

Aplicación: Teorema de la Función Implícita

Prof. Marcelo Leseigneur

Prof. Aux. Sebastián Court , Rodrigo Assar

Considere el espacio $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ dotado de la norma $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ y el espacio $X = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ dotado de la norma $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty$.

Para $Z = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y para todo $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ fijo, se define $F : X \times \mathbb{R} \rightarrow Z$ por:

$$F(x, \epsilon) = (x'' + x^2 - \epsilon f, x(0), x(1))$$

1. Muestre que F es de clase \mathcal{C}^1 y que, para todo $x, u \in X$ $\epsilon, \eta \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$DF(x, \epsilon)(u, \eta) = (u'' + 2ux - \eta f, u(0), u(1))$$

2. Muestre que $D_1 F(0, 0)$ es una biyección de X en Z . Deduzca que para todo ϵ cercano a cero, existe una solución de:

$$x''(t) + (x(t))^2 = \epsilon f(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$x(0) = x(1) = 0$$

Solución: Dotemos a Z de la norma $\|(x, a, b)\| = \|x\|_\infty + |a| + |b|$ y a $X \times \mathbb{R}$ de la norma $\|(x, \epsilon)\| = \max(\|x\|_\infty, |\epsilon|)$. Note que

$$\begin{aligned} F(x + u, \epsilon + \eta) &= (x'' + u'' + (x + u)^2 - (\epsilon + \eta)f, x(0) + u(0), x(1) + u(1)) \\ &= F(x, \epsilon) + (u'' + 2ux - \eta f, u(0), u(1)) + (u^2, 0, 0) \end{aligned}$$

y $\|(u^2, 0, 0)\| \leq \|u\|_\infty^2$.

Definamos $L(u, \eta) = (u'' + 2ux - \eta f, u(0), u(1))$ y observe que L es lineal (eso es claro) y que,

$$\begin{aligned} \|L(u, \eta)\| &\leq \|u''\|_\infty + 2\|u\|_\infty \|x\|_\infty + |\eta| \|f\|_\infty + |u(0)| + |u(1)| \\ &\leq (3 + 2\|x\|_\infty) \|u\|_\infty + |\eta| \|f\|_\infty \\ &\leq (3 + 2\|x\|_\infty + \|f\|_\infty) \|(u, \eta)\| \end{aligned}$$

y luego la aplicación lineal L es continua (recuerden Control 1).

Ahora, probemos que F es diferenciable en (x, ϵ) y que $DF(x, \epsilon) = L$.

Lo anterior se deduce de,

$$\|F(x + u, \epsilon + \eta) - F(x, \epsilon) - L(u, \eta)\| \leq \|u\|_\infty^2 \leq \|(u, \eta)\|^2$$

Por último, para todo $(x_1, \epsilon_1), (x_2, \epsilon_2), (u, \eta) \in X \times \mathbb{R}$, se tiene que

$$(DF(x_1, \epsilon_1) - DF(x_2, \epsilon_2))(u, \eta) = (2u(x_1 - x_2), 0, 0)$$

y luego,

$$\begin{aligned} \|(DF(x_1, \epsilon_1) - DF(x_2, \epsilon_2))(u, \eta)\| &\leq 2 \|u\|_\infty \|x_1 - x_2\|_\infty \leq 2 \|x_1 - x_2\|_\infty \|(u, \eta)\| \\ \Rightarrow \|DF(x_1, \epsilon_1) - DF(x_2, \epsilon_2)\| &\leq 2 \|x_1 - x_2\|_\infty \end{aligned}$$

Y por lo tanto DF es continua.

Ahora probaremos que $D_1F(0, 0)$ es una biyección de X en Z .

Para $u \in X \times \mathbb{R}$ se tiene que $D_1F(0, 0)(u) = DF(0, 0)(u, 0)$, luego

$$D_1F(0, 0)(u) = (u'', u(0), u(1))$$

Sea $(v, a, b) \in Z$, luego si $D_1F(0, 0)(u) = (v, a, b)$, tendremos que por el teorema de existencia y unicidad de E.D.O, existirá una única solución $u \in X$ que satisface $u'' = v$ con $u(0) = a, u(1) = b$. Luego, $D_1F(0, 0)$ es una biyección y por lo tanto, $D_1F(0, 0)$ es invertible.

Por el teorema de la función implícita, existe un intervalo I que contiene al cero y una función $\varphi : I \rightarrow X$ tal que $F(\varphi(\epsilon), \epsilon) = 0$ para todo $\epsilon \in I$.

Por lo tanto $x = \varphi(\epsilon)$ con $\epsilon \in I$ sera solución de la ecuación. ■