Práctica 6. Extremos Condicionados

6.1 Introducción

El problema que nos planteamos podría enunciarse del modo siguiente:

> *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $M \subset A$. Consideremos la restricción de f a M, $f|_M$. ¿Podemos determinar los extremos absolutos de $f|_M$?.*

En realidad la pregunta anterior plantea dos cuestiones:

1. En primer lugar, debemos garantizar que $f|_M$ alcanza los valores máximo y/o mínimo, lo que generalmente haremos mediante argumentos de compacidad. (Recordemos que el *Teorema de Weierstrass* establece que toda función real, continua, definida en un compacto está acotada y alcanza su máximo y su mínimo).
2. En segundo lugar, habrá que hacer el cálculo efectivo de los valores extremos de $f|_M$. El método que emplearemos para hacer dicho cálculo será el de *Los Multiplicadores de Lagrange.*

Comenzaremos analizando la situación más simple. Supongamos que M es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que puede expresarse del siguiente modo:

$$M := \{x \in U : g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$$

siendo U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $g_1, \dots, g_m$ funciones de clase C^1, de modo que la matriz Jacobiana $(D_i g_j(x))$ tiene rango máximo para cada $x \in M$, lo que abreviaremos diciendo que M es una *k-variedad (k=n–m) definida por la función g de coordenadas* $g_1, \dots, g_m$. El teorema de los Multiplicadores de Lagrange establece que los extremos de $f|_M$ son puntos críticos de la función $\Phi(x) = f(x)+\lambda_1 g_1(x)+\ldots+\lambda_m g_m(x)$, para ciertos valores de $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. En la práctica, se plantea y se intenta resolver el sistema de $n+m$ ecuaciones dado por:

$$\begin{cases} D_r\Phi(x) = 0, & r = 1, 2, \dots, n \\ g_k(x) = 0, & k = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

para las $n + m$ incógnitas $\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n$.

Observemos que el el Teorema de Lagrange da una condición necesaria pero no suficiente para que un punto sea extremo relativo de $f|_M$. Si el conjunto M es compacto, el Teorema de Weierstrass nos garantiza la existencia de al menos dos puntos x y x' en los que f alcanza el máximo y el mínimo respectivamente.

6.2 Ejemplos

Ejemplo 1 *Calcular los valores máximo y mínimo de la función* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *sobre la superficie del elipsoide*

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0\}.$$

Al ser M un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3, f$ alcanza los valores máximo y mínimo en M. Además M es una variedad, por lo que aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.

Consideremos la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1)$. Sabemos que los extremos relativos de $f|_M$ son puntos críticos de F para algún valor de λ. Así pues, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda \frac{x}{64} &= 0 \\ 2y - 2\lambda \frac{y}{36} &= 0 \\ 2z - 2\lambda \frac{z}{25} &= 0 \\ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos que, o bien $x = 0$ o bien $\lambda = 64$. En el primer caso, sustituyendo en las otras tres ecuaciones obtendríamos las soluciones $(0, 0, \pm 5), (0, \pm 6, 0)$.
Si $\lambda = 64$, al sustituir en las ecuaciones segunda y tercera obtenemos $y = z = 0$ y, llevando estos valores a la cuarta nos queda $x = \pm 8$. Finalmente, deberemos calcular $f(\pm 8, 0, 0), f(0, \pm 6, 0), f(0, 0, \pm 5)$, de donde resulta que el valor máximo de $f|_M$ es 64 y el mínimo es 25.

Nota. En ocasiones podemos estudiar los valores extremos de una función en un conjunto que no es compacto reduciéndolo a un problema de extremos sobre un compacto.

Ejemplo 2 *Calcular la distancia mínima del punto* $(0, b)$ *a la parábola* $x^2 - 4y = 0$.

Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + (y - b)^2$. Hay que calcular el mínimo de la raíz cuadrada de f restringida al conjunto $M := \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 - 4y = 0\}$. Es evidente que f y su raíz cuadrada alcanzarán el valor mínimo (si es que lo alcanzan) en el mismo punto. Por este motivo calcularemos el mínimo de $f|_M$. Puesto que M es una variedad utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello sea $F(x, y) = x^2 + (y - b)^2 + \lambda(x^2 - 4y)$. Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x &= 0 \\ 2(y - b) - 4\lambda &= 0 \\ x^2 - 4y &= 0 \end{aligned}$$

Resulta que si $b < 2$, obtenemos la solución $x = y = 0$, con lo cual la distancia mínima del punto a la parábola será, si existe tal valor mínimo, $|b|$. Si $b \geq 2$ tenemos tres posibles soluciones: $(0, 0), (\pm 2\sqrt{b - 2}, b - 2)$. Evaluando f en estos tres puntos resulta que la distancia mínima del punto $(0, b)$ a la parábola será, si existe tal mínimo, $2\sqrt{b - 1}$.

Por último, aunque M no es compacto, observemos que si un punto (x,y) se encuentra sobre la parábola pero $x \geq b$, la distancia de (x,y) a $(0,b)$ es mayor que el valor obtenido por el método de los multiplicadores, pero como el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y = 0,\ x \leq b\}$$

si que es compacto , la distancia de $(0,b)$ a dicho conjunto y, en consecuencia, la distancia a M, alcanza un mínimo.

