CHAPITRE 8

Intégrales doubles.

Dans ce chapitre, nous définirons l'intégrale double d'une fonction $f(x, y)$ sur une région bornée du plan et nous présenterons quelques-unes de ces propriétés. Ensuite nous verrons comment calculer ces intégrales au moyen d'intégrales itérées. Nous conclurons ce chapitre en discutant des coordonnées polaires et du théorème de changement de variables pour l'intégrale double dans ce cas particulier.

Soient R, une région bornée de $\mathbf{R}^2$, c'est-à-dire que R est contenue dans un rectangle suffisamment grand, et $f(x, y)$, une fonction définie et bornée sur R. On définit l'intégrale de $f(x, y)$ sur R, que l'on note

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

comme étant la limite

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{\delta_i | 1\le i\le n\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i,$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de la région R en n sous-régions: $R_1, R_2, \ldots, R_n$, dont le diamètre de R_i, c'est-à-dire la distance maximale entre deux points quelconques de R_i, est noté δ_i, en y laissant n, le nombre de ces sous-régions devenir de plus en plus grand et le maximum $\max\{\delta_i | 1 \le i \le n\}$ des diamètres de ces sous-régions devenir de plus en plus près de zéro; de plus dans cette définition, (x_i, y_i) peut être n'importe quel point de R_i et ΔA_i est l'aire de la sous-région R_i.

Cette limite n'existe pas toujours. Cependant si R est une région bornée, $f(x, y)$ est continue sur R et que le bord de R consiste en une réunion finie de courbes continûment dérivables, alors l'intégrale double $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ existe. Dans ce dernier cas, il est possible d'interpréter l'intégrale double comme le volume signé de la région de $\mathbf{R}^3$ comprise entre le graphe de $f(x, y)$ et R, la partie au-dessus du plan des x, y correspondant à un volume positif, la partie au-dessous du plan des x, y correspondant à un volume négatif. Nous avons illustré ceci dans la figure 8.1 ci-dessous.

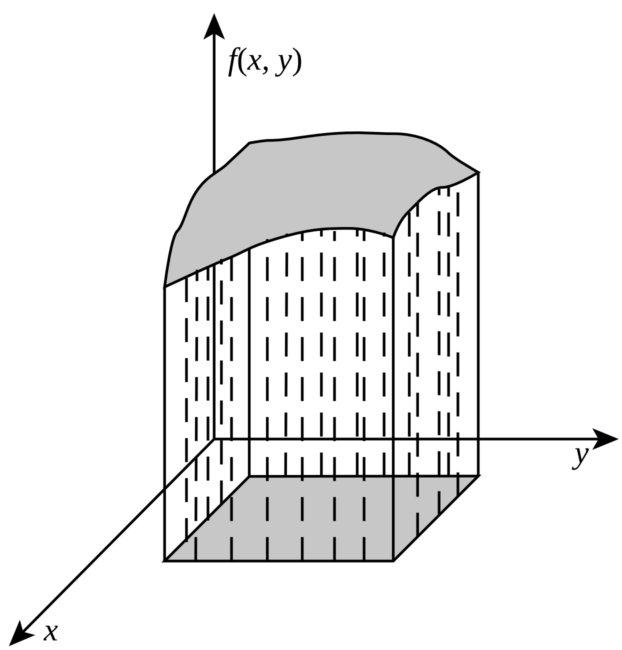

figure 8.1

Nous allons maintenant énumérer quelques-unes des propriétes des intégrales doubles dans la proposition ci-dessous. Elle est démontrée en utilisant la définition de l'intégrale double.

Proposition 8.1:

Soient R, R', deux régions de $\mathbf{R}^2$ telles que l'intersection $R \cap R'$ de celles-ci est contenue dans les bords de R et de R'. Soient $f(x,y), g(x,y)$ deux fonctions réelles et a, b deux nombres réels. Alors:

a) (règle linéaire) $\iint_R (a\, f(x,y) + b\, g(x,y))\, dx\, dy = a \iint_R f(x,y)\, dx\, dy + b \iint_R g(x,y))\, dx\, dy$

b) $\iint_{R \cup R'} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{R'} f(x,y)\, dx\, dy$

si ces intégrales existent.

Exemple 8.1:

Soient a, b, c trois nombres positifs, la région rectangulaire $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$ et la fonction constante $f(x,y) = c$. Alors

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \iint_R c = abc$$

car abc est le volume du parallélipipède rectangle tracé dans la figure 8.2.

Exemple 8.2:

Soient la région trianglaire $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x, y \le 1 \text{ et } 0 \le (1 - x - y)\}$ et la fonction continue $f(x,y) = 1 - x - y$. La région R est illustrée dans la figure 8.3. Alors

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = &\iint_R (1 - x - y)\, dx\, dy,\\ &= \text{volume du tétraèdre } T \text{ dont les sommets sont } (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) \text{ et } (0,0,1),\\ &= (1/6);\end{aligned}$$

car si nous notons par V le volume du tétraèdre T, alors nous pouvons observer que le cube dont les arêtes mesurent 1 se décompose en quatre tétraèdres: ABDE, BCDG, DEGH et BEFG (avec les notations de la figure 8.5) congrus à T et d'un tétraèdre régulier BDEG dont les arêtes mesurent $\sqrt{2}$. Le volume d'un tétraèdre régulier est connu et dans le cas présent ce volume est $(1/3)$. Donc nous avons l'égalité $4V + (1/3) = 1$, le volume du cube et conséquemment le volume V du tétraèdre T est $V = 1/6$. Nous avons aussi représenté le tétraèdre T à la figure 8.4.

