CAPÍTULO 7
CÁLCULO INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

- Calcular integrales dobles en coordenadas cartesianas y polares, sobre dominios sencillos.
- Usar la integral doble para el cálculo de áreas.
- Calcular integrales triples en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, sobre dominios sencillos.
- Usar la integral triple para el cálculo de volúmenes.

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

2.1. Integrales dobles sobre dominios sencillos

Sea $f(x,y)$ una función continua para los valores $(x,y) \in R$ donde

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d \right\} = [a,b] \times [c,d].$$

Para cada y_0 fijamos la función definida por $F(x) = f(x, y_0)$ que es continua y por lo tanto integrable es $[a,b]$. La integral

$$\int_a^b F(x,y)dx = G(y)$$

es una función continua y como consecuencia integrable en $[c,d]$.

Definiremos la **integral doble** sobre el *rectángulo* $R = [a,b] \times [c,d]$ de la función $f(x,y)$ como

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Ejemplo. Sea $R = [0,1] \times [0,2]$, vamos a calcular $\iint_R f(x,y)dxdy$ donde $f(x,y) = xy$.

$$\iint_R xydxdy \quad = \quad \int_0^2 \left(\int_0^1 xydx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^2 \frac{y}{2} dy = \left[\frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2} = 1.$$

□

Teorema de Fubini: *Si $R = [a,b] \times [c,d]$ se cumple que*

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx,$$

expresión válida siempre que $f(x,y)$ sea continua en R.

El concepto de *integral doble* se puede extender a conjuntos que no sean necesariamente rectángulos en $\mathbb{R}^2$. Son conjuntos acotados más generales que en algunas referencias bibliográficas se denominan **conjuntos medibles Jordan**. No vamos a intentar definir e identificar matemáticamente estos conjuntos; para nuestras aplicaciones nos bastará con saber que *recintos planos D de puntos que estén limitados por una curva cerrada* son conjuntos medibles Jordan en los que tiene sentido definir la integral doble (ver Figura 7.1).

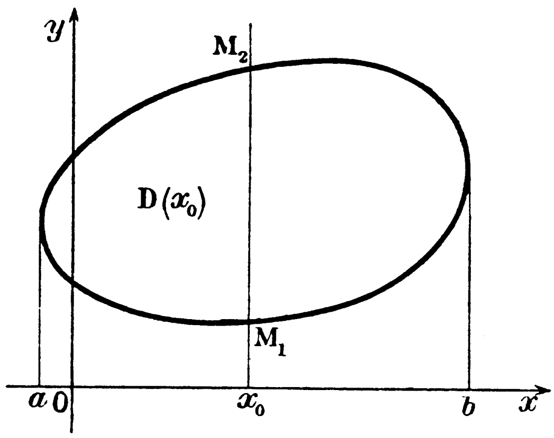

Figura 7.1: Conjunto medible Jordan.

Para calcular la integral de $f(x,y)$ en el recinto D procederemos como sigue. La recta $x = x_0$ corta a D en dos puntos M_1 y M_2 de ordenadas respectivas $y_1(x_0)$ e $y_2(x_0)$. Cuando variamos $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos funciones continuas. Así

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx \right) dy.$$

¿Qué ocurre si tomamos las rectas $y = y_0$ y los puntos de corte con abscisas $x_1(y_0)$ y $x_2(y_0)$, siendo ambas funciones continuas para $c \leqslant y \leqslant d$?

En el caso de que $f(x,y)$ sea continua en D (caso para el que nos restringiremos en la práctica) se tiene por el Teorema de Fubini que

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dy \right) dx$$

¿Qué ocurre cuando las rectas $x = x_0$ (o bien $y = y_0$) cortan al dominio D en más de dos puntos? La forma de realizar en la práctica este caso es descomponer D en dominios parciales que sí satisfagan la condición, aunque nosotros solo trataremos los casos más sencillos.

