CHAPITRE 9

Intégrales triples.

Dans ce chapitre, nous définirons l'intégrale triple d'une fonction $f(x, y, z)$ sur une région bornée de $\mathbf{R}^3$ et nous présenterons quelques-unes de ces propriétés. Ensuite nous verrons comment calculer ces intégrales au moyen d'intégrales itérées. Nous conclurons ce chapitre en discutant des coordonnées cylindriques et sphériques et du théorème de changement de variables pour l'intégrale triple dans ces cas particuliers.

Soient R, une région bornée de $\mathbf{R}^3$, c'est-à-dire que R est contenue dans un parallélipipède rectangle suffisamment grand, et $f(x, y, z)$ une fonction définie et bornée sur R. On définit l'intégrale de $f(x, y, z)$ sur R, que l'on note

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

comme étant la limite

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{\delta_i | 1 \leq i \leq n\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i,$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de la région R en n sous-régions: $R_1, R_2, \ldots, R_n$, dont le diamètre de R_i, c'est-à-dire la distance maximale entre deux points quelconques de R_i, est noté δ_i, en y laissant n, le nombre de ces sous-régions devenir de plus en plus grand et le maximum $\max\{\delta_i | 1 \leq i \leq n\}$ des diamètres de ces sous-régions devenir de plus en plus près de zéro; de plus dans cette définition, (x_i, y_i, z_i) peut être n'importe quel point de R_i et ΔV_i est le volume de la sous-région R_i.

Cette limite n'existe pas toujours. Cependant si R est une région bornée, $f(x, y, z)$ est continue sur R et que le bord de R consiste en une réunion finie de surfaces lisses, alors l'intégrale triple $\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ existe. Dans ce dernier cas, il est possible d'interpréter l'intégrale triple dans le cas où $f(x, y, z) \geq 0$ pour tout point (x, y, z) de R et que l'on considère comme une fonction de densité comme étant la masse de R. Il est aussi possible de vérifier à partir de la définition de l'intégrale que $\iiint_R dx\, dy\, dz$ est égale au volume de R. Dans ce dernier cas, la fonction à intégrer est la fonction constante $f(x, y, z) = 1$ et nous supposons que la région R est bornée et que son bord est une réunion finie de surfaces lisses.

Nous allons maintenant énumérer quelques-unes des propriétes des intégrales triples dans la proposition ci-dessous. Elle est démontrée en utilisant la définition de l'intégrale triple.

Proposition 9.1:
Soient R, R', deux régions de $\mathbf{R}^3$ telles que l'intersection $R \cap R'$ de celles-ci est contenue dans les bords de R et R'. Soient $f(x, y, z), g(x, y, z)$ deux fonctions réelles et a, b deux nombres réels. Alors:
a) (règle linéaire) $\iiint_R (a\, f(x, y, z) + b\, g(x, y, z))\, dx\, dy\, dz = a \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + b \iiint_R g(x, y, z))\, dx\, dy\, dz$
b) $\iiint_{R\cup R'} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{R'} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$
si ces intégrales existent.

Tout comme pour l'intégrale double, il est possible d'évaluer une intégrale triple au moyen d'intégrales itérées. Dans la prochaine proposition, nous allons considérer une première situation et ultérieurement faire l'énumération d'autres situations.

Proposition 9.2:
Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

pour laquelle $g_1(x), g_2(x)$ sont des fonctions de x telles que $g_1(x) \leq g_2(x)$ pour tout x avec $a \leq x \leq b$ et $h_1(x, y), h_2(x, y)$ sont des fonctions de x et y telles que $h_1(x, y) \leq h_2(x, y)$ pour tout (x, y) avec $a \leq x \leq b$ et $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Alors

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

si ces intégrales existent. Nous avons représenté la région R à la figure 9.1.

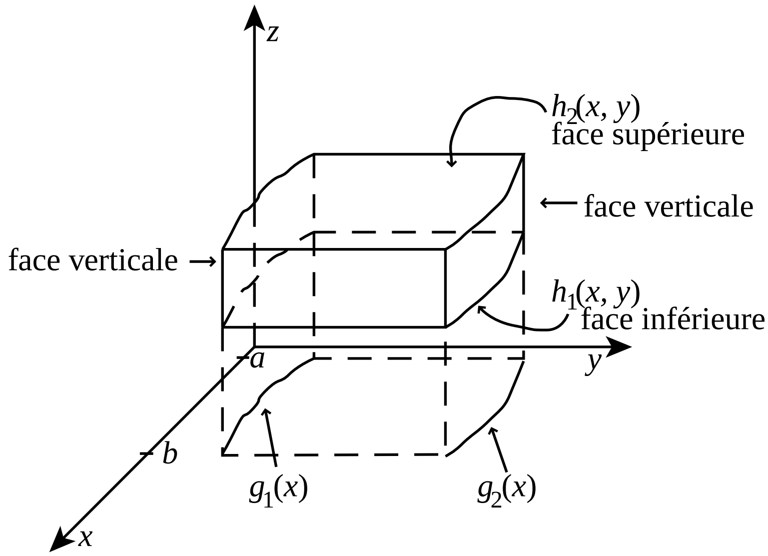

figure 9.1

La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 8.2. Elle ne sera pas présentée dans ces notes. Avant de discuter des variantes de cette proposition 9.2, nous allons considérer deux exemples.

Exemple 9.1:
Soit R, la région de $\mathbf{R}^3$ à l'intérieur du tétraèdre dont les sommets sont $\mathrm{A} = (0,0,0), \mathrm{B} = (1,0,0), \mathrm{C} = (1,1,0)$ et $\mathrm{D} = (1,1,1)$. Nous avons représenté la région R à la figure 9.2.