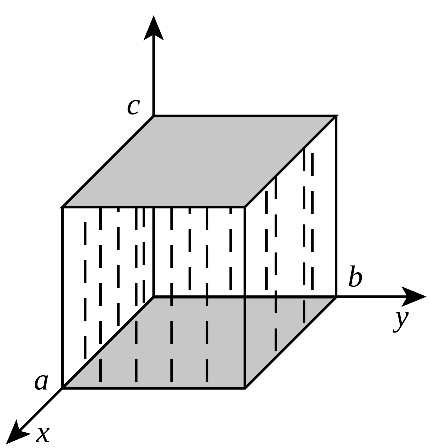

figure 8.2

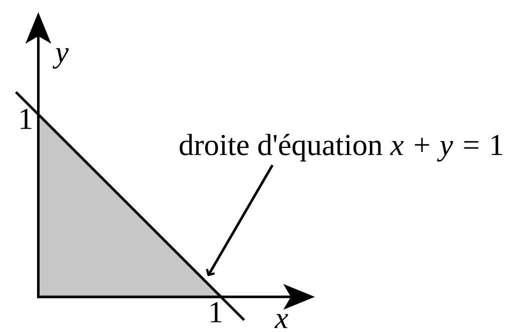

figure 8.3

Exemple 8.3:

Soient la région R correspondant à l'intérieur du cercle de rayon 1 centré à l'origine dans $\mathbf{R}^2$, c'est-à-dire $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le 1\}$ et la fonction continue $f(x,y) = x$. Alors

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \iint_R x\, dx\, dy = 0,$$

car

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{\delta_i \mid 1\le i\le n\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta A_i$$

et on peut considérer des subdivisions de R en sous-régions telles que la réflexion par rapport à l'axe des y de la i-ième région est aussi une sous-région de notre subdivision et de choisir les points (x_i, y_i) de telle façon que si (x_i, y_i) est le point de la i-ième région et $(x_{i'}, y_{i'})$ celui de la sous-région obtenue à la suite de la réflexion par rapport à l'axe des y, alors $(x_{i'}, y_{i'})$ est le résultat de cette réflexion sur le point (x_i, y_i). Plus précisément $(x_{i'}, y_{i'}) = (-x_i, y_i)$. En utilisant une décomposition du demi-disque $R_+ = \{(x,y) \in R \mid x \ge 0\}$ et la décomposition du demi-disque $R_- = \{(x,y) \in R \mid x \le 0\}$ obtenue à la suite de la réflexion par rapport à l'axe des y de la décomposition précédente de R_+. Nous avons

$$\sum_{\substack{i \\ \text{décomposition de } R_+}} f(x_i,y_i)\,\Delta A_i = -\sum_{\substack{i' \\ \text{décomposition de } R_-}} f(x_{i'},y_{i'})\,\Delta A_{i'}.$$

Donc

$$\sum_{\substack{i \\ \text{décomposition de } R_+}} f(x_i,y_i)\,\Delta A_i + \sum_{\substack{i' \\ \text{décomposition de } R_-}} f(x_{i'},y_{i'})\,\Delta A_{i'} = 0 \quad \text{et} \quad \iint_R x\,dx\,dy = 0.$$

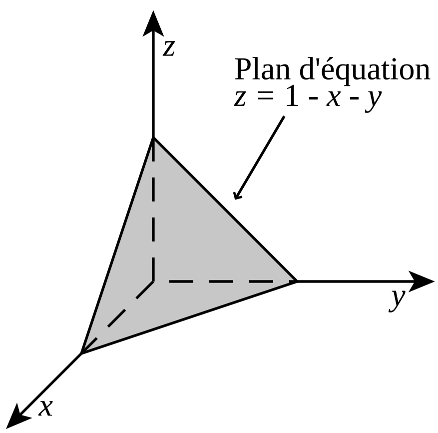

figure 8.4

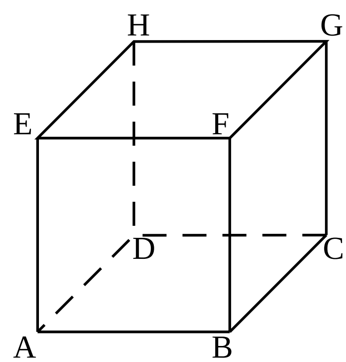

figure 8.5

Exemple 8.4:
Si R est une région bornée de $\mathbf{R}^2$ dont le bord consiste en une réunion finie de courbes continûment différentiables, alors

$$\iint_R dx\,dy = \text{aire de } R.$$

Ceci est vrai à cause de la définition même de l'intégrale double. En effet,

$$\begin{aligned}\iint_R dx\,dy &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{\delta_i \mid 1\le i\le n\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \\ &= \text{somme des aires des sous-régions} \\ &= \text{aire de } R.\end{aligned}$$

La fonction que nous intégrons dans cet exemple est la fonction constante $f(x,y) = 1$.

