CHAPITRE 7

Rappel sur l'intégrale simple.

Les prochains chapitres traiteront de l'intégration. Dans un premier temps, nous rappellerons ce qu'est l'intégrale simple (l'intégration pour les fonctions d'une seule variable réelle), ainsi que le théorème fondamental du calcul. Ensuite nous définirons les intégrales multiples, surtout les intégrales doubles et triples; nous verrons comment les calculer au moyen d'intégrales itérées, le théorème de changement de variables pour les intégrales multiples, en particulier pour les coordonnées cylindriques et sphériques.

Dans ce chapitre, nous traiterons de l'intégrale simple. Soient deux nombres réels a, b avec $a < b$ et une fonction $f(x)$ réelle définie et bornée sur l'intervalle fermé $[a, b]$, alors l'intégrale définie de f sur $[a, b]$, que l'on note

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

est la limite

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{\delta_i|1\leq i\leq n\}\to 0}} \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta_i,$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[a_{i-1}, a_i]$, dont la longueur de chacun de ceux-ci est notée $\delta_i = (a_i - a_{i-1})$, en y laissant n, le nombre de ces sous-intervalles, devenir de plus en plus grand et le maximum $\max\{\delta_i|1 \leq i \leq n\}$ des longueurs de ces sous-intervalles devenir de plus en plus près de zéro; de plus, dans cette définition pour chaque i, x_i peut être n'importe quel point de l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$.

Il faut noter que l'intégrale d'une fonction n'existe pas toujours. En d'autres mots, la limite définissant l'intégrale n'existe pas toujours. Cependant il est possible de démontrer que si la fonction à intégrer $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. Ce que nous avons défini est l'intégrale de Riemann et la somme $\sum_{i=1}^n f(x_i)\,\delta_i$ est une somme de Riemann. Il existe d'autres types d'intégrales, notamment l'intégrale de Lebesgue. Elles ne sont pas traitées dans ces notes. Nous nous concentrerons que sur les intégrales définies de Riemann et, au dernier chapitre, sur les intégrales impropres de Riemann.

Dans la partie grise de la figure 7.1, nous avons illustré la somme $\sum_{i=1}^n f(x_i)\,\delta_i$ pour une subdivision de $[a, b]$. Si $f(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors il est possible d'interpréter l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ comme l'aire signée de la partie du plan comprise entre le graphe de $f(x)$ et l'axe des x, la partie au-dessus de l'axe des x correspondant à une aire positive, la partie au-dessous de l'axe des x correspondant à une aire négative. Nous avons illustré ceci à la figure 7.2. Noter que l'intégrale d'une fonction peut être positive, négative ou nulle.

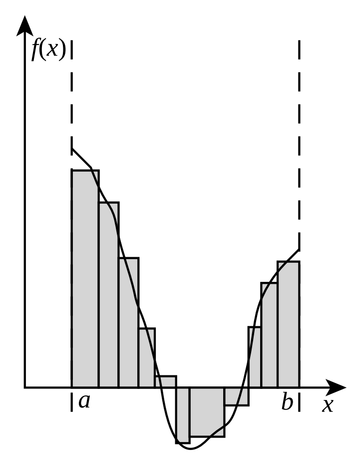

figure 7.1

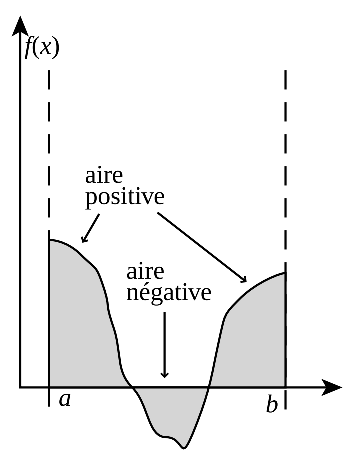

figure 7.2

Le théorème fondamental du calcul dit que s'il existe une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big(F(x)\big]_a^b.$$

Une fonction $F(x)$ comme ci-dessus est une intégrale indéfinie ou une anti-dérivée ou encore une primitive pour $f(x)$. Il y a aussi une seconde forme du théorème fondamental du calcul. Cette seconde forme est la suivante:

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big) = f(x).$$

La première forme du théorème fondamental du calcul nous fournit un outil très précieux pour calculer des intégrales définies. Nous illustrerons ceci dans les exemples suivants.