Ejemplo. Vamos a calcular $\iint_D x^2 y dx dy$ donde $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0 \right\}$ (semicírculo superior de centro el origen y radio 1)

$$
\begin{aligned}
\iint_D x^2 y dx dy &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)x^2}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}
\end{aligned}
$$

□

2.1.1. *Integrales dobles en coordenadas polares*

A veces, por cuestiones de facilidad en la expresión de la función o del recinto, trabajar en coordenadas polares agiliza en gran manera los cálculos. En realidad no hay ningún problema matemático para efectuar una nueva elección de un sistema de coordenadas (r, θ) con $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$.

Ejemplo. Vamos a calcular de nuevo la integral de $f(x, y) = x^2 y$ en el recinto

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0 \right\},$$

ahora usando coordenadas polares. Para empezar debemos fijarnos en la ventaja evidente de que la porción del círculo unidad que indica D tiene ahora una expresión bastante más sencilla, a saber,

$$D = \left\{ (r, \theta) \middle| \, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \right\}.$$

Luego se tiene

$$
\begin{aligned}
\iint_D x^2 y dx dy &= \iint_D r^3 (\cos^2 \theta)(\operatorname{sen} \theta) r dr d\theta \\
&= \iint_D r^4 (\cos^2 \theta)(\operatorname{sen} \theta) dr d\theta \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{\pi} r^4 (\cos^2 \theta)(\operatorname{sen} \theta) d\theta \right] dr \\
&= \int_0^1 \left[-r^4 \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr \\
&= \int_0^1 \frac{2r^4}{3} dr = \frac{1}{2} \left[\frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2}{15}
\end{aligned}
$$

□

2.1.2. *Cálculo de áreas usando integrales dobles*

Conviene reflexionar sobre el *significado geométrico* de la expresión

$$\iint_D dxdy.$$

- Dado el rectángulo $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d \right\} = [a, b] \times [c, d]$ ¿qué significado geométrico tiene $\iint_R dxdy$?
- Y si ahora ponemos $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leqslant 1 \right\}$ ¿qué significado piensas que tiene $\iint_R dxdy$? (Es más facil que lo pienses en coordenadas polares).
- Finalmente generaliza los resultados obtenidos al caso de un recinto D.

Para ilustrar las reflexiones que te hemos propuesto anteriormente te presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Vamos a calcular el área del *lóbulo del folium de Descartes* (ver Figura 7.2) de ecuación en coordenadas polares

$$r = \frac{3 \operatorname{sen} \theta \, \cos \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

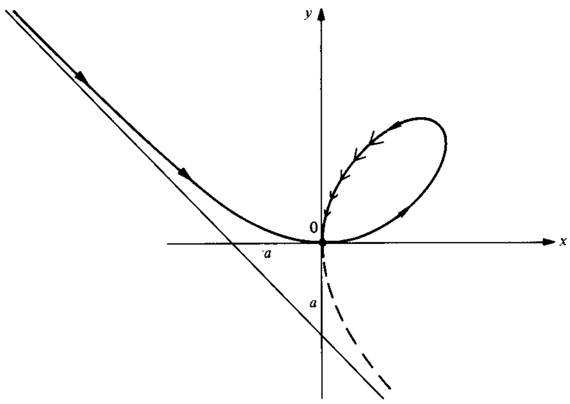

Figura 7.2: Folium de Descartes.