Pour évaluer toutes les intégrales doubles dans les exemples précédents, nous n'avons utiliser que des méthodes adaptées à chaque cas, mais qui ne sont pas générales. Nous allons maintenant décrire comment évaluer une intégrale double pour des régions de certains types au moyen d'intégrales itérées. Pour une région quelconque, il suffit alors de la découper en régions sur lesquelles nous pouvons effectuer des intégrales itérées et d'utiliser la proposition 8.1 b).

Proposition 8.2:
a) Si la région R est la région bornée à gauche par la droite verticale d'équation $x = a$, à droite par celle d'équation $x = b$, supérieurement par le graphe de la fonction $y = g_2(x)$ et inférieurement par celui de la fonction $y = g_1(x)$, c'est-à-dire $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Alors

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

si ces intégrales existent et où il faut considérer x comme une constante dans l'intégrale

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

et que l'on intègre par rapport à y. Le résultat de cette dernière intégrale est une fonction de x que l'on intègre par rapport à x sur l'intervalle $[a, b]$.
b) Si la région R est la région bornée supérieurement par la droite horizontale d'équation $y = d$, inférieurement par celle d'équation $y = c$, bornée à gauche par le graphe de la fonction (de y) $x = h_1(y)$ et à droite par celui de la fonction (de y) $x = h_2(y)$, c'est-à-dire $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$. Alors

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

si ces intégrales existent et où il faut considérer y comme une constante dans l'intégrale

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx$$

et que l'on intègre par rapport à x. Le résultat de cette dernière intégrale est une fonction de y que l'on intègre par rapport à y sur l'intervalle $[c, d]$.
Nous avons illustré dans la figure 8.6 chacun de ces cas: a) et b).

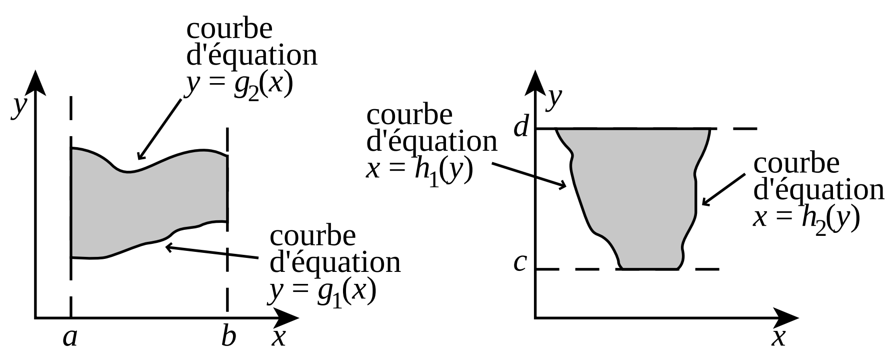

figure 8.6 a) figure 8.6 b)

Esquisse de la preuve: Nous n'allons démontrer que l'énoncé a) de la proposition. b) peut être démontré de façon analogue. Notons par $h(x)$ l'intégrale

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b h(x)\,dx$, il faut évaluer la limite

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{a_i-a_{i-1}|1\le i\le n\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} h(x_i)\,(a_i-a_{i-1}) \quad (*)$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de l'intervalle $[a,b]$: $a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}<a_n=b$. Pour calculer

$$h(x_i)=\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i,y)\,dy,$$

il faut évaluer la limite

$$\lim_{\substack{m_i\to\infty \\ \max\{c_j-c_{j-1}|1\le j\le m_i\}\to 0}} \sum_{j=1}^{m_i} f(x_i,y_j)(c_j-c_{j-1})$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de l'intervalle $[g_1(x_i),g_2(x_i)]$. En remplacant dans $(*)$, nous obtenons

$$(*)=\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{a_i-a_{i-1}|1\le i\le n\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\left(\lim_{\substack{m_i\to\infty \\ \max\{c_j-c_{j-1}|1\le j\le m_i\}\to 0}} \sum_{j=1}^{m_i} f(x_i,y_j)(c_j-c_{j-1})\right)(a_i-a_{i-1}).$$

Mais le "produit cartésien" des subdivisions de $[a,b]$ et $[g_1(x_i),g_2(x_i)]$ nous permet de construire une subdivision de R et il est alors possible de vérifier que

$$(*)=\lim_{\substack{N\to\infty \\ \max\{\delta_i|1\le i\le N\}\to 0}} \sum_{i=1}^{N} f(x_i,y_i)\,\Delta A_i,$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de la région R en N sous-régions: $R_1,R_2,\ldots,R_N$, en y laissant N, le nombre de ces sous-régions devenir de plus en plus grand et le maximum $\max\{\delta_i|1\le i\le N\}$ des diamètres de ces sous-régions devenir de plus en plus près de zéro. On a bien

$$\int_a^b h(x)\,dx=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ainsi a) est démontré.