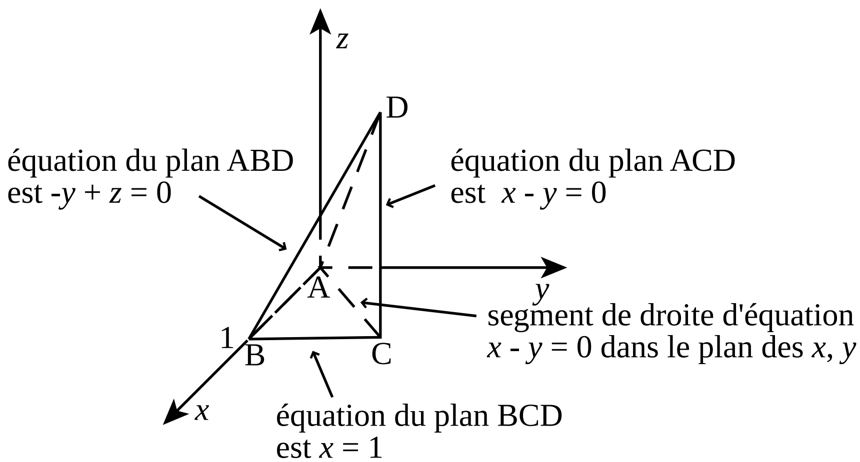

figure 9.2

L'équation du plan passant par les trois points A, B et D est $-y+z=0$. Nous obtenons cette équation en sachant qu'elle sera de la forme $ax+by+cz=d$ et dont a, b, c, d sont à déterminer. Mais par ce que A, B et D appartiennent au plan, leurs coordonnées doivent vérifier cette équation. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} a(1)+b(0)+c(0) &= d \\ a(0)+b(0)+c(0) &= d \\ a(1)+b(1)+c(1) &= d. \end{aligned}$$

Nous obtenons $a=0, d=0$ et $b+c=0$. Il y a une infinité de solutions. Il nous en faut qu'une seule. Prenons par exemple $c=1$. Conséquemment $b=-1$ et c'est ainsi que nous obtenons l'équation $-y+z=0$

pour ce plan. L'équation du plan passant par B, C et D est $x = 1$. L'équation du plan passant par A, C et D est $x - y = 0$. L'équation de la droite dans le plan des x, y passant par A et C est $x - y = 0$. De tout ceci, nous pouvons affirmer que R est une région du type de la proposition 9.2. En effet,

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq y\}.$$

Alors

$$\iiint_R z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y z\,dz\right) dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=y} dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{y^2}{2}\,dy\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{6}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{6}\,dx = \left(\frac{x^4}{24}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{24}.$$

Exemple 9.2:
Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R y\,dx\,dy\,dz$ sur la région $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ (x^2 + y^2) \leq z \leq 1\}$. Cette région est celle contenue dans le premier octant à l'intérieur du paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et sous le plan horizontal d'équation $z = 1$. Elle est du type de la proposition 9.2. Nous avons représenté la région R à la figure 9.3.

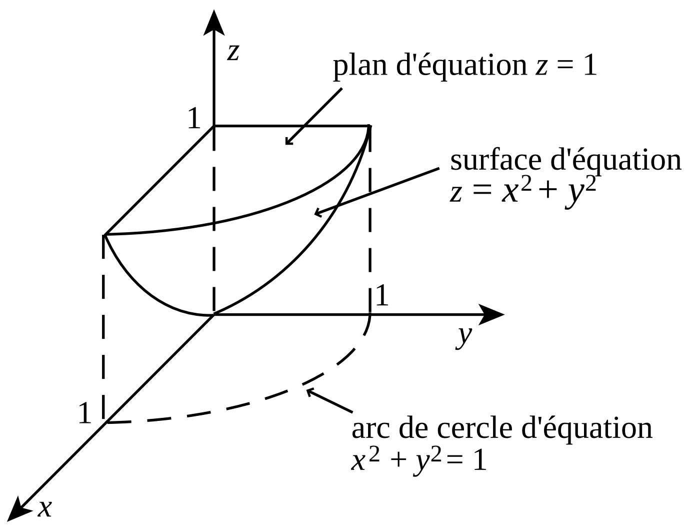

figure 9.3

En effet, $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2},\ (x^2 + y^2) \leq z \leq 1\}$. Donc

$$\iiint_R y\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^1 y\,dz\right) dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(yz\right]_{z=x^2+y^2}^{z=1} dy\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (y - y(x^2 + y^2))\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left((1 - x^2)y - y^3\right) dy\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left((1 - x^2)\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{(1 - x^2)^2}{2} - \frac{(1 - x^2)^2}{4}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (1 - x^2)^2\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}.$$

Nous allons énumérer des variantes de la proposition précédente. Essentiellement tout ce qui est différent d'un cas à l'autre, c'est le type de la région d'intégration. Il est préférable non pas de mémoriser ces formules, mais plutôt de les comprendre et de bien les visualiser.