Exemples 7.1:
a) Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, alors

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \big(x^3 - x^2 + x\big]_1^2 = (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 5,$$

car $F(x) = x^3 - x^2 + x$ est une primitive pour $f(x)$. En effet, $(x^3 - x^2 + x)' = 3x^2 - 2x + 1$.
b) Si $f(x) = \cos(x)$, alors

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \big(\sin(x)\big]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1,$$

car $F(x) = \sin(x)$ est bien une primitive pour $f(x)$. En effet, $(\sin(x))' = \cos(x)$.

Pour déterminer une primitive d'une fonction $f(x)$ donnée, il existe des règles de calcul. Dans ce qui suivra, nous noterons une telle primitive par $\int f(x)\,dx$ au lieu de $F(x)$ comme précédemment. Avec ces notations, nous avons donc

$$\frac{d}{dx}\Big(\int f(x)\,dx\Big) = f(x).$$

Il faut noter que si $F(x)$ est une primitive de la fonction $f(x)$, alors $F(x) + c$ est aussi une telle primitive peu importe la valeur de la constante c. Ainsi donc si $f(x)$ a une primitive, elle a alors une infinité de primitives. Malgré ceci l'intégrale définie de $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ a une valeur unique (si elle existe). Nous énumérons ci-dessous ces règles de calcul.

Proposition 7.1:
Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions et a et b deux nombres réels. Alors:
a) (règle linéaire) $\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$
b) (règle des puissances)

$$\int x^n\,dx = \begin{cases} x^{n+1}/(n+1) + c, & \text{si } n \neq -1; \\ \ln(|x|) + c & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

c) (règle du produit) $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$
d) (règle de substitution) $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.
e) (primitives de fonctions usuelles)

$$\int e^x\,dx = e^x + c, \qquad \int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + c,$$
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c, \qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c.$$

Dans le cas de la règle du produit, on parle plutôt d'intégration par parties. C'est ainsi que nous désignerons cette règle par la suite. Nous allons maintenant illustrer ces règles de calcul dans quelques exemples.

Exemples 7.2:

a)

$$\begin{aligned}\int x^4 - 2x^{-1} + 5x^{-3}\,dx &= \int x^4\,dx - 2\int x^{-1}\,dx + 5\int x^{-3}\,dx \\ &= x^5/5 - 2\ln(|x|) + 5x^{-2}/(-2) + c\end{aligned}$$

par la règle linéaire et les formules pour les fonctions usuelles;

b)

$$\int x\exp(x^2)\,dx = (1/2)\int 2x\exp(x^2)\,dx = (1/2)\exp(x^2) + c$$

par la règle de substitution;

c)

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int x(\sin(x))'\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)(x)'\,dx \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) - (-\cos(x)) + c \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + c\end{aligned}$$

par intégration par parties;

d)

$$\int \tan(x)\,dx = \int \sin(x)/\cos(x)\,dx = -\int (\cos(x))'/\cos(x)\,dx = -\ln(|\cos(x)|) + c$$

par la règle de substitution;

En ce qui concerne la règle de substitution, nous pouvons procéder de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x)\,dx &= \int f(u)\,du, \quad \text{où } u = g(x) \text{ et } du = g'(x)\,dx; \\ &= F(u) = F(g(x)), \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f.\end{aligned}$$

Cette façon de procéder justifie le fait que l'on nomme celle-ci de règle de substitution. Nous allons illustrer ceci par les exemples ci-dessous.

