamos dicho punto crítico. Para ello, calculamos las derivadas parciales de segundo orden de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2e^{x^2-2x+y^2} + (2x - 2)^2 e^{x^2-2x+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2e^{x^2-2x+y^2} + (2y)^2 e^{x^2-2x+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y(2x - 2)e^{x^2-2x+y^2}.$$

Sustituyendo en el punto crítico obtenemos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 2e^{-1}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = 2e^{-1}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = 0$. Ya que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = 4e^{-2} > 0$$

y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2e^{-1} > 0$, obtenemos que el punto crítico $(1,0)$ es un mínimo relativo.

b) Comencemos calculando los puntos críticos de f en el interior de $R = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$. A partir del apartado anterior, tenemos $(1,0)$ es el único punto crítico de f y además pertenece al conjunto $\{(x,y) : x^2+y^2 < 4\}$, es decir, se encuentra en el interior de R.

Seguidamente restringimos la función f a la frontera de R, esto es a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = 4$. De esta forma, haciendo $x^2+y^2 = 4$ la función se expresa como $f(x,y) = e^{x^2-2x+y^2} = e^{4-2x}$. Luego debemos analizar la función $g(x) = e^{4-2x}$, donde $x \in [-2,2]$.

La derivada de g satisface $g'(x) = -2e^{4-2x} < 0$ para todo $x \in (-2,2)$, luego el máximo absoluto de g se alcanza en el punto $x = -2$ y el mínimo absoluto en el punto $x = 2$. Obsérvese que de la expresión $x^2+y^2 = 4$ con $x = \pm 2$, se deduce $y = 0$ y por consiguiente los posibles valores donde f restringida a la circunferencia $\{(x,y) : x^2+y^2 = 4\}$ alcanza su máximo absoluto y su mínimo absoluto son $(2,0)$ y $(-2,0)$.

Sólo nos queda evaluar f en los puntos $(1,0), (2,0)$ y $(-2,0)$:

$$f(1,0) = e^{-1} = \frac{1}{e}, \qquad f(2,0) = e^{4-4} = e^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad f(-2,0) = e^{4+4} = e^8,$$

luego el mínimo absoluto de f en la región R se alcanza el punto $(1,0)$ y su valor es $f(1,0) = e^{-1}$ y el máximo absoluto se alcanza en en el punto $(-2,0)$ y su valor es $f(-2,0) = e^8$.

c) Puesto que el punto $(1,0)$ es un punto crítico de f (es decir, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$) resulta que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en el punto $B(1,0,e^{-1})$ es horizontal y su ecuación viene dada por $z = e^{-1}$.

El plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en el punto $A(0,0,1)$ tiene por ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) - (z-1) = 0.$$

Utilizando las derivadas parciales obtenidas en el primer apartado obtenemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ y por consiguiente, el plano tangente tiene de ecuación $(-2)(x-0) + 0(y-0) - (z-1) = 0$, esto es,

$$-2x - z + 1 = 0.$$

d) El vector que une el punto $P(1,1)$ con el punto $Q(0,-1)$ es $\overrightarrow{PQ} = (0,-1) - (1,1) = (-1,-2)$. Normalizamos este vector y obtenemos el vector unitario $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}, \dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right)$. Para calcular la derivada direccional pedida necesitamos el gradiente de f en el punto $(1,1)$. Utilizando de nuevo las derivadas parciales obtenidas en el primer apartado obtenemos

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (0,2)$$

y la derivada direccional solicitada es

$$D_{\vec{u}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \vec{u} = (0,2) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

El valor máximo de la derivada direccional de f en el punto $(1,1)$ es $\|\nabla f(1,1)\| = \|(0,2)\| = 2$.

e) En primer lugar expresamos y en la forma $y = t^2 \ln s^2 = 2t^2 \ln s$.

Aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = (2x-2)e^{x^2-2x+y^2} \cdot \cos(s) + 2ye^{x^2-2x+y^2} \cdot \left.\frac{2t^2}{s}\right|_{x=\operatorname{sen} s, y=2t^2\ln s} =$$

$$= e^{\operatorname{sen}^2 s - 2\operatorname{sen} s + 4t^4 \ln^2 s}\left((2\operatorname{sen} s - 2)\cos(s) + \frac{8t^4}{s}\ln s\right).$$

Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = (2x-2)e^{x^2-2x+y^2} \cdot 0 + 2ye^{x^2-2x+y^2} \cdot 4t\ln s\Big|_{x=\operatorname{sen} s, y=2t^2\ln s} =$$

$$= 16t^3 \ln^2 s e^{\operatorname{sen}^2 s - 2\operatorname{sen} s + 4t^4 \ln^2 s}.$$

PROBLEMA 2.-

a) (**3 puntos**) Calcular las integrales $\displaystyle\int xe^{-x}dx \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

b) (**2 puntos**) Determinar si alguna de las integrales impropias siguientes son convergentes y calcular su valor cuando lo sean $\displaystyle\int_1^{\infty} xe^{-x}dx \qquad \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

c) (**5 puntos**) Calcular el volumen generado por la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$, $y = 1$ y $x = 0$, cuando dicha región gira:

c.1) En torno del eje OX.

c.2) En torno del eje OY.

c.3) En torno de la recta $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

a) Calculamos la intergal $\displaystyle\int xe^{-x}dx$ aplicando el método de integración por partes.