En nuestro caso se tiene que el área vendría expresada por la siguiente integral doble:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{3 \operatorname{sen} \theta \, \cos \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta}} r dr \right] d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\frac{3 \operatorname{sen} \theta \, \cos \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta}} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9 \operatorname{sen}^2 \theta \, \cos^2 \theta}{2(\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9 \operatorname{sen}^2 \theta \, \cos^2 \theta}{(\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} d\theta.
\end{aligned}$$

Observa que por la simetría del recinto se tiene

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9\operatorname{sen}^2\theta\,\cos^2\theta}{(\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta)}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9\operatorname{sen}^2\theta\,\cos^2\theta}{(\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta)}d\theta$$

y haciendo el cambio de variable $\tan\theta = t$, $dt = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$, obtenemos (intentando antes simplificar algo las expresiones):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9\operatorname{sen}^2\theta\,\cos^2\theta}{(\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta)^2}d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9\operatorname{sen}^2\theta\,\cos^2\theta}{\cos^6\theta\,(1+\tan^3\theta)^2}d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^4\theta\,(1+\tan^3\theta)^2}d\theta \\
&= 9\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt \\
&= -3\left[\frac{1}{1+t^3}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

2.2. Integrales triples

Procedemos de forma análoga a las integrales dobles, esta vez refiriéndonos a funciones de tres variables definidas sobre un recinto del espacio R. Sea $f(x,y,z)$ una función contínua para los valores $(x,y,z)\in R$ donde

$$R = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, e\leqslant z\leqslant f\right\} = [a,b]\times[c,d]\times[e,f].$$

Con las consideraciones de continuidad para $f(x,y,z)$ y las consecuencias posteriores de integrabilidad similares a las hechas para la integral doble, se tiene que la *integral triple* sobre el paralelepípedo R de la función $f(x,y,z)$ se puede expresar como

$$\iiint_R f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f\left[\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy\right]dz.$$

El *Teorema de Fubini* también se cumple ahora. Es decir, podremos cambiar el orden de las diferentes integrales sin que esto afecte al valor final de la integral triple.

Ejemplo. Sea $R=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$ y $f(x,y,z)=xyz$. Entonces

$$\begin{aligned}
\iiint_R xyzdxdydz &= \int_0^3\left[\int_0^2\left(\int_0^1 xyzdx\right)dy\right]dz \\
&= \int_0^3\left[\int_0^2\left[\frac{x^2yz}{2}\right]_{x=0}^{x=1}dy\right]dz \\
&= \int_0^3\left(\int_0^2\frac{yz}{2}dy\right)dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 \left[\frac{y^2 z}{4}\right]_{y=0}^{y=2} dz = \int_0^3 z dz \\ &= \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=3} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

□

Siguiendo el procedimiento al que sometíamos a la integral doble, pasamos a continuación a introducir el concepto de *integral triple* sobre conjuntos acotados más generales $D \subset \mathbb{R}^3$, los llamados *conjuntos medibles Jordan*.

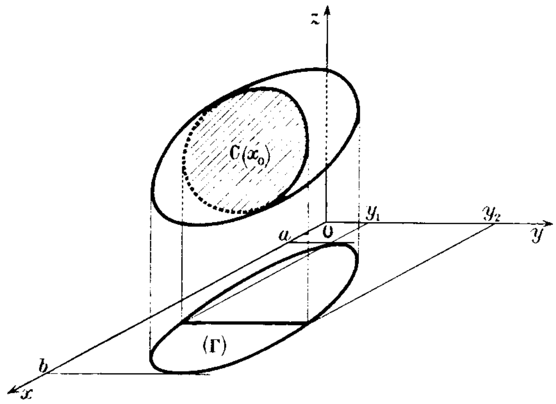

Figura 7.3: Conjunto medible Jordan.

Consideramos ahora el plano $x = x_0$ (paralelo al plano coordenado YZ) y supongamos además que el mencionado plano corta a D en $C(x_0)$. En estas condiciones,supuestas las hipótesis de continuidad de la función en el dominio y de las secciones $C(x)$ al variar x entre $[a, b]$, podemos calcular la integral triple de $f(x, y, z)$ sobre D de la siguiente forma:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\iint_{C(x)} f(x,y,z)dydz\right] dx$$