Exemples 7.3:

a)

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\,dx &= \int \frac{du}{u^2} \quad \text{où } u = x^2+x+1 \text{ et } du = (2x+1)\,dx \\ &= \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-1}}{(-1)} + c \\ &= \frac{-1}{(x^2+x+1)} + c \quad \text{en substituant de nouveau } u = x^2+x+1;\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln(x))^2}{x}\,dx &= \int u^2\,du \quad \text{où } u = \ln(x) \text{ et } du = x^{-1}\,dx \\ &= \frac{u^3}{3} + c \\ &= \frac{(\ln(x))^3}{3} + c \quad \text{en substituant de nouveau } u = \ln(x).\end{aligned}$$

Pour ce qui est de l'intégration par parties, nous pouvons procéder de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= \int u\,dv \quad \text{où} \begin{cases} u = f(x), & du = f'(x)\,dx, \\ dv = g'(x)\,dx, & v = g(x), \end{cases} \\ &= uv - \int v\,du, \\ &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Nous allons illustrer ceci par les exemples ci-dessous.

Exemples 7.4:

a)

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx \quad \text{où} \begin{cases} u = x, & du = dx, \\ dv = e^x\,dx & v = e^x, \end{cases} \\ &= xe^x - e^x + c. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int (\ln(x))^2\,dx &= x(\ln(x))^2 - \int x(2\ln(x)\,x^{-1})\,dx \quad \text{où} \begin{cases} u = (\ln(x))^2, & du = 2\ln(x)\,x^{-1}\,dx, \\ dv = dx, & v = x, \end{cases} \\ &= x(\ln(x))^2 - 2\int \ln(x)\,dx, \\ &= x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + c. \end{aligned}$$

Il faut noter que la primitive $\int \ln(x)\,dx$ est obtenue aussi par intégration par parties. Plus précisément,

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,dx &= x\ln(x) - \int xx^{-1}\,dx \quad \text{où} \begin{cases} u = \ln(x), & du = x^{-1}\,dx, \\ dv = dx, & v = x, \end{cases} \\ &= x\ln(x) - \int dx, \\ &= x\ln(x) - x + c \end{aligned}.$$

Dans ce cas, nous avons donc utilisé deux fois la méthode d'intégration par parties.

Nous terminerons ce chapitre en discutant de l'utilisation des fractions partielles pour calculer une intégrale indéfinie de la forme $\int P(x)/Q(x)\,dx$ pour laquelle $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. Après division de $P(x)$ par $Q(x)$, nous aurons à évaluer une intégrale de la même forme, mais cette fois avec la condition supplémentaire que le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur. Dans ce qui suivra, nous allons donc supposer que l'intégrale indéfinie à calculer est de la forme $\int P(x)/Q(x)$ avec degré$(P(x)) <$ degré$(Q(x))$. Nous allons exprimer $P(x)/Q(x)$ sous la forme d'une somme dont les termes sont d'une des formes suivantes:

$$\frac{A}{(ax+b)^k}, \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

Nous serons plus précis à ce sujet ci-dessous.

Notons premièrement que le dénominateur $Q(x)$ sera un produit de facteurs d'une des formes suivantes:

$$\begin{aligned}(ax+b)^m &\quad \text{où } a, b \in \mathbf{R} \text{ tels que } a \neq 0 \text{ et } m \text{ est un entier positif;} \\ (ax^2+bx+c)^m &\quad \text{où } a, b, c \in \mathbf{R} \text{ tels que } a \neq 0,\ b^2 - 4ac < 0 \text{ et } m \text{ est un entier positif.}\end{aligned}$$

Si $(ax+b)^m$ est un des facteurs comme ci-dessus, alors dans l'expression de $P(x)/Q(x)$ comme une somme, nous aurons parmi les termes de cette dernière, la somme

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{A_k}{(ax+b)^k} \quad \text{où } A_1, A_2, \ldots, A_m \text{ sont des nombres réels (à déterminer);}$$

si $(ax^2+bx+c)^m$ est un des facteurs comme ci-dessus, c'est-à-dire avec entre autres $b^2-4ac<0$, alors dans l'expression de $P(x)/Q(x)$ comme une somme, nous aurons parmi les termes de cette dernière, la somme