$\displaystyle\int xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C.$

Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ realizamos el cambio de variable $\left\{\begin{array}{c} x = 2\operatorname{sen} t \\ dx = 2\cos t dt \end{array}\right.$ y tenemos en cuenta que $\operatorname{sen}^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \frac{4\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}} 2\cos t dt = \int \frac{8\operatorname{sen}^2 t}{2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\cos t dt \\
&= \int \frac{4\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}\cos t dt = 4\int \overset{2}{\operatorname{sen}} t dt = 4\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt \\
&= \int 2dt - \int 2\cos 2t dt = 2t - \operatorname{sen} 2t + C = 2t - 2\operatorname{sen} t \cdot \cos + C \\
&= 2\arcsen\left(\frac{x}{2}\right) - 2\operatorname{sen} t \cdot \cos t + C = 2\arcsen\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + C \\
&= 2\arcsen\left(\frac{x}{2}\right) - x\sqrt{4-x^2} + C.
\end{aligned}$$

b) Utilizando el primer apartado

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} xe^{-x}dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x}(x+1)\right]_1^b\\ &= \lim_{b\to+\infty} -e^{-b}(b+1)+2e^{-1} = 2e^{-1}\end{aligned}$$

ya que $\lim_{b\to+\infty} -e^{-b}(b+1) = 0\cdot\infty$ proporciona una indeterminación que resolvemos aplicando la regla de L'Hôpital, $\lim_{b\to+\infty} -\frac{b+1}{e^b} = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{e^b} = 0.$

En resumen, la integral impropia $\int_1^{\infty} xe^{-x}dx$ es convergente y su valor es $\int_1^{\infty} xe^{-x}dx = 2e^{-1}$.

La función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ es continua en el intervalo $[0,2)$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$, por tanto, aplicando el apartado anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \lim_{a\to 2^-}\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \lim_{a\to 2^-}\left[2\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) - x\sqrt{4-x^2}\right]_0^a\\ &= \lim_{a\to 2^-}\left(2\,\text{arcsen}\left(\frac{a}{2}\right) - a\sqrt{4-a^2}\right) = 2\,\text{arcsen}\,1 = 2\frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

Es decir, la segunda integral impropia es también convergente y su valor es $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \pi$.

c) Calculamos el primer volumen aplicando el método de discos y los dos últimos aplicando el método de capas.

c.1) Obtenemos el volumen pedido V en este apartado como la diferencia de dos volúmenes $V = V_1 - V_2$, siendo V_1 el volumen del cilidro que se genera haciendo girar la sección acotada por las rectas $y=1, y=0, x=\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje OX y V_2 el volumen del solido de revolución que se genera haciendo girar la sección acotada por $y=\text{sen}\,x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$ en torno al eje OX. Es decir,

$$V_1 = \frac{\pi}{2}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\begin{aligned}V_2 &= \pi\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2\,x dx = \pi\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \pi\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}dx - \int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2x}{2}\,dx\right)\\ &= \pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \left[\frac{\text{sen}\,2x}{4}\right]_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\pi - \text{sen}\,\pi + \text{sen}\,0\right) = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

Luego, el volumen es $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$.

c.2) El volumen solicitado se obtiene directamante por el método de las capas

$$V = 2\pi\int_0^{\pi/2} x(1-\text{sen}\,x)dx.$$

Ahora, aplicando el método de integración por partes obtenemos

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{\pi/2} x(1-\operatorname{sen} x)dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = (1-\operatorname{sen} x)dx & v = x + \cos x \end{array}\right] \\
&= 2\pi \left(x\,(x+\cos x)|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (x+\cos x)\,dx \right) = 2\pi \left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left[\frac{x^2}{2} + \operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/2} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} - 1 \right) = 2\pi \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi.
\end{aligned}
$$

c.3) Aplicando de nuevo el método de capas tenemos que el volumen pedido viene dado por

$$
V = 2\pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)(1-\operatorname{sen} x)dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sen} x)dx - 2\pi \int_0^{\pi/2} x(1-\operatorname{sen} x)dx.
$$