Exemple 8.5:
Nous allons reprendre l'intégrale de l'exemple 8.2. Dans ce cas, nous avons que $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$, c'est-à-dire l'intérieur du triangle de sommets:$(0,0),(1,0)$ et $(0,1)$. En d'autres mots, nous sommes dans la situation de la proposition 8. 2 a) avec $a=0$,$b=1$, $g_1(x)=0$ et $g_2(x)=1-x$. Nous avons représenté R à la figure 8.7. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}\iint_R (1-x-y)\,dx\,dy &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\right)dx=\int_0^1\left((1-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x}dx\\ &=\int_0^1\left((1-x)(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)-\left((1-x)\,0-\frac{0^2}{2}\right)dx\\ &=\int_0^1\frac{(1-2x+x^2)}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{2x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}\\ &=\frac{1}{2}\left(\left(1-1+\frac{1}{3}\right)-\left(0-2\,\frac{0^2}{2}+\frac{0^3}{3}\right)\right)=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

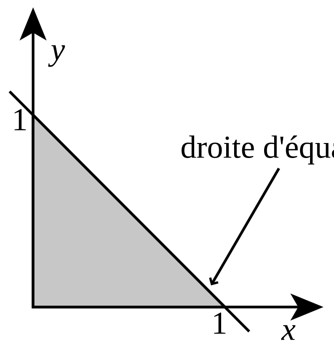

figure 8.7

<u>Exemple 8.6</u>:
Soit R, la région dans le premier quadrant comprise entre les deux paraboles respectivement d'équation $y = 2x^2$ et $y = x^2$ et sous la droite horizontale d'équation $y = 1$. Ainsi $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y/2} \leq x \leq \sqrt{y}\}$. Nous sommes dans la situation de la proposition 8.2 b) avec $c = 0, d = 1, h_1(y) = \sqrt{y/2}$ et $h_2(y) = \sqrt{y}$. Nous avons représenté R comme la figure hachurée à la figure 8.8.

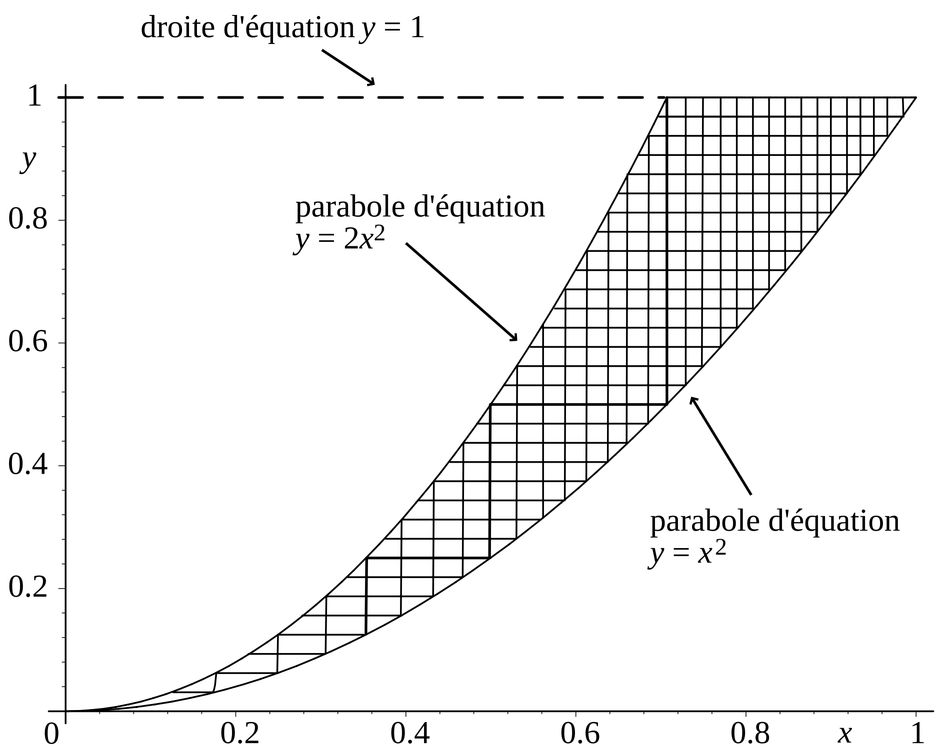

figure 8.8

Pour obtenir ces deux dernières bornes, nous notons pour celle de gauche que

$$y = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{y}{2}};$$

alors que, pour celle de droite, nous avons

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y},$$

car $x \geq 0$ dans ces deux cas. De tout ceci, nous obtenons

$$\begin{aligned}\iint_R (x+y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y}} (x+y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=\sqrt{y/2}}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(\sqrt{y})^2}{2} + \sqrt{y}\,y\right) - \left(\frac{(\sqrt{y/2})^2}{2} + \sqrt{y/2}\,y\right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{4} + \frac{(2-\sqrt{2})}{2}\,y^{3/2}\,dy = \left(\frac{y^2}{8} + \frac{(2-\sqrt{2})}{2}\left(\frac{2}{5}\right) y^{5/2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{(21-8\sqrt{2})}{40}.\end{aligned}$$

Noter que nous aurions pu évaluer l'intégrale ci-dessus comme la somme de deux intégrales itérées, chacune correspondant à la situation de la proposition 8.2 a). Plus exactement,

$$\iint_R (x+y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} (x+y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} (x+y)\,dx\,dy$$

dans lesquelles $R_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}/2,\ x^2 \leq y \leq 2x^2\}$ et $R_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{2}/2 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}$. Nous avons représenté ces régions dans la figure 8.9.