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(A_kx+B_k)}{(ax^2+bx+c)^k}\quad \text{où } A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m \text{ sont des nombres réels (à determiner).}$$

Après avoir exprimé $P(x)/Q(x)$ sous cette forme de somme, il nous faut intégrer alors des fonctions d'une des deux formes suivantes:

$$\int\frac{A}{(ax+b)^k}\,dx,\quad \int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx.$$

Pour évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int\frac{A}{(ax+b)^k}\,dx,$$

il suffit d'utiliser la substitution $u=ax+b$. Pour évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int\frac{(Ax+B)}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx,$$

il faut noter que

$$\frac{(Ax+B)}{(ax^2+bx+c)^k}=\frac{\left(\frac{A}{2a}\right)(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

Nous devons donc considérer deux types d'intégrales indéfinies:

$$\int\left(\frac{A}{2a}\right)\frac{(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx \quad\text{et}\quad \int\frac{\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx.$$

Dans le premier cas, il suffit d'utiliser la substitution $u=ax^2+bx+c$; alors que dans le second cas, il faut premièrement compléter le carré et ensuite utiliser une substitution trigonométrique. Ce second cas est le plus difficile de tous et les intégrales de ce type que nous considérerons dans ce cours seront parmi les plus simples, c'est-à-dire m = 1. Nous allons illustrer tout ce processus par un exemple.

Exemple 7.5:

$$\begin{aligned}\int\frac{(4x^5+12x^4+23x^3+34x^2+23x+4)}{(4x^4+12x^3+17x^2+10x+2)}\,dx &= \int x+\frac{(6x^3+24x^2+21x+4)}{(4x^4+12x^3+17x^2+10x+2)}\,dx \quad \text{après division}\\ &= (x^2/2)+\int\frac{(6x^3+24x^2+21x+4)}{(4x^4+12x^3+17x^2+10x+2)}\,dx.\end{aligned}$$

Il suffit donc d'évaluer l'intégrale

$$\int\frac{(6x^3+24x^2+21x+4)}{(4x^4+12x^3+17x^2+10x+2)}\,dx.$$

En sachant que $4x^4+12x^3+17x^2+10x+2=(2x+1)^2(x^2+2x+2)$, nous aurons alors par la théorie des fractions partielles que

$$\frac{(6x^3+24x^2+21x+4)}{(4x^4+12x^3+17x^2+10x+2)}=\frac{(6x^3+24x^2+21x+4)}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)}=(*)$$

est tel que

$$
\begin{aligned}
(*) &= \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{(Cx+D)}{(x^2+2x+2)} \\
&= \frac{A(2x+1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)(2x+1)^2}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)} \\
&= \frac{A(2x^3+5x^2+6x+2) + B(x^2+2x+2) + C(4x^3+4x^2+x) + D(4x^2+4x+1)}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)} \\
&= \frac{(2A+4C)x^3 + (5A+B+4C+4D)x^2 + (6A+2B+C+4D)x + (2A+2B+D)}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)}.
\end{aligned}
$$

En comparant les numérateurs et parce que les dénominateurs sont les mêmes, nous obtenons un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues A, B, C, D:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
2A & + & 0B & + & 4C & + & 0D & = & 6, \\
5A & + & 1B & + & 4C & + & 4D & = & 24, \\
6A & + & 2B & + & 1C & + & 4D & = & 21, \\
2A & + & 2B & + & 0C & + & 1D & = & 4.
\end{array}
$$

Par élimination, nous obtenons que ce système a une seule solution: $A = 1, B = -1, C = 1$ et $D = 4$. En d'autres mots,

$$
\frac{(6x^3+24x^2+21x+4)}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{(2x+1)} - \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{(x+4)}{(x^2+2x+2)}.
$$

Ainsi pour évaluer l'intégrale $\int (6x^3+24x^2+21x+4)/(4x^4+12x^3+17x^2+10x+2)\,dx$, il nous faut donc considérer les trois intégrales suivantes:

$$
\int \frac{dx}{(2x+1)}, \quad \int \frac{dx}{(2x+1)^2} \quad \text{et} \quad \int \frac{(x+4)}{(x^2+2x+2)}\,dx.
$$