Si desarrollamos el cálculo de la integral

$$\iint_{C(x)} f(x,y,z)dydz,$$

suponiendo que las paralelas al eje OZ cortan a $C(x)$ en puntos en los que las cotas alcanzadas en el mencionado eje sean $z_1(x_0, y_0)$ y $z_2(x_0, y_0)$, se tiene entonces

$$\iint_{C(x)} f(x,y,z)dydz = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dy,$$

de donde finalmente tendremos que

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x,y,z)dxdydz &= \int_a^b \left[\iint_{C(x)} f(x,y,z)dydz\right] dx \\ &= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dy\right] dx. \end{aligned}$$

Obsérvese que también aquí se puede intercambiar el orden de las integraciones, es decir, podemos partir de secciones de D paralelas al plano XY ($C(z_0)$) o paralelas al plano XZ ($C(y_0)$), sin que esto varíe nuestro razonamiento en lo que al proceso se refiere.

Ejemplo. Vamos a calcular

$$\iiint_D x^2yzdxdydz,$$

siendo

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0 \right\}$$

(la parte del cilindro de base el círculo de centro el origen y radio 1 y de altura igual a 1, que está contenida en el primer octante). Consideremos ahora secciones $C(z_0)$ por planos paralelos al XY, de ecuaciones $z = z_0$, variando z en el intervalo $[0, 1]$. Así obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\iiint_D x^2yzdxdydz &= \int_0^1 \left[\iint_{C(z)} x^2yzdxdy \right] dz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2yzdy \right) dx \right] dz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\frac{x^2y^2z}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dy \right] dz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{(1-x^2)x^2z}{2} dx \right] dz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{z}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=1} \right] dz \\
&= \int_0^1 \frac{z}{15} dz = \frac{1}{15} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{15}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

□

Se puede pensar en intercambiar el orden de las integrales simples para intentar facilitar el proceso de cálculo. Veamos:

$$\begin{aligned}
\iiint_D f(x, y, z)dxdydz &= \int_a^b \left[\iint_{C(x)} f(x, y, z)dydz \right] dx \\
&= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dy \right] dx \\
&= \iint_{\pi_{XY}(D)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy,
\end{aligned}$$

donde se puede observar que hemos empezado por una integral simple y después integramos el resultado sobre $\pi_{XY}(D)$ que indica la *proyección de D sobre el plano XY*.

Naturalmente todo el anterior procedimiento se puede hacer análogamente integrando primero sobre x y después integrando sobre $\pi_{YZ}(D)$ (proyección de D sobre YZ), o bien integrando primero sobre y y después sobre $\pi_{XZ}(D)$.

Ejemplo. Vamos a calcular

$$\iiint_S xyzdxdydz$$

donde

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \right\}$$

(la parte de la esfera de centro en el origen de coordenadas y radio 1 que está contenida en el primer octante). Veamos: primero integramos sobre z y después sobre la proyección de S en el plano XY, $\pi_{XY}(S)$ que en este caso coincidirá con $S' = \left\{ (x,y) | \, x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0 \right\}$. De esta forma se tiene

$$\begin{aligned}
\iiint_S xyzdxdydz &= \iint_{S'} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyzdz \right] dxdy \\
&= \iint_{S'} \left[\frac{xyz^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy \\
&= \iint_{S'} \frac{xy(1-x^2-y^2)}{2} dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy(1-x^2-y^2)}{2} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{x(x^2-1)^2}{8} dx = \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

□

2.2.1. *Integrales triples en coordenadas cilíndricas*

Recordemos que las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un punto en el espacio representan con (r, θ) a las coordenadas polares de la proyección del punto en el plano XY y z el valor de la coordenada en el eje OZ. En algunas ocasiones expresar en coordenadas cilíndricas la función y el recinto sobre el que calculamos la integral triple tiene notables ventajas, como veremos en el ejemplo que desarrollaremos a continuación. Sólo basta tener en cuenta que

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D \varphi(r,\theta,z) r dr d\theta dz$$

Ejemplo. Vamos a calcular empleando el cambio a coordenadas cilíndricas la integral triple

$$\iiint_D x^2 yzdxdydz,$$

siendo $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0 \right\}$.