Notemos que la segunda integral ha sido calculada en el apartado c.2) y su valor es $2\pi \int_0^{\pi/2} x(1-\operatorname{sen} x)dx = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi$, así sólo debemos calcular la primera de las integrales

$$
\begin{aligned}
2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sen} x)dx &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}dx + \pi^2 \int_0^{\pi/2} (-\operatorname{sen} x)\,dx \\
&= 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \pi^2 \left[\cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{2} - \pi^2
\end{aligned}
$$

y por consiguiente, el volumen pedido es $V = \frac{\pi^3}{2} - \pi^2 - \left(\frac{\pi^3}{4} - 2\pi\right) = \frac{\pi^3}{4} - \pi^2 + 2\pi.$

PROBLEMA 3.-

a) **(4 puntos)** Calcular el volumen del sólido limitado por las superifies de ecuaciones $z = 6-x^2-y^2$ y $z = \sqrt{x^2+y^2}$, utilizando integración múltiple.

b) **(3 puntos)** Calcular la integral doble $\iint_R e^{y^3}dA$, siendo R la región del plano limitada por las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{x}; y = 1; x = 0.$

c) **(3 puntos)** Sabiendo que $\ln z + x^2 - y + z - 1 = 0$, define a z como función implícita de x e y obtener $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Solución:

a) Como un primer paso para la obtención del volumen limitado por el paraboloide $z = 6 - x^2 - y^2$ y el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$, calculamos la curva intersección de ambas superficies. Esto nos lleva a la resolución del sistema de ecuaciones

$$
\left\{ \begin{array}{c} z = 6 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} z = 6 - \left(x^2+y^2\right) \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right. \Rightarrow z = 6 - z^2.
$$

Las soluciones de esta ecuación son $z = -3, z = 2$ y descartamos la solución negativa pues $z = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$. Por tanto, el paraboloide y el plano intersecan en la circunferencia $x^2+y^2 = 4, z = 2$, cuya proyección sobre el plano $z = 0$, es la circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = 4$.

De esta forma, el volumen limitado por el cono y el paraboloide puede expresarse mediante una integral doble en la forma

$$V = \iint_R \left(6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dA,$$

donde R es el círculo $R = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\right\}$.

Ahora resolvemos la integral doble aplicando un cambio a coordenadas polares. Puesto que la región R puede escribirse en coordenadas polares en la forma $R = \{(\theta, r) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2\}$, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \left(6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(6 - r^2 - r\right) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} d\theta = \frac{32}{3}\pi. \end{aligned}$$

Utilizando integrales triples y coordenadas cilíndricas el volumen sería

$$V = \iiint\limits_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{6-r^2} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(6 - r^2 - r\right) r dr d\theta = \frac{32}{3}\pi.$$

b) Calculamos $\iint_R e^{y^3} dA$ describiendo la región R como una región horizontalmente simple. La región R puede expresarse como $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\right\}$. Por consiguiente,

$$\iint\limits_R e^{y^3} dA = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} dx dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \left[\frac{e^{y^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{e-1}{3}.$$

c) Si la ecuación $\ln z + x^2 - y + z - 1 = 0$, define a z como función implícita de x e y, derivando respecto de x se obtiene

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2x + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

de donde $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2xz}{1+z}$.

Derivando la ecuación inicial respecto de y conseguimos

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 1 + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (*)$$

y por tanto, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{1+z}$.

Si ahora derivamos la igualdad (*) respecto de x deducimos que

$$-\frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

y teniendo en cuenta la anteriores valores obtenidos de la derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se consigue la igualdad

$$\frac{2x}{(1+z)^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

y por consiguiente, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{2xz}{(1+z)^3}$.

PROBLEMA 4.-

Consideremos el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = 6xy\,\vec{i} + \left(ax^2 + y^2\right)\vec{j}$, donde a es una constante real. Y sea C el camino que va desde A hasta D pasando por B. (Véase la Figura 1).

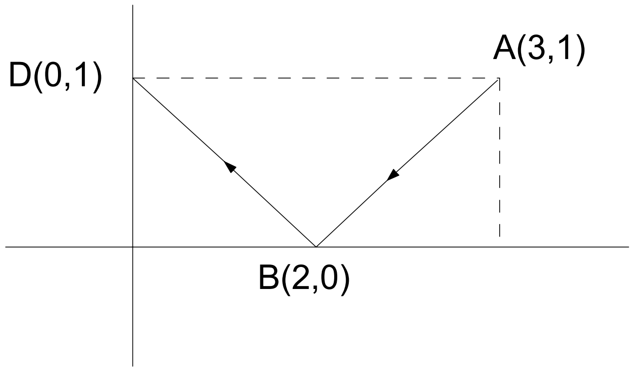

Figura 1: Representación de la curva C.