Proposition 9.2':
a) Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\, g_1(x) \leq z \leq g_2(x),\, h_1(x,z) \leq y \leq h_2(x,z)\}$$

pour laquelle $g_1(x), g_2(x)$ sont des fonctions de x telles que $g_1(x) \leq g_2(x)$ pour tout x avec $a \leq x \leq b$ et $h_1(x,z), h_2(x,z)$ sont des fonctions de x et z telles que $h_1(x,z) \leq h_2(x,z)$ pour tout (x,z) avec $a \leq x \leq b$ et $g_1(x) \leq z \leq g_2(x)$. Alors

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dz \right) dx$$

si ces intégrales existent.
b) Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq y \leq b,\, g_1(y) \leq x \leq g_2(y),\, h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)\}$$

pour laquelle $g_1(y), g_2(y)$ sont des fonctions de y telles que $g_1(y) \leq g_2(y)$ pour tout y avec $a \leq y \leq b$ et $h_1(x,y), h_2(x,y)$ sont des fonctions de x et y telles que $h_1(x,y) \leq h_2(x,y)$ pour tout (x,y) avec $a \leq y \leq b$ et $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$. Alors

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx \right) dy$$

si ces intégrales existent.
c) Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq y \leq b,\, g_1(y) \leq z \leq g_2(y),\, h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z)\}$$

pour laquelle $g_1(y), g_2(y)$ sont des fonctions de y telles que $g_1(y) \leq g_2(y)$ pour tout y avec $a \leq y \leq b$ et $h_1(y,z), h_2(y,z)$ sont des fonctions de y et z telles que $h_1(y,z) \leq h_2(y,z)$ pour tout (y,z) avec $a \leq y \leq b$ et $g_1(y) \leq z \leq g_2(y)$. Alors

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \left(\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dz \right) dy$$

si ces intégrales existent.
d) Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq z \leq b,\, g_1(z) \leq x \leq g_2(z),\, h_1(x,z) \leq y \leq h_2(x,z)\}$$

pour laquelle $g_1(z), g_2(z)$ sont des fonctions de z telles que $g_1(z) \leq g_2(z)$ pour tout z avec $a \leq z \leq b$ et $h_1(x,z), h_2(x,z)$ sont des fonctions de x et z telles que $h_1(x,z) \leq h_2(x,z)$ pour tout (x,z) avec $a \leq z \leq b$ et $g_1(z) \leq x \leq g_2(z)$. Alors

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \left(\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dx \right) dz$$

si ces intégrales existent.
e) Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq z \leq b,\, g_1(z) \leq y \leq g_2(z),\, h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z)\}$$

pour laquelle $g_1(z), g_2(z)$ sont des fonctions de z telles que $g_1(z) \leq g_2(z)$ pour tout z avec $a \leq z \leq b$ et $h_1(y,z), h_2(y,z)$ sont des fonctions de y et z telles que $h_1(y,z) \leq h_2(y,z)$ pour tout (y,z) avec $a \leq z \leq b$ et $g_1(z) \leq y \leq g_2(z)$. Alors

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \left(\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz$$

si ces intégrales existent.

La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 8.2. Elle ne sera pas présentée dans ces notes. Nous allons poursuivre notre présentation d'exemples de l'utilisation d'intégrales itérées pour le calcul d'intégrales triples.

Exemple 9.3:
Soit $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x,\, 0 \leq y,\, (x^2+y^2) \leq z^2,\, 1 \leq z \leq 2\}$. R est la région de $\mathbf{R}^3$ contenue dans le premier octant au-dessus du plan horizontal d'équation $z = 1$, en-dessous du plan d'équation $z = 2$ et à l'intérieur du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Nous avons représenté R dans la figure 9.4.

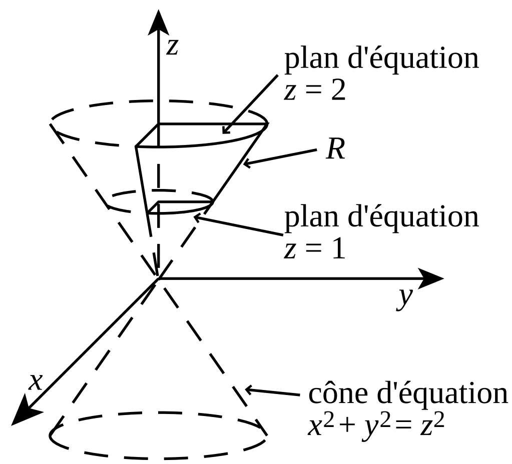

figure 9.4

Considérons l'intégrale triple $\iiint_R 4y^3\,dx\,dy\,dz$. La région R est d'un des types présentés à la proposition 9.2'. En effet $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq z \leq 2,\, 0 \leq x \leq z,\, 0 \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2}\}$. Donc

$$\begin{aligned}
\iiint_R 4y^3\,dx\,dy\,dz &= \int_1^2 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} 4y^3\,dy \right) dx \right) dz = \int_1^2 \left(\int_0^z \left(y^4 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{z^2-x^2}} dx \right) dz \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^z (z^2-x^2)^2\,dx \right) dz = \int_1^2 \left(\int_0^z (z^4 - 2z^2x^2 + x^4)\,dx \right) dz \\
&= \int_1^2 \left(z^4x - \frac{2z^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=z} dz = \int_1^2 \left(z^4z - \frac{2z^2z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right) dz \\
&= \frac{8}{15} \int_1^2 z^5\,dz = \frac{8}{15} \left(\frac{z^6}{6} \right]_{z=1}^{z=2} = \frac{4}{45}(2^6 - 1^6) = \frac{28}{5}
\end{aligned}$$

Exemple 9.4:
Soit R, la région de $\mathbf{R}^3$ à l'intérieur de l'hexaèdre dont les sommets sont $\mathrm{A} = (2,2,-4), \mathrm{B} = (1,2,-3), \mathrm{C} = (2,4,-6), \mathrm{D} = (4,4,-8), \mathrm{E} = (2,2,-8), \mathrm{F} = (1,2,-6), \mathrm{G} = (2,4,-12)$ et $\mathrm{H} = (4,4,-16)$. Nous avons représenté R à la figure 9.5.