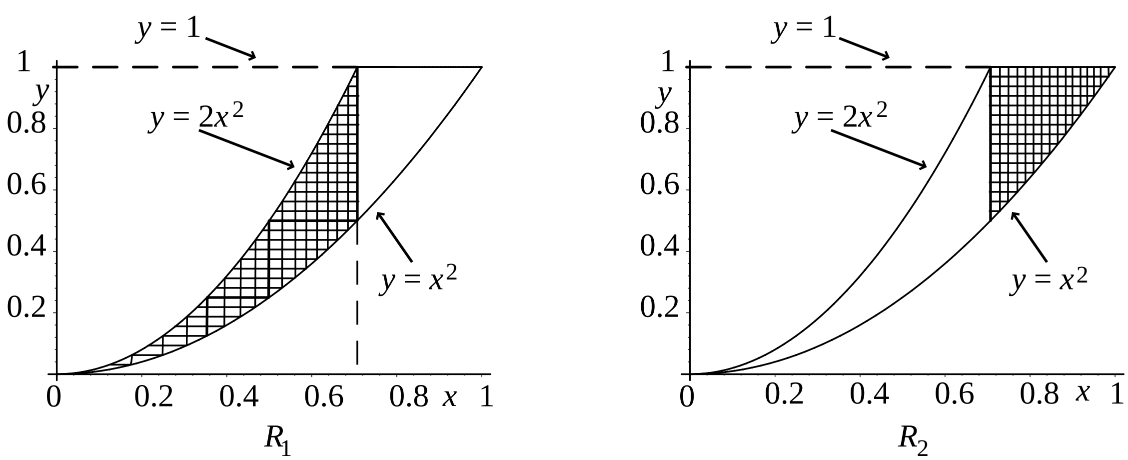

figure 8.9

Conséquemment

$$\begin{aligned}\iint_R (x+y)\,dx\,dy &= \iint_{R_1} (x+y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} (x+y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_{x^2}^{2x^2} (x+y)\,dy\right) dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\int_{x^2}^1 (x+y)\,dy\right) dx.\end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin de calculer ces deux intégrales itérées.

Exemple 8.7:
Soit R, la région de $\mathbf{R}^2$ dans le premier quadrant à l'extérieur du cercle centré à l'origine de rayon 1 et à l'intérieur de celui centré à l'origine de rayon 2. Ainsi $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Nous avons représenté R à la figure 8.10.

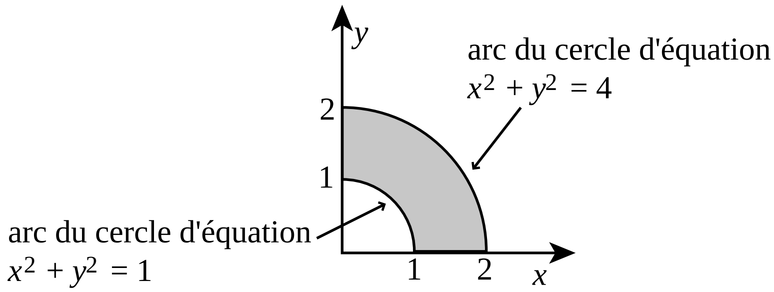

figure 8.10

Pour évaluer l'intégrale $\iint_R x\,dx\,dy$, il est nécessaire de décomposer la région R en deux régions pour lesquels nous pouvons utiliser la proposition 8.2. Nous pouvons considérer la décomposition suivante:$R = R_1 \cup R_2$ avec

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\} \quad \text{et}$$
$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}.$$

Nous avons représenté R_1 et R_2 à la figure 8.11.

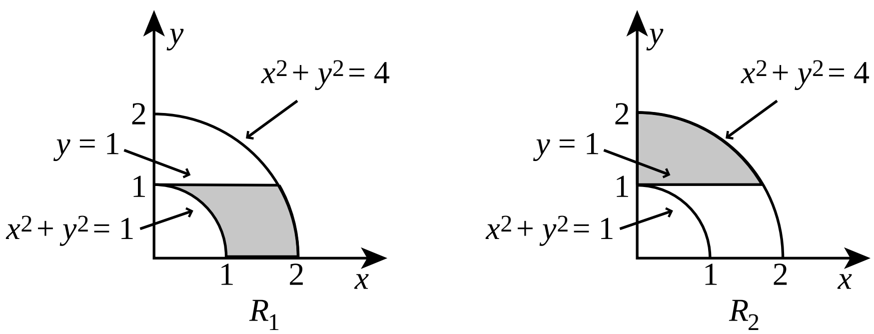

figure 8.11

De tout ceci, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\iint_R x\,dx\,dy &= \iint_{R_1} x\,dx\,dy + \iint_{R_2} x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right]_{x=\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} dy + \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y^2}} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(\sqrt{4-y^2})^2}{2} - \frac{(\sqrt{1-y^2})^2}{2} \right) dy + \int_1^2 \left(\frac{(\sqrt{4-y^2})^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{1-y^2}{2} \right) dy + \int_1^2 \frac{4-y^2}{2}\,dy = \int_0^1 \frac{3}{2}\,dy + \int_1^2 2 - \frac{y^2}{2}\,dy \\
&= \left(\frac{3}{2} y \right]_{y=0}^{y=1} + \left(2y - \frac{y^3}{6} \right]_{y=1}^{y=2} \\
&= \left(\frac{3}{2}(1) - \frac{3}{2}(0) \right) + \left(\left(2(2) - \frac{2^3}{6} \right) - \left(2(1) - \frac{1^3}{6} \right) \right) = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Nous aurions pu considérer une autre décompositon: $R = R'_1 \cup R'_2$ avec

$$R'_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\} \quad \text{et}$$
$$R'_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}.$$

et nous aurions alors

$$\iint_R x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x\,dy \right) dx.$$

Nous avons représenté R_1' et R_2' à la figure 8.12.