Se pide:

a) (**3 puntos**) ¿Existe algún número a tal que el campo $\vec{F}(x,y)$ sea conservativo? En caso afirmativo, encontrar una función potencial de $\vec{F}(x,y)$.

b) (**2 puntos**) Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_C 6xydx + \left(3x^2 + y^2\right)dy$.

c) (**3 puntos**) Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_C (x-y)\,ds$.

d) (**2 puntos**) Para $a = 8$, descomponer el campo vectorial $\vec{F}(x,y)$ en la forma

$$\vec{F}(x,y) = \vec{F_1}(x,y) + \vec{F_2}(x,y),$$

siendo $\vec{F_1}(x,y)$ conservativo. Utilizar esta información para calcular la integral $\displaystyle\int_C 6xydx + \left(8x^2 + y^2\right)dy$.

Solución:

a) Tomando $M(x,y) = 6xy$ y $N(x,y) = \left(ax^2 + y^2\right)$, el campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo si $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$. Imponiendo esta condición se encuentra la igualdad $6x = 2ax$, luego $\vec{F}$ es conservativo si y sólo si $a = 3$.

Busquemos una función potencial f para $\vec{F}$. La función potencial $f(x,y)$ satisface $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) = 6xy$, de donde

$$f(x,y) = \int 6xydx = 3x^2y + \varphi(y)$$

De la relación $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y) = 3x^2 + y^2$, obtenemos $3x^2 + \varphi'(y) = 3x^2 + y^2 \Longrightarrow \varphi'(y) = y^2 \Longrightarrow \varphi(y) = \dfrac{y^3}{3}$+cte y una función potencial para $\vec{F}$ es $f(x,y) = 3x^2y + \dfrac{y^3}{3}$.

b) Por el apartado anterior, el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = 6xy \overrightarrow{i} + \left(3x^2+y^2\right) \overrightarrow{j}$ es conservativo y $f(x,y) = 3x^2y + \dfrac{y^3}{3}$ es una función potencial. Por tanto, aplicando el Teorema Fundamental de Integrales de Línea, resulta que

$\displaystyle\int_C 6xydx + \left(3x^2+y^2\right)dy = f(D) - f(A) = f(0,1) - f(3,1) = \frac{1}{3} - (27 + \frac{1}{3}) = -27.$

c) Llamamos $C = C_1 \cup C_2$ al camino de la Figura 1. Una de las posibles parametrizaciones para dicho camino es la siguiente $C_1 \equiv \begin{cases} x = 3-t \\ y = 1-t \end{cases}, \quad t \in [0,1]$ y $C_2 \equiv \begin{cases} x = 2-2t \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [0,1]$.
La integral de linea del campo escalar será:

$$\begin{aligned} \int_C (x-y)\,ds &= \int_{C_1} (x-y)\,ds + \int_{C_2} (x-y)\,ds \\ &= \int_0^1 (3-t-1+t)\sqrt{1+1}dt + \int_0^1 (2-2t-t)\sqrt{1+4}dt \\ &= 2\sqrt{2} + \sqrt{5}/2. \end{aligned}$$

d) Es fácil ver que $\overrightarrow{F}(x,y) = 6xy \overrightarrow{i} + \left(8x^2+y^2\right) \overrightarrow{j} = 6xy \overrightarrow{i} + \left(3x^2+y^2\right) \overrightarrow{j} + 5x^2 \overrightarrow{j}$, por tanto, $\overrightarrow{F}(x,y) = \overrightarrow{F_1}(x,y) + \overrightarrow{F_2}(x,y)$, siendo $\overrightarrow{F_1}(x,y) = 6xy \overrightarrow{i} + \left(3x^2+y^2\right) \overrightarrow{j}$ conservativo (ver primer apartado) y $\overrightarrow{F_2}(x,y) = 5x^2 \overrightarrow{j}$. De esta manera, la integral pedida puede calcularse mediante

$$\int_C 6xydx + \left(8x^2+y^2\right)dy = \int_C 6xydx + \left(3x^2+y^2\right)dy + \int_C 5x^2dy.$$

Como la primera de las integrales fue obtenida en el segundo apartado, sólo vamos a calcular la segunda de las integrales.

$$\begin{aligned} \int_C 5x^2dy &= \int_{C_1} 5x^2dy + \int_{C_2} 5x^2dy \\ &= 5\int_0^1 (3-t)^2(-1)dt + 5\int_0^1 (2-2t)^2(1)dt \\ &= \left[\frac{5(3-t)^3}{3} - \frac{5(2-2t)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{40}{3} - 45 + \frac{20}{3} = -25. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_C 6xydx + \left(8x^2+y^2\right)dy = -27 - 25 = -52.$