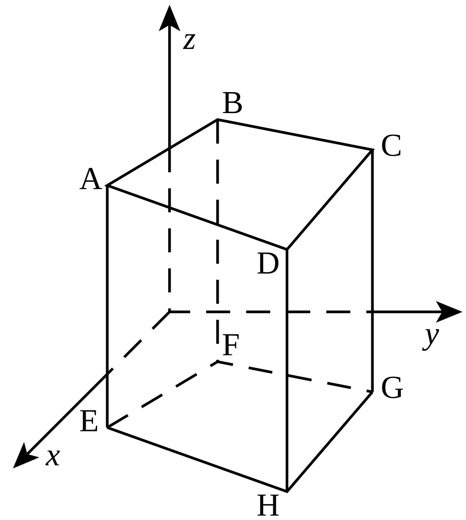

figure 9.5

En procédant comme nous l'avons fait à l'exemple 9.1, nous pouvons déterminer les équations des plans bordant R. L'équation du plan contenant les points A, B, E et F est $y = 2$, celle du plan contenant les points C, D, H et G est $y = 4$, celle du plan contenant les points A, D, E et H est $y - x = 0$, celle du plan contenant les points B, C, F et G est $y - 2x = 0$, celle du plan contenant les points A, B, C et D est $x + y + z = 0$ et finalement celle du plan contenant les points E, F, G et H est $2x + 2y + z = 0$. Déterminons le volume de R. Nous savons que le volume de la région R est $\iiint_R dx\,dy\,dz$. La proposition 9.2' est applicable dans ce cas-ci, car

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2 \leq y \leq 4,\ (y/2) \leq x \leq y,\ -(2x + 2y) \leq z \leq -(x + y)\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\text{Volume de } R &= \int_2^4 \left(\int_{y/2}^{y} \left(\int_{-(2x+2y)}^{-(x+y)} dz \right) dx \right) dy = \int_2^4 \left(\int_{y/2}^{y} \left(z \right]_{z=-(2x+2y)}^{z=-(x+y)} dx \right) dy \\
&= \int_2^4 \left(\int_{y/2}^{y} (x + y)\, dx \right) dy = \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=y/2}^{x=y} dy \\
&= \int_2^4 \left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) - \left(\frac{(y/2)^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dy \\
&= \frac{7}{8} \int_2^4 y^2\, dy = \frac{7}{8} \left(\frac{y^3}{3} \right]_{y=2}^{y=4} = \frac{7}{8} \left(\frac{4^3 - 2^3}{3} \right) = \frac{49}{3}.
\end{aligned}$$

Il y a plusieurs façons de décrire les points de $\mathbf{R}^3$. Parmi tous ces systèmes de coordonnées, deux apparaissent souvent; il s'agit des coordonnées cylindriques et des coordonnées sphériques. Nous allons maintenant considérer ces systèmes de coordonnées, ainsi que le théorème de changement de coordonnées pour les intégrales triples dans le cas des changements des coordonnées cartésiennes à ces coordonnées.

Au point (x, y, z) du plan $\mathbf{R}^3$, nous pouvons lui associer ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour lesquelles r est la distance entre le point (x, y) et l'origine $(0, 0)$ dans le plan des x, y, alors que θ est la mesure (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) de l'angle formé par la demi-droite des x positifs et la demi-droite commençant à l'origine et passant par le point (x, y) dans le plan des x, y. Finalement z dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z) du point (x, y, z) est la composante par rapport à l'axe des z. Nous avons représenté ceci à la figure 9.6.

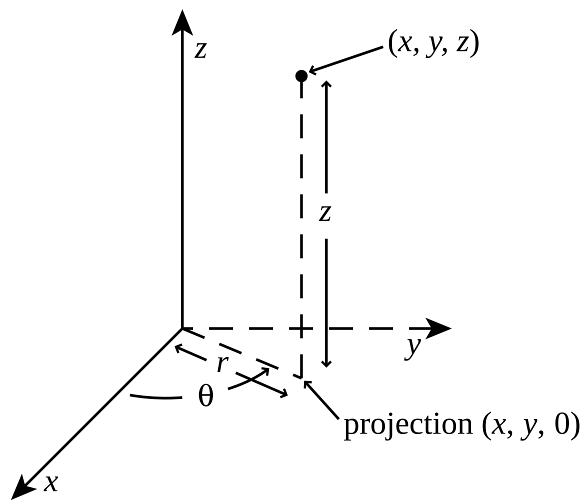

figure 9.6

Ainsi nous avons $0 \leq r$, $0 \leq \theta < 2\pi$ et $z \in \mathbf{R}$. Les changements de coordonnées sont les suivants:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(y/x), \\ z = z. \end{cases}$$

Ceci est une conséquence simple de la définition de r, θ et z.

Nous pouvons maintenant énoncer une proposition similaire à la proposition 8.3 avec dans ce cas-ci le changement de coordonnées cartésiennes à coordonnées cylindriques.

Proposition 9.3:

Soient R, une région de l'espace des x, y, z, $R' = \{(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times R \mid (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) \in R\}$, la région correspondante dans l'espace des r, θ, z et une fonction réelle $f : R \to \mathbf{R}$ telle que l'intégrale triple $\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ existe. Alors l'intégrale $\iiint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r\, dr\, d\theta\, dz$ existe et nous avons

$$\iiint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r\, dr\, d\theta\, dz = \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Preuve: Celle-ci est similaire à celle de la proposition 8.3 au chapitre précédent. Il s'agit de calculer un petit élément de volume. Ceci est obtenu dans la figure 9.7.