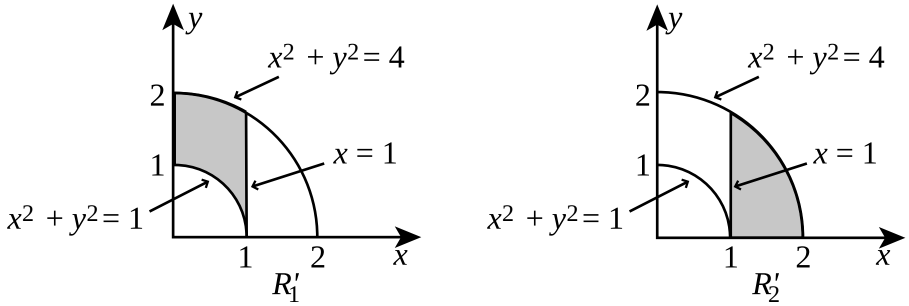

figure 8.12

L'exemple précédent illustre bien comment procéder en général. Il suffit seulement décomposer la région d'intégration R en régions sur lesquelles nous pouvons utiliser la proposition 8.2.

Il y a plusieurs façons de décrire les points du plan. Parmi tous ces systèmes de coordonnées, c'est une litote que de dire que les coordonnées polaires sont non négligeables. Nous discuterons donc de ces coordonnées polaires, ainsi que du théorème de changement de coordonnées pour les intégrales doubles dans le cas du changement des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

Au point (x, y) du plan $\mathbf{R}^2$, nous pouvons lui associer ses coordonnées polaires (r, θ) pour lesquelles r est la distance entre le point (x, y) et l'origine $(0, 0)$ alors que θ est la mesure (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) de l'angle formé par la demi-droite des x positifs et la demi-droite commençant à l'origine et passant par le point (x, y). Ainsi nous avons $0 \leq r$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Les changements de coordonnées sont les suivants:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x). \end{cases}$$

Ceci est une conséquence simple de la définition de r et θ. Nous avons représenté ceci à la figure 8.13.

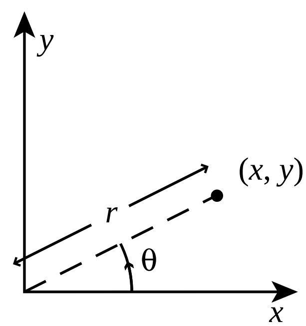

figure 8.13

Nous décrirons dans un chapitre ultérieur le théorème général pour un changement quelconque de systèmes de coordonnées. Présentement nous nous limiterons au changement de coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

<u>Proposition 8.3</u>:
Soient R, une région du plan des x, y, $R' = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \mid (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in R\}$, la région correspondante dans les coordonnées r, θ et $f : R \to \mathbf{R}$ une fonction réelle telle que l'intégrale double $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$ existe. Alors l'intégrale double $\iint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,r\,dr\,d\theta$ existe et nous avons

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,r\,dr\,d\theta.$$

Preuve: Pour déterminer si $\iint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r\, dr\, d\theta$ existe, il nous faut considérer la limite

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{\delta_i | 1\le i\le n\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(r_i\cos(\theta_i), r_i\sin(\theta_i))\, r_i\,(\Delta r_i)\,(\Delta\theta_i),$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de R' en n sous-régions. Voir la figure 8.14.

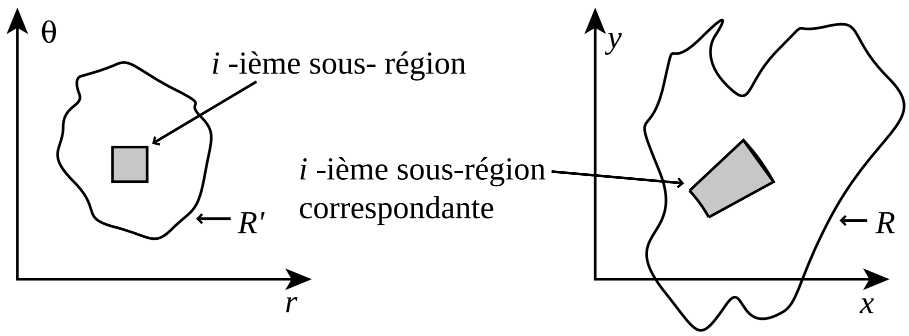

figure 8.14

A chacune de ces subdivisions de R', nous obtenons une subdivision de R en utilisant le changement de variables:$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$. A la i-ième sous-région de la subdivision de R', la région correspondante dans R est comme dans la figure 8.15. L'aire de cette petite région hachurée sera $\approx r_i\,(\Delta\theta_i)\,(\Delta r_i)$. Parce que $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ existe et par la définition de l'intégrale, nous avons