Primero de todo conviene observar la evidente ventaja que proporciona el nuevo sistema de coordenadas en la expresión del recinto, ya que se tiene $D = \left\{ (r,\theta,z) | \, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant z \leqslant 1 \right\}$, presentando las mismas ventajas operativas para la integral triple que presentaba el paralelepípedo (el caso más simple con el que nos podíamos encontrar). Ya solo nos queda efectuar el cambio de variable recordando que $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$. Veamos:

$$\iiint_D x^2 yzdxdydz = \iiint_D r^3 (\cos^2\theta)(\operatorname{sen}\theta) z r dr d\theta dz$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_D r^4(\cos^2\theta)(\operatorname{sen}\theta) z\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4(\cos^2\theta)(\operatorname{sen}\theta) z\,d\theta\right] dr\right] dz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[-r^4\frac{\cos^3\theta}{3} z\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} dr\right] dz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{r^4}{3} z\,dr\right] dz \\
&= \int_0^1 \left[\frac{r^5 z}{15}\right]_{r=0}^{r=1} dz = \int_0^1 \frac{z}{15} dz = \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

□

2.2.2. *Integrales triples en coordenadas esféricas*

Recordemos que un punto P de $\mathbb{R}^3$, está totalmente determinado por sus coordenadas esféricas (ρ, φ, θ) donde ρ indica la longitud de OP, φ el ángulo que forma el plano determinado por OZ y P con el plano OXZ y θ el ángulo que forma la recta OP con el eje OZ, teniéndose además las siguientes igualdades que relacionan las coordenadas esféricas con las cartesianas rectangulares

$$\begin{aligned}
x &= \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \\
y &= \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \\
z &= \rho \cos\theta.
\end{aligned}$$

Al igual que sucedía con las coordenadas cilíndricas, en determinadas ocasiones, bien sea por la expresión del propio recinto o por la propia función, nos conviene usar este sistema de coordenadas en detrimento de las cartesianas o cilíndricas. Tendremos no obstante que tener en cuenta lo siguiente:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D g(\rho,\theta,\varphi)\rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

Ejemplo. Vamos a calcular

$$\iiint_S xyz\,dx\,dy\,dz$$

donde

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \right\}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\iiint_S xyz\,dx\,dy\,dz &= \iiint_S (\rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)(\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)(\rho\cos\theta)\rho^2\operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \\
&= \iiint_S \rho^5(\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta)(\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.
\end{aligned}$$

Observa que la gran ventaja que presenta en este ejercicio el nuevo sistema de coordenadas es la expresión del recinto $S = \left\{ (\rho,\theta,\varphi) \middle| \, 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}$, que produce el siguiente efecto a la hora de calcular la integral triple:

$$\begin{aligned}
\iiint_S \rho^5(\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta)(\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi)d\rho d\theta d\varphi &= \\
\int_0^1\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^5(\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta)(\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi)d\theta\right]d\varphi\right]d\rho &= \\
\int_0^1\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^5}{4}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi d\varphi\right]d\rho &= \\
\int_0^1\frac{\rho^5}{8}d\rho &= \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

□

2.2.3. *Cálculo de volúmenes usando integrales triples*

Al igual que usábamos las integrales dobles para calcular el área de determinados recintos planos, se puede utilizar la expresión

$$\iiint_D dxdydz$$

para calcular el volumen de un recinto $D\subset\mathbb{R}^3$.