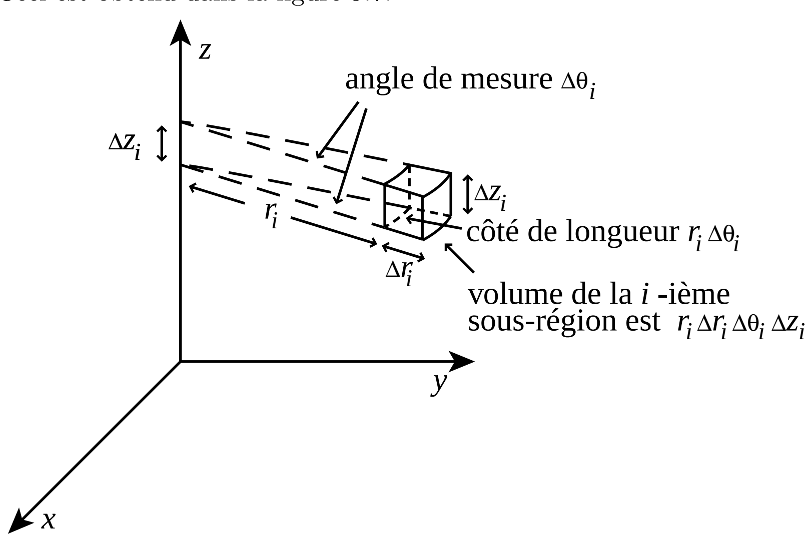

figure 9.7

Cette région représente la i-ième sous-région dans la définition de l'intégrale triple. Son volume est $r_i\,(\Delta\theta_i)\,(\Delta r_i)\,(\Delta z_i)$. Ceci explique la présence du facteur $r\,dr\,d\theta\,dz$ dans l'intégrale du côté gauche de l'égalité.

Exemple 9.5:
Soit $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Cette région R est celle à l'intérieur du cylindre dont l'axe est l'axe des z et de rayon 2, à l'extérieur du cylindre dont l'axe est aussi l'axe des z et de rayon 1, au-dessus du plan d'équation $z=0$ et en-dessous du plan d'équation $z=1$. Nous avons représenté cette région à la figure 9.8.

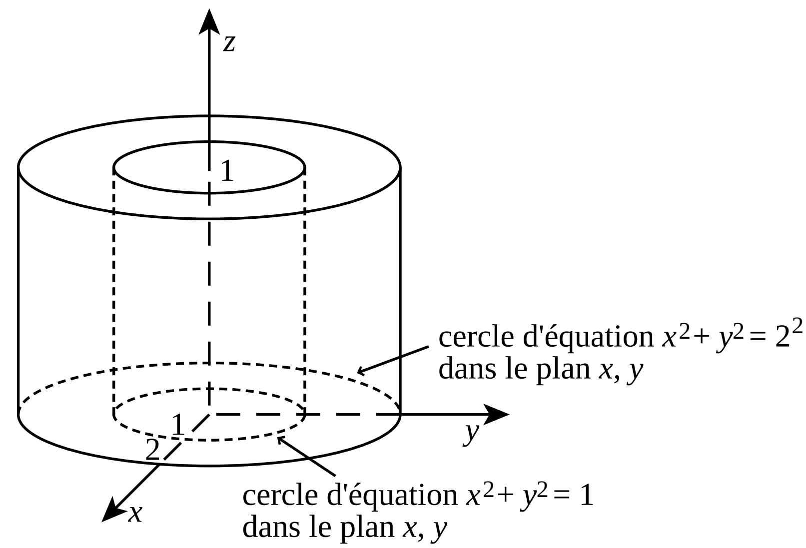

figure 9.8

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R z\exp(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$. Nous pouvons utiliser la proposition 9.3 pour évaluer celle-ci. La région R' correspondant à R dans les coordonnées cylindriques sera $R' = \{(r,\theta,z) \mid 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Noter que $x^2+y^2 = (r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 = r^2$. De la proposition 9.3, nous avons

$$\begin{aligned}
\iiint_R z\exp(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz &= \iiint_{R'} z\exp(r^2)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 zr\exp(r^2)\,dr\right)d\theta\right)dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{z\exp(r^2)}{2}\right]_{r=1}^{r=2} d\theta\right)dz = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\frac{z(e^4-e^1)}{2}\,d\theta\right)dz \\
&= \frac{(e^4-e^1)}{2}\int_0^1\left(\int_0^{2\pi} z\,d\theta\right)dz = \frac{(e^4-e)}{2}\int_0^1 \left(z\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dz \\
&= (e^4-e)\,\pi\int_0^1 z\,dz = (e^4-e)\,\pi\left(\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{(e^4-e)\,\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exemple 9.6:
Soit $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z^2 \leq 4(x^2+y^2),\ -2 \leq z \leq 2\}$. R est la région de $\mathbf{R}^3$ à l'intérieur du cylindre dont l'axe de symétrie est l'axe des z et de rayon 1, entre les deux plans horizontaux d'équation respectivement $z=2$ et $z=-2$ et à l'extérieur du cône d'équation $z^2 = 4(x^2+y^2)$. Nous avons représenté cette région à la figure 9.9.