Pour la première de ces intégrales, nous avons

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2x+1)} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \qquad \text{où } u = 2x+1, \\
&= \frac{1}{2}\ln(|u|) + c' = \frac{1}{2}\ln(|2x+1|) + c';
\end{aligned}
$$

alors que pour la seconde de celles-ci, nous avons en utilisant la même substitution

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2x+1)^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} \quad \text{où } u = 2x+1, \\
&= \frac{1}{(2)(-1)}u^{-1} + c'' = \frac{-1}{2(2x+1)} + c''.
\end{aligned}
$$

Finalement pour la troisième de celles-ci, nous notons premièrement

$$
\int \frac{(x+4)}{(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)}{(x^2+2x+2)}\,dx + \int \frac{3}{(x^2+2x+2)}\,dx.
$$

Il est bon d'observer que pour la première intégrale du terme de droite de l'équation, le numérateur est la dérivée du dénominateur. De cette observation, nous obtenons que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{(2x+2)}{(x^2+2x+2)}\,dx &= \int \frac{du}{u} \quad \text{où } u = x^2+2x+2 \\
&= \ln(|u|) + c''' = \ln(|x^2+2x+2|) + c'''.
\end{aligned}
$$

Alors que pour la seconde intégrale du terme de droite de l'égalité, nous pouvons l'intégrer en complétant le carré. Plus précisément,

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{(x^2+2x+2)}\,dx = \int \frac{3}{(x^2+2x+1+1)}\,dx &= \int \frac{3}{((x+1)^2+1)}\,dx \\ &= \int \frac{3\,du}{(u^2+1)} \quad \text{où } u = x+1 \\ &= 3\arctan(u) + c'''' = 3\arctan(x+1) + c''''.\end{aligned}$$

De tout ce qui précède, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\int \frac{(4x^5+12x^4+23x^3+34x^2+23x+4)}{(4x^4+12x^3+17x^2+10x+2)}\,dx &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(|2x+1|) + \frac{1}{2(2x+1)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\ln(|x^2+2x+2|) + 3\arctan(x+1) + c.\end{aligned}$$

Cet exemple illustre bien ce qu'il faut faire pour évaluer ce type d'intégrale. Trouver l'intégrale indéfinie d'une fonction est un problème plus difficile que celui de calculer la dérivée d'une fonction. Dans certains cas, il est impossible d'exprimer la primitive en termes de fonctions usuelles; par exemple $\int \exp(-x^2)\,dx$ est une telle primitive. Mais dans ce derniers cas, il existe tout de même des tables pour calculer l'intégrale définie $\int_a^b \exp(-x^2)\,dx$ quelque soient $a, b \in \mathbf{R}$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 7.1:
Calculer les intégrales définies suivantes:

a) $\int_1^2 (x^3 - 4x^{-1} + 5x^{-2})\,dx$;

b) $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$;

c) $\int_0^2 5x/(2x^2+1)^2\,dx$;

d) $\int_0^3 x^2 e^x\,dx$;

e) $\int_2^4 1/(x-1)(x+1)\,dx$;

f) $\int_{-1/2}^1 1/(4x^2+4x+10)\,dx$.

Exercice 7.2:
Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

a) $\int \cos(x)\sin(x)\,dx$;

b) $\int \sin^2(x)\,dx$;

c) $\int \arctan(x)\,dx$;

d) $\int (x-4)/(x^2-5x+6)\,dx$;

e) $\int x^5/\sqrt{1+x^2}\,dx$;

f) $\int \cos(3x)\sin(x)\,dx$.

Exercice 7.3:

En utilisant la subdivision de l'intervalle $[0,1]$ en n sous-intervalles égaux et en prenant pour x_i le point le plus à droite du i-ième sous-intervalle, calculer la somme de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta_i$, ainsi que la limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta_i$ pour les deux fonctions suivantes en sachant que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ :$$

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x^2$