Ejemplo. Vamos a calcular el volumen de una esfera de centro el origen y radio R. Sabemos que podemos expresar los puntos de la esfera que estén en el primer octante como

$$S=\left\{(\rho,\theta,\varphi)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$

(en coordenadas esféricas). Por simetría, el volumen que nos piden vendrá expresado por

$$\begin{aligned}
8\iiint_S dxdydz &= 8\iiint_S \rho^2\operatorname{sen}\theta d\rho d\theta d\varphi \\
&= 8\int_0^R\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\operatorname{sen}\theta d\theta\right]d\varphi\right]d\rho \\
&= 8\int_0^R\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2 d\varphi\right]d\rho = 8\int_0^R\frac{\rho^2\pi}{2}d\rho=\frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

□

3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.7.1. Calcular las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_D \operatorname{sen}^2 x\,\cos y dxdy$ donde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi\right\}$

(b) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 \leqslant x \leqslant 3, 1 \leqslant y \leqslant 2 \right\}$

(c) $\displaystyle\iint_D x^2ydxdy$ donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x+y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0 \right\}$

(d) $\displaystyle\iint_D \operatorname{sen}(x+y)dxdy$ donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \pi \right\}$

A.7.2. Calcular las siguientes integrales dobles:

(a) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x > 0, y > 0, \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}$

(b) $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)dxdy$ donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}$

(c) $\displaystyle\iint_D \tfrac{1}{(x+y)^2}dxdy$ donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x \geqslant 2, y \geqslant 2, x+y \leqslant 3 \right\}$

A.7.3. Calcular $\displaystyle\iint_D xydxdy$ donde D es el triángulo de vértices $A(0,-1)$, $B(1,0)$ y $C(0,3)$.

A.7.4. Calcular las siguientes integrales dobles:

(a) $\displaystyle\iint_D \tfrac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x \leqslant 1, y \leqslant 1, x^2+y^2 \geqslant 1 \right\}$

(b) $\displaystyle\iint_D \tfrac{1}{(1+x+y)^2}dxdy$ donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1 \right\}$

(c) $\displaystyle\iint_D xy\sqrt{x^2+4y^2}dxdy$ donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1 \right\}$

A.7.5. Calcular, usando la integral doble, la expresión del área encerrada por la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A.7.6. Calcular las siguientes integrales triples:

(a) $\displaystyle\iiint_D zdxdydz$ donde $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x+z \leqslant 1, x \geqslant 0, z \geqslant y^2, y \geqslant 0 \right\}$

(b) $\displaystyle\iiint_D yzdxdydz$ donde $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, y \geqslant x^2, z \geqslant 0, y+z \leqslant 1 \right\}$

(c) $\displaystyle\iiint_D xyzdxdydz$ donde $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \right\}$

(d) $\displaystyle\iiint_D z^2dxdydz$ donde $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \right\}$

A.7.7. Dadas la integrales sucesivas

$$\int_0^1 \left(\int_x^{2x} f(x,y)dy \right) dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left[\int_0^x \left(\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz \right) dy \right] dx,$$

exprésarlas respectivamente como una integral doble y otra triple de $f(x,y)$ y $f(x,y,z)$ sobre los recintos apropiados.

A.7.8. Calcular las integrales introducidas en el ejercicio anterior para las funciones $f(x,y) = e^{x+y}$ y $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$.

A.7.9. Calcular usando la integral triple una fórmula que calcule el volumen encerrado por el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

J. DE BURGOS *Cálculo Infinitesimal*, Editorial Alhambra. Capítulo 6.

R.E. LARSON, R.P. HOSTETLER y B.H. EDWARDS *Calculo y Geometría Analítica*, 5ª ed., McGraw-Hill, Madrid, 1995. Capítulo 16.

E. LINES *Principios de Análisis Matemático*, Editorial Reverté SA. Capítulo 31.

J. RIVAUD *Ejercicios de Análisis*, Editorial Aguilar. Capítulo 9.

J. STEWART *Cálculo*, 2ª ed. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994. Capítulo 13.

5. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.7.1. Calcular $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2+y^2 \leqslant 1 \right\}$

E.7.2. Calcular $\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz$ donde $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \right\}$

E.7.3. Hallar el volumen del recinto limitado superiormente por la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$, inferiormente por el plano XY y lateralmente por el cilindro $x^2+y^2=1$.

ANOTACIONES