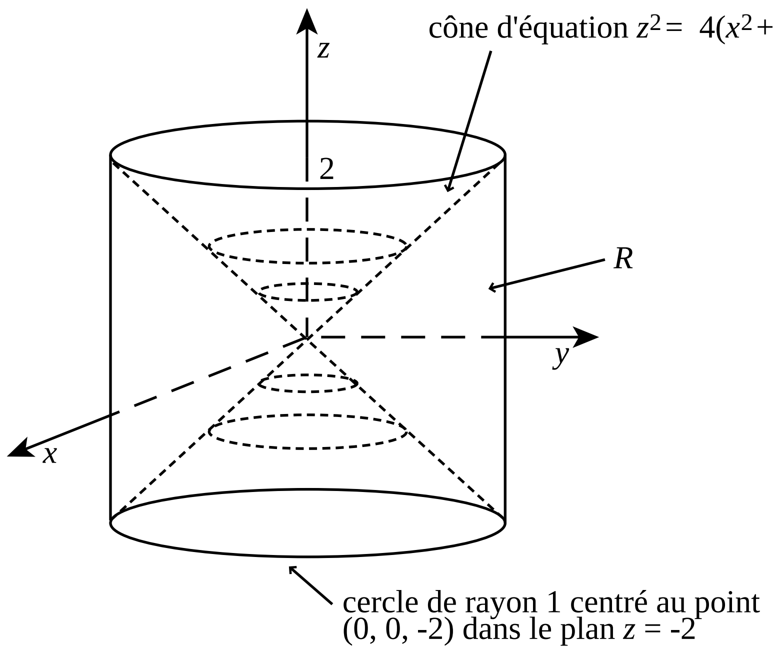

figure 9.9

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ en utilisant les coordonnées cylindriques plutôt que les coordonnées cartésiennes. La région R' correspondant à R en coordonnées cylindriques sera $R' = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\, 0 \le r \le 1,\, -2r \le z \le 2r\}$. Notons aussi que $x^2+y^2+z^2 = (r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 + z^2 = r^2+z^2$. En utilisant la proposition 9.3 et de ce qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz &= \iiint_{R'} (r^2+z^2)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{-2r}^{2r}(r^2+z^2)\,r\,dz\right)dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(r^3z+\frac{rz^3}{3}\right]_{z=-2r}^{z=2r} dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{28r^4}{3}\,dr\right)d\theta \\
&= \frac{28}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{28}{15}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{28}{15}\left(\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{56\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Au point (x,y,z) du plan $\mathbf{R}^3$, nous pouvons aussi lui associer ses coordonnées sphériques (ρ,θ,φ) pour lesquelles ρ est la distance entre le point (x,y,z) et l'origine $(0,0,0)$ dans $\mathbf{R}^3$, alors que θ est la mesure (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) de l'angle formé par la demi-droite des x positifs et la demi-droite commençant à l'origine et passant par le point (x,y) dans le plan des x,y et φ est la mesure de l'angle formé par la demi-droite des z positifs et la demi-droite commençant à l'origine et passant par le point (x,y,z) dans $\mathbf{R}^3$. Ainsi nous avons $0 \le \rho$, $0 \le \theta < 2\pi$ et $0 \le \varphi \le \pi$. Nous avons représenté ceci dans la figure 9.10.

Les changements de coordonnées sont les suivants:

$$\begin{cases} x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arctan(y/x), \\ \varphi = \arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z). \end{cases}$$

Ceci est une conséquence simple de la définition de ρ, θ et φ.

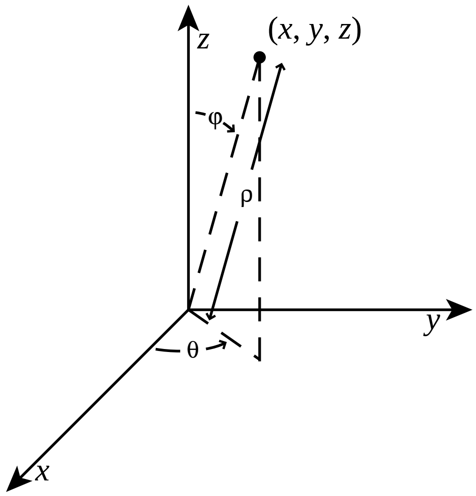

figure 9.10

Nous pouvons aussi énoncer une proposition similaire à la proposition 8.3 avec dans ce cas-ci le changement de coordonnées cartésiennes à coordonnées sphériques.

Proposition 9.4:
Soient R, une région de l'espace des x, y, z, R' l'ensemble des $(\rho, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ tels que $(\rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\varphi)) \in R$, la région correspondante dans l'espace des ρ, θ, φ et une fonction réelle $f : R \to \mathbf{R}$ telle que l'intégrale triple $\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ existe. Alors

$$\iiint_{R'} f(\rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\varphi))\, \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

existe et nous avons

$$\iiint_{R'} f(\rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\varphi))\, \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Preuve: Celle-ci est similaire à celle de la proposition 8.3 au chapitre précédent. Il s'agit de calculer un petit élément de volume. Ceci est obtenu dans la figure 9.11. Cette région représente la i-ième sous-région dans la définition de l'intégrale triple. Son volume est $\rho_i^2 \sin(\varphi_i)\, (\Delta\varphi_i)\, (\Delta\theta_i)\, (\Delta\rho_i)$. Ceci explique la présence du facteur $\rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$ dans l'intégrale du côté gauche de l'égalité.