Nota: Supongamos a continuación que M es un conjunto compacto cuyo interior no es vacío y cuya frontera es una variedad. En tal caso, si uno de los extremos de $f|_M$ se alcanza en el interior dicho punto crítico de f, mientras que si se alcanza en la frontera deberemos proceder como en el primer ejemplo. Así pues, la determinación de los extremos de $f|_M$ comporta dos etapas:

1) Hallar los puntos de máximo y mínimo relativos que sean interiores a M, trabajando en el conjunto abierto $int(M)$, y calcular los valores de la función en los puntos obtenidos.
2) Hallar los puntos de extremo que pertenezcan a la frontera de M, y calcular los valores de la función en esos puntos.
Finalmente se tomará el mayor de los valores obtenidos en las etapas 1) y 2), y éste será el máximo absoluto. Para el mínimo tomaremos el menor de los valores obtenidos.

Ejemplo 3 *Determinar los extremos absolutos de la función*
$f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x$ *en el conjunto* $M = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 5\}$.

El conjunto M es compacto, su interior es la bola abierta de centro el origen y radio $\sqrt{5}$ y su frontera es la correspondiente circunferencia. Procederemos en dos etapas:

1) Buscamos los posibles extremos relativos de f en $int(M)$. Para ello calculamos los puntos críticos de f, es decir, resolvemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 0 \\ -6y &= 0 \end{aligned}$$

obteniendo la solución $(\frac{1}{2}, 0)$ y comprobamos que dicho punto pertenece a $int(M)$.

2) Determinamos los posibles extremos relativos de $f|_{\partial M}$. Para ello consideramos la función $F(x,y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ y determinamos sus puntos críticos resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x - 2 + 2\lambda x &= 0 \\ -6y + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se sigue que o bien $y = 0$ o bien $\lambda = 3$. En el primer caso obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$. Si $\lambda = 3$, de la primera ecuación deducimos que $x = \frac{1}{5y}$, y usando la tercera ecuación se tiene que $y = \pm\frac{2\sqrt{31}}{5}$.

Para terminar calculamos $f(\frac{1}{2},0) = -\frac{1}{2}$, $f(\sqrt{5},0) = 10 - 2\sqrt{5}$, $f(-\sqrt{5},0) = 10 + \sqrt{5}$, $f(\frac{1}{5}, \pm\frac{2\sqrt{31}}{5}) = \frac{84}{5}$, de donde resulta que el mínimo valor de $f|_M$ es $-\frac{1}{2}$ y el máximo es $\frac{84}{5}$.

Nota. A veces la frontera de M no es una variedad diferenciable, sino la unión de un número finito de variedades (convendremos en llamar *0-variedades* a los puntos). En estos casos habrá que desglosar la segunda etapa en la resolución de tantos problemas de extremos condicionados como variedades diferenciables tengamos. Por ejemplo, si M es un polígono en el plano, su frontera está formada por segmentos de diferentes rectas, es decir, su frontera es una unión de 1-variedades (los lados exceptuando los vértices) y de 0-variedades (los vértices).

6.3 Ejercicios:

Ejercicio 6.1 *Determinar los extremos absolutos de f sobre el conjunto M:*

6.1.1 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y,z) := 2x^2 + y^2 + z^2 - xy,$

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1\}$$

6.1.2 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y,z) := x(y+z),$

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y + z = 1\}$$

6.1.3 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2,$

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : b^2y^2 + z^2 = 1,\ x - y = 0\}, b > 0$$

6.1.4 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y,z) := xy + z,$

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

6.1.5 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{2} + xy,$

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq -1,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$$

6.1.6 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) := x^2 + \frac{y}{2},$

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ y - x^2 \leq 0\}$$

6.1.7 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) := x^2 + 3y^2 + x,$

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

Ejercicio 6.2 *Por el método de los Multiplicadores de Lagrange calcular la mínima distancia entre los siguientes conjuntos:*
1. La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $x + y = 2$.
2. El punto (a_1, a_2, a_3) y el plano $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$
3. El elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y el plano $x + y + z = 2$ con $a > b > c > 0$.

Ejercicio 6.3 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como* $f(x) := \sum_{i=1}^{n} b_i.x_i^2$ *donde* $b_i > 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$. *Sea* $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ *y sea* M *el hiperplano* $M := \{x \in \mathbb{R} | a.\ x = 1\}$. *Estudiar los extremos de* f *en* M.

Ejercicio 6.4 *Calcular el paralelepípedo de mayor volumen inscrito en el elipsoide:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ \textit{donde } a, b, c > 0$$

Ejercicio 6.5 *Encontrar el máximo de la función* $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1.x_2 \ldots x_n)^2$ *con la condición de que* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. *Utilizar el resultado obtenido para deducir la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, válida para los números reales positivos:*

$$(a_1 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

Ejercicio 6.6 *Trazar por un punto dado un plano que forme con los planos coordenados un tetraedro de volumen mínimo.*

Ejercicio 6.7 *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como* $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + bxy + az$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$.
(a) Obtener una relación entre a y b para que $(1, 1, 1)$ *sea extremo condicionado sobre la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.
(b) Supuesta verificada la condicón anterior estudiar para que valores de a y b el punto $(1, 1, 1)$ *es máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.*