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{\delta_i | 1\le i\le n\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(r_i\cos(\theta_i), r_i\ \sin(\theta_i))\, r_i\,(\Delta r_i)\,(\Delta\theta_i) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

Conséquemment

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r\, dr\, d\theta.$$

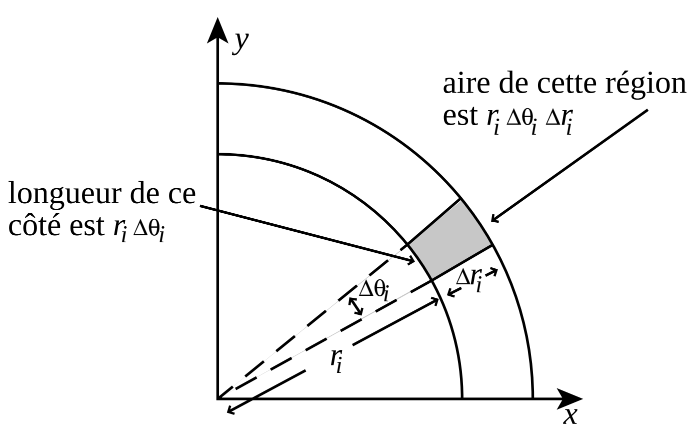

figure 8.15

Nous allons maintenant illustrer comment cette proposition peut être utilisée. Le premier exemple est très simple et les suivants sont un peu plus difficiles.

Exemple 8.8:

Soit R, l'intérieur du cercle de rayon 1 centré à l'origine. Alors nous savons à cause de l'exemple 8.4 que

$$\iint_R dx\,dy = \text{aire de } R = \pi.$$

Vérifions que c'est bien ce que nous obtenons au moyen de la proposition 8.3. La région R' correspondant à R est $R' = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Donc

$$\iint_R dx\,dy = \iint_{R'} r\,dr\,d\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r\,d\theta\right) dr = \int_0^1 \left(r\,\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \int_0^1 2\pi r\,dr = \left(\frac{2\pi r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \pi.$$

Exemple 8.9:
Calculons l'intégrale de l'exemple 8.7 en utilisant les coordonnées polaires. Rappelons que $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x, 0 \le y, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$. La région R' correspondant à R dans le plan des coordonnées polaires sera $R' = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le \pi/2, 1 \le r \le 2\}$. Donc de la proposition 8.3, nous obtenons

$$\begin{aligned}\iint_R x\,dx\,dy = \iint_{R'} (r\cos(\theta))\,r\,dr\,d\theta &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_1^2 r^2\cos(\theta)\,dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^3}{3}\cos(\theta)\right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{2^3}{3}\cos(\theta) - \frac{1^3}{3}\cos(\theta)\right)d\theta \\ &= \frac{7}{3}\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\,d\theta = \frac{7}{3}\left(\sin(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{7}{3}(1-0) = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Exemple 8.10:
Soit D la région du premier quadrant à l'intérieur du cercle centré à l'origine de rayon $\mathrm{R} > 0$ et dans le demi-plan ne contenant pas l'origine et dont le bord est la droite passant par les points $(0,\mathrm{R})$ et $(\mathrm{R},0)$. En d'autres mots, $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le \mathrm{R}^2, \mathrm{R} \le (x+y)\}$. Nous allons maintenant évaluer l'intégrale $\iint_D (x+y)/(x^2+y^2)\,dx\,dy$ en utilisant les coordonnées polaires. Déterminons premièrement la région D' correspondant à D dans les coordonnées polaires. Nous avons représenté la région D dans la figure 8.16.

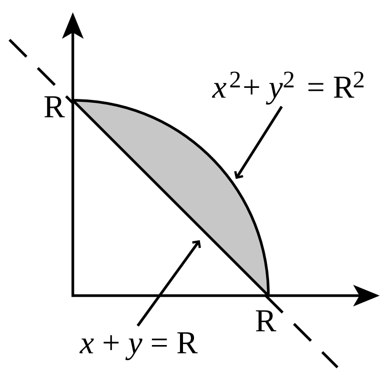

figure 8.16

De cette figure, nous avons clairement $0 \le \theta \le \pi/2$. Pour un θ fixé entre 0 et $\pi/2$, alors la borne inférieure $r_{\min}$ pour les valeurs de r est déterminée par la droite d'équation $x+y = \mathrm{R}$. Nous obtenons alors pour cette borne

$$r\cos(\theta) + r\sin(\theta) = \mathrm{R} \qquad \Rightarrow r_{\min} = \frac{\mathrm{R}}{(\cos(\theta)+\sin(\theta))}.$$

Donc

$$D' = \left\{(r,\theta)\,\middle|\, 0 \le \theta \le \pi/2,\ \frac{\mathrm{R}}{(\cos(\theta)+\sin(\theta))} \le r \le \mathrm{R}\right\}.$$