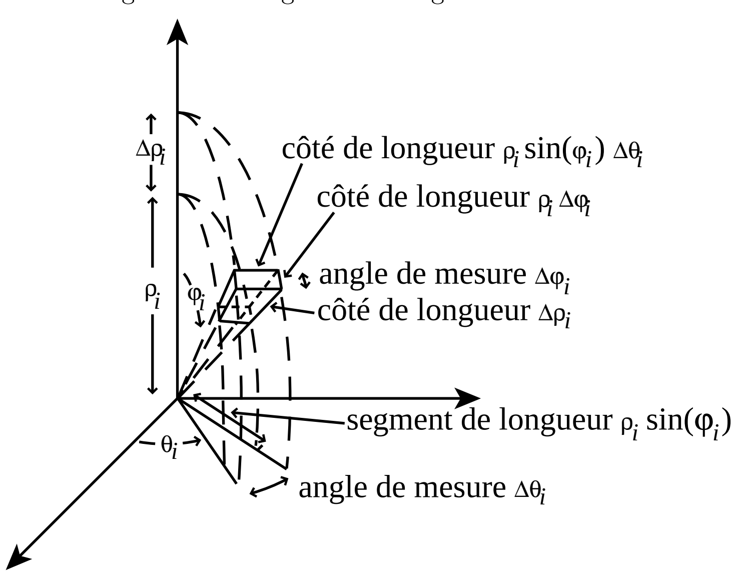

figure 9.11

Exemple 9.7:
Soit $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2,\, 0 \leq z,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Ainsi R est la région de $\mathbf{R}^3$ contenu à l'intérieur de la sphère centrée à l'origine et de rayon 1, à l'intérieur du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ et au-dessus du plan horizontal d'équation $z = 0$. Nous avons représenté R dans la figure 9.12.

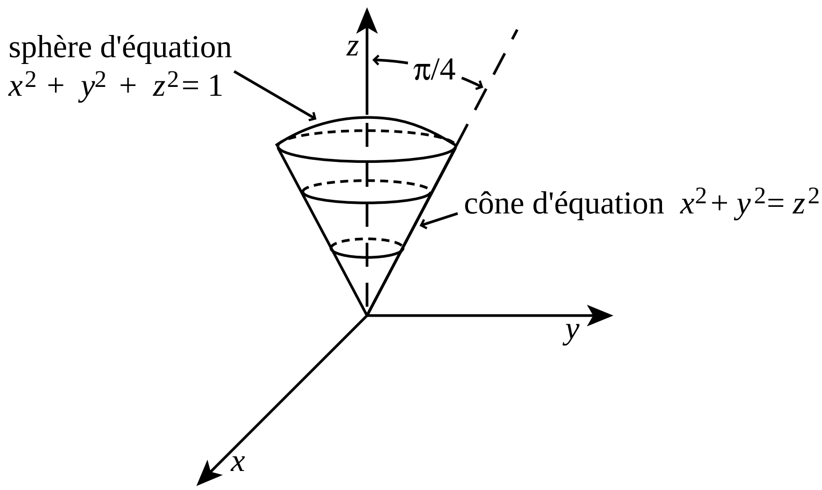

figure 9.12

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\, dx\, dy\, dz$ en utilisant les coordonnées sphériques. La région R' correspondant à R en coordonnées sphériques sera $R' = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi/4\}$. Notons aussi que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. En utilisant la proposition 9.4 et de ce qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\, dx\, dy\, dz &= \iiint_{R'} (\rho^2)^{3/2}\, \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/4} \rho^5 \sin(\varphi)\, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^5 \left(-\cos(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} d\theta \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^5 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - (-1) \right) d\theta \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{(2-\sqrt{2})}{2} \rho^5\, d\theta \right) d\rho = \frac{(2-\sqrt{2})}{2} \int_0^1 \rho^5 \left(\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho \\
&= \frac{2\pi(2-\sqrt{2})}{2} \int_0^1 \rho^5\, d\rho = (2-\sqrt{2})\pi \left(\frac{\rho^6}{6} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Exemple 9.8:
Soit $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq z,\, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Nous avons représenté la région R à la figure 9.13.

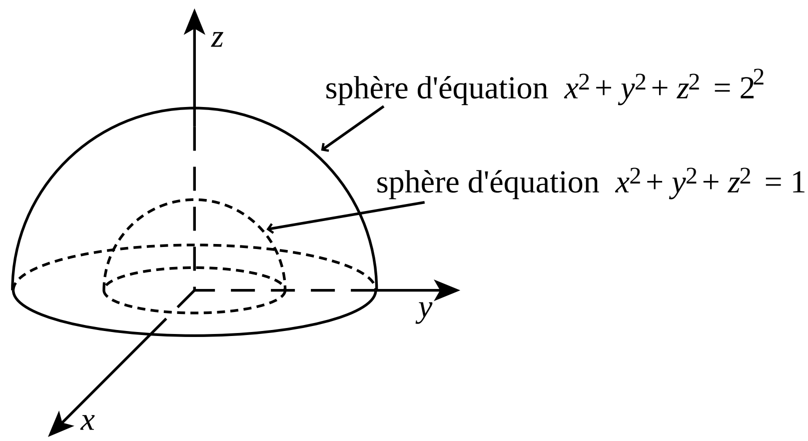

figure 9.13

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R z\,dx\,dy\,dz$. La région R' correspondant à R en coordonnées sphériques sera $R' = \{(\rho,\theta,\varphi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 1 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$. En utilisant la proposition 9.4 et de ce qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\iiint_R z\,dx\,dy\,dz &= \iiint_{R'} \rho\cos(\varphi)\rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2\left(\int_0^{\pi/2} \rho^3\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi\right)d\rho\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2\left(\rho^3\frac{\sin^2(\varphi)}{2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} d\rho\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 \frac{\rho^3}{2}\,d\rho\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi^4}{4}\right]_{\rho=1}^{\rho=2} d\rho \\
&= \frac{15}{8}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{15\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Exemple 9.9:
Evaluons l'intégrale de l'exemple 9.6 en utilisant les coordonnées sphériques plutôt que les coordonnées cylindriques. Rappelons que nous avons représenté R à la figure 9.9. La région R' correspondant à R en coordonnées sphériques est $R' = \{(\rho,\theta,\varphi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, \varphi_{\min} \leq \varphi \leq \pi - \varphi_{\min}, 0 \leq \rho \leq 1/\sin(\varphi)\}$. Il est facile de vérifier que $\varphi_{\min}$ est tel que $\tan(\varphi_{\min}) = 1/2, \sin(\varphi_{\min}) = 1/\sqrt{5}, \cos(\varphi_{\min}) = 2/\sqrt{5}, \sin(\pi - \varphi_{\min}) = 1/\sqrt{5}$ et $\cos(\pi - \varphi_{\min}) = -2/\sqrt{5}$. Pour obtenir ceci, nous utilisons le fait que $\rho\sin(\varphi) = 1$ pour les points sur le

bord cylindrique vertical de notre région. En utilisant la proposition 9.4 et de ce qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz &= \iiint_{R'} \rho^2\,\rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_{\varphi_{\min}}^{\pi-\varphi_{\min}}\left(\int_0^{1/\sin(\varphi)} \rho^4\sin(\varphi)\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_{\varphi_{\min}}^{\pi-\varphi_{\min}}\left(\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=1/\sin(\varphi)} \sin(\varphi)\,d\varphi\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_{\varphi_{\min}}^{\pi-\varphi_{\min}} \frac{1}{5\sin^4(\varphi)}\,d\varphi\right)d\theta \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\cos(\varphi)}{3\sin^3(\varphi)} - \frac{2\cos(\varphi)}{3\sin(\varphi)}\right]_{\varphi=\varphi_{\min}}^{\varphi=\pi-\varphi_{\min}} d\theta \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(\frac{-1(-2/\sqrt{5})}{3(1/\sqrt{5})^3} - \frac{2(-2/\sqrt{5})}{3(1/\sqrt{5})}\right) - \left(\frac{-1(2/\sqrt{5})}{3(1/\sqrt{5})^3} - \frac{2(2/\sqrt{5})}{3(1/\sqrt{5})}\right)d\theta \\
&= \frac{28}{15}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{28}{15}\left(\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{56\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Dans le calcul précédent, il a fallu utiliser l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1}{\sin^4(x)}\,dx = \frac{-\cos(x)}{3\sin^3(x)} - \frac{2\cos(x)}{3\sin(x)} + c.$$

Il est possible d'obtenir ce dernier résultat en intégrant par parties. Noter premièrement que

$$\frac{d}{dx}\left(\cot(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^4(x)}\,dx &= \int \frac{1}{\sin^2(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x)}\right)dx \\
&= \frac{1}{\sin^2(x)}\,\frac{-\cos(x)}{\sin(x)} - \int \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}\,\frac{(-2)\cos(x)}{\sin^3(x)}\,dx \\
&= \frac{-\cos(x)}{\sin^3(x)} - 2\int \frac{\cos^2(x)}{\sin^4(x)}\,dx = \frac{-\cos(x)}{\sin^3(x)} - 2\int \frac{(1-\sin^2(x))}{\sin^4(x)}\,dx
\end{aligned}$$

et conséquemment

$$3\int \frac{1}{\sin^4(x)}\,dx = \frac{-\cos(x)}{\sin^3(x)} + 2\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = \frac{-\cos(x)}{\sin^3(x)} - 2\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + c.$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercices 9.1:

Evaluer chacune des intégrales triples suivantes:

a) $\iiint_R (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ où R est l'intérieur du tétraèdre de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont $(0,0,0)$, $(1,2,0)$, $(0,2,0)$ et $(0,2,3)$;

b) $\iiint_R y\,dx\,dy\,dz$ où R est la région de $\mathbf{R}^3$ telle que $0 \leq x, 0 \leq y$ et $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$;

c) $\iiint_R z\,dx\,dy\,dz$ où R est l'intérieur du parallélipipède de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, $(1,3,1)$, $(0,2,1)$, $(0,1,3)$, $(1,2,3)$, $(1,4,3)$ et $(0,3,3)$;

d) $\iiint_R (x + y + z)\,dx\,dy\,dz$ où R est l'intérieur du prisme de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont $(0,-1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,1)$ et $(1,1,0)$;

e) $\iiint_R dx\,dy\,dz$ où R est l'intérieur de la pyramide de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$, $(-1,1,0)$, $(-1,-1,0)$ et $(0,0,1)$;

f) $\iiint_R xy\,dx\,dy\,dz$ où R est la région de $\mathbf{R}^3$ telle que $0 \leq x$, $0 \leq y$, $0 \leq z \leq 4$ et $x^2 + y^2 \leq z^2$;

g) $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz$ où R est la région de $\mathbf{R}^3$ telle que $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $1 \leq z \leq 2$ et $y \geq 0$;

h) $\iiint_R z\,dx\,dy\,dz$ où R est la région de $\mathbf{R}^3$ telle que $0 \leq z \leq 1$ et est comprise entre le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$;

i) $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz$ où R est la région de $\mathbf{R}^3$ telle que $0 \leq z \leq 2$ et est comprise entre le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$;

j) $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$ où R est la région de $\mathbf{R}^3$ telle que $0 \leq z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ et $z^2 \geq x^2 + y^2$;

k) $\iiint_R z\,dx\,dy\,dz$ où R est la région de $\mathbf{R}^3$ telle que $0 \leq z \leq 2$ et $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$.

l) $\iiint_R xyz\,dx\,dy\,dz$ où $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$,

m) $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$ où $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x,y,z \geq 0, (x/a) + (y/b) + (z/c) \leq 1\}$ avec a,b,c des nombres réels > 0.

n) $\iiint_R z^3/(y+z)(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ où $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.