De la proposition 8.3, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{(x+y)}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \iint_{D'} \frac{(r\cos(\theta)+r\sin(\theta))}{((r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2)}\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\int_{\mathrm{R}/(\cos(\theta)+\sin(\theta))}^{\mathrm{R}}(\cos(\theta)+\sin(\theta))\,dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left((\cos(\theta)+\sin(\theta))r\right]_{r=\frac{\mathrm{R}}{(\cos(\theta)+\sin(\theta))}}^{r=\mathrm{R}}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left((\cos(\theta)+\sin(\theta))\mathrm{R}-(\cos(\theta)+\sin(\theta))\frac{\mathrm{R}}{(\cos(\theta)+\sin(\theta))}\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\mathrm{R}(\cos(\theta)+\sin(\theta)-1)\,d\theta = \left(\mathrm{R}\sin(\theta)-\mathrm{R}\cos(\theta)-\mathrm{R}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= (\mathrm{R}(1)-\mathrm{R}(0)-\mathrm{R}(\pi/2))-(\mathrm{R}(0)-\mathrm{R}(1)-\mathrm{R}(0)) = \big(2-\frac{\pi}{2}\big)\mathrm{R}.
\end{aligned}$$

Pour terminer ce chapitre, nous indiquons des notations utilisées pour certaines intégrales doubles. $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$ signifie $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dx\right)dy$, alors que $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ signifie $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$. Ces deux intégrales sont en général différentes. Certains auteurs écrivent l'intégrale $\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$ sous la forme $\int_a^b dx\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)$ ou encore $\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$ dans laquelle l'ordre $dy\,dx$ indique l'ordre d'intégration. De même, ils écrivent $\int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$ sous la forme $\int_c^d dy\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right)$ ou encore $\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 8.1:
Evaluer chacune des intégrales doubles suivantes:

a) $\iint_R (x+y)\,dx\,dy$ où R est l'intérieur du triangle dont les sommets sont $(0,1),(2,5)$ et $(2,7)$,

b) $\iint_R (xy)\,dx\,dy$ où R est la région du plan comprise à l'intérieur des deux paraboles respectivement d'équation $y=x^2$ et $y=-x^2+4x$,

c) $\iint_R x\,dx\,dy$ où R est l'intérieur du quadrilatère dont les sommets sont $(0,-1),(5,-1),(3,1)$ et $(2,1)$,

d) $\iint_R x^2y\,dx\,dy$ où R est la région du plan à l'intérieur du cercle centré à l'origine de rayon 1 et au-dessus de la droite horizontale d'équation $y=1/2$,

e) $\iint_R y\,dx\,dy$ où R est l'intérieur du triangle ayant pour sommets $(0,0),(2,4)$ et $(3,2)$,

f) $\int_1^3\int_2^5 e^x xy^2\,dx\,dy$,

g) $\int_1^4\int_2^6 (x^2+xy)\,dy\,dx$,

h) $\iint_R (x+2y)\,dx\,dy$ où $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2\le y\le(4-2x-x^2)\}$,

i) $\iint_R x^2y\,dx\,dy$ où $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2\le y\le((3/2)-x+(x^2/2)\}$,

j) $\iint_R 1/(x+y)^3\,dx\,dy$ où $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x,y\ge 1, x+y\le 3\}$, Exercice 8.2:

Ci-dessous a dénotera un nombre réel positif ($a > 0$). Evaluer chacune des intégrales doubles suivantes:

a) $\iint_R xy\,dx\,dy$ où R est la région du plan à l'intérieur du cercle de rayon 2 centré à l'origine et dans le premier quadrant,

b) $\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 2, 0 \le y\}$,

c) $\iint_R y^2\,dx\,dy$ où R est la région du plan à l'intérieur du cercle de rayon 1 centré au point $(0,1)$,

d) $\iint_R y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4 \le x^2+y^2,\ x^2+4y^2 \le 16,\ 0 \le y\}$,

e) $\iint_R xy\,dx\,dy$ où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 \le 1, 0 \le y \le x\}$,

f) $\iint_R (xy-y^2)\,dx\,dy$, où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le y, x^2+y^2 \le a^2\}$,

g) $\iint_R x\,dx\,dy$, où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+1)^2+y^2 \le 1\}$,

h) $\iint_R y/(a^2+x^2)\,dx\,dy$, où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le a^2, x,y \ge 0\}$,

i) $\iint_R 1/(1+x^2+y^2)^2\,dx\,dy$, où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$.

Exercice 8.3:

Evaluer chacune des intégrales doubles suivantes:

a) $\iint_R |x+y|\,dx\,dy$, où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1\}$,

b) $\iint_R xy/(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$, où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x^2+y^2 \ge 1\}$.

Exercice 8.4:

Pour tout nombre réel $r > 0$, posons

$$D(r) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0, x^2+y^2 \le r^2\} \qquad \text{et} \qquad C(r) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le r, 0 \le y \le r\}.$$

a) Calculer $I(r) = \iint_{D(r)} \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

b) (†) Montrer que $\lim_{r\to\infty} J(r)$ existe où $J(r) = \iint_{C(r)} \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

c) Est-ce que $\lim_{r\to\infty} I(r) = \lim_{r\to\infty} J(r)$?

Exercice 8.5(†):

Evaluer l'intégrale $\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$, où $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 2ax, x^2+y^2 \le 2ay\}$ et a est un nombre réel.