

## CÁLCULO

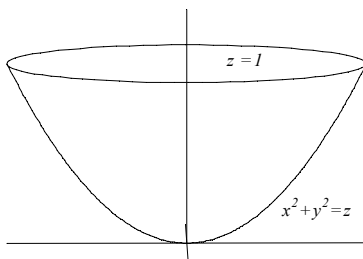
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación  
Segundo Examen Parcial. 14 de Junio de 2000

**Ejercicio 1.** Hallar los extremos absolutos de la función  $f(x, y, z) = x + y + z$ , en el conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

---

**Solución.** El conjunto  $A$  es la parte interior del paraboloide  $x^2 + y^2 = z$ , situada por debajo del plano  $z = 1$ .



Porción del paraboloide

Se trata de un conjunto cerrado y acotado, de forma que como  $f$  es una función continua, tenemos garantía de que existen el máximo y el mínimo de la función en el conjunto dado. Dichos extremos deben encontrarse entre los extremos relativos de la función que estén en el interior del conjunto, los extremos condicionados a la restricción del paraboloide, los que se obtienen en el plano, y, finalmente, los que se encuentran en la circunferencia intersección de ambas superficies.

Como quiera que el gradiente  $\nabla f = (1, 1, 1)$  no se anula nunca, no existen extremos relativos de la función en el interior de  $A$ .

Para encontrar los extremos sobre el paraboloide usamos la función lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - z)$$

de donde obtenemos las condiciones

$$1 + 2\lambda x = 0$$

$$1 + 2\lambda y = 0$$

$$1 - \lambda = 0$$

que tienen como solución:

$$\lambda = 1, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z = x^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Tenemos, por tanto, que el primer candidato es

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Los extremos sobre el plano  $z = 1$  pueden obtenerse, por ejemplo, con

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(z - 1)$$

que dan lugar a las condiciones

$$\begin{aligned}1 &= 0 \\1 &= 0 \\1 + \lambda &= 0\end{aligned}$$

que son claramente incompatibles.

Finalmente, sobre la intersección y usando las dos restricciones:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(z - 1)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}1 + 2\lambda x &= 0 \\1 + 2\lambda y &= 0 \\1 - \lambda + \mu &= 0\end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones  $x = y$ , y como  $x^2 + y^2 = z = 1$ , concluimos que  $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$ , y, por supuesto,  $z = 1$ . Tenemos, pues, otros dos candidatos:

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \text{ y } P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Ya sólo nos queda evaluar la función en los tres puntos para determinar los valores mayor y menor:

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -1/2 \\f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) &= 1 + \sqrt{2} \\f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) &= 1 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

**Solución.** El mínimo de  $f$  se alcanza en  $(-1/2, -1/2, 1/2)$  y vale  $-1/2$ , y el máximo se alcanza en  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1)$  y vale  $1 + \sqrt{2}$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $R$  la región en el plano  $\mathbb{R}^2$  limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 9, \quad x + y = 4, \quad x + y = 6.$$

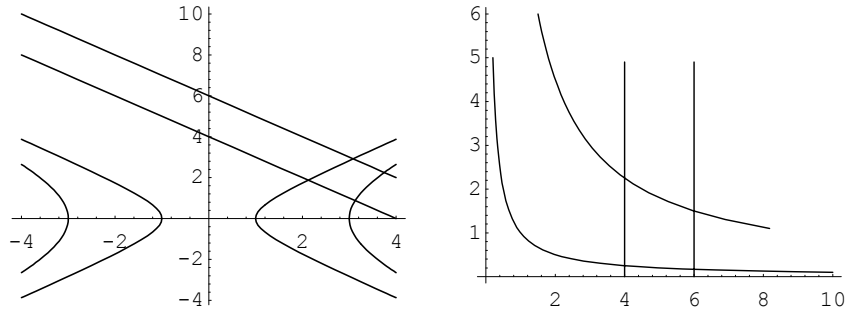
Mediante el cambio de variables  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , se transforma la región dada en otra región  $T$ . Se pide:

1. Representar gráficamente las regiones  $R$  y  $T$ .
2. Calcular el área de la región  $R$  utilizando  $T$ .
3. Siendo  $C$  la frontera de la región  $R$  recorrida en sentido positivo, obtener el valor de la integral de línea

$$\oint_C (x^2 - y^2) dx + (x^2 - 4) dy.$$

**Solución.** 1. Teniendo en cuenta que  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = uv$ , el cambio de variables transforma la región  $R$  en la región  $T$ , que está acotada por las rectas verticales  $u = 4$ ,  $u = 6$ , y las curvas  $uv = 1$ ,  $uv = 9$ . Es decir,

$$T = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq u \leq 6, \quad \frac{1}{u} \leq v \leq \frac{9}{u} \right\}.$$



Las regiones  $R$  y  $T$

2. El teorema del cambio de variables asegura que el área

$$A(R) = \iint_R dx dy = \iint_T \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Calculamos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{2}.$$

Entonces

$$A(R) = \int_4^6 \int_{1/u}^{9/u} \frac{1}{2} dv du = \frac{1}{2} \int_4^6 \left( \frac{9}{u} - \frac{1}{u} \right) du = 4 \int_4^6 \frac{1}{u} du = 4 \ln \left( \frac{3}{2} \right).$$

3. El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy.$$

Sabemos que  $P = (x^2 - y^2)$  y  $Q = (x^2 - 4)$ . Entonces  $Q_x - P_y = 2x + 2y$ , por lo que, usando de nuevo el teorema del cambio de variables, obtenemos

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R 2(x + y) dx dy = \int_4^6 \int_{1/u}^{9/u} 2u \frac{1}{2} dv du = \int_4^6 u \left( \frac{8}{u} \right) du = 16.$$

**Ejercicio 3.** Sea  $S$  el trozo de la superficie del paraboloide  $z = x^2 + (y - 1)^2$ , interior al cilindro  $x^2 + (y - 2)^2 = 3$ . Sea  $\mathbf{F}$  el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, xz)$ . Se pide calcular la integral  $\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S}$ , con la normal exterior al paraboloide,

1. Directamente.
2. Usando el teorema de Stokes.
3. Usando el teorema de Gauss.

**Solución.** 1. En primer lugar, calculamos el rotacional del campo  $\mathbf{F}$ ,

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y & x & xz \end{vmatrix} = (0, -z, 0).$$

Usaremos coordenadas cilíndricas, con centro en el vértice  $(0, 2, 0)$  del cilindro  $x^2 + (y - 2)^2 = 3$ . Entonces, la parametrización del trozo del paraboloide interior al cilindro es

$$S(u, v) = (u \cos v, 2 + u \sin v, u^2 + 2u \sin v + 1), \quad 0 \leq u \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Obtenemos un vector paralelo al vector normal a la superficie mediante

$$S_u \times S_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2u + 2 \sin v \\ -u \sin v & u \cos v & 2u \cos v \end{vmatrix} = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v - 2u, u).$$

Dado que en el vértice  $(0, 1, 0) = S(1, 3\pi/2)$ , el vector  $S_u \times S_v(1, 3\pi/2) = (0, 0, 1)$  apunta hacia el interior del paraboloide, tenemos que la normal exterior a  $S$  tiene sentido opuesto a  $S_u \times S_v$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} &= -\text{rot}(\mathbf{F})(S(u, v)) \cdot (S_u \times S_v)(u, v) du dv \\ &= (0, u^2 + 2u \sin v + 1, 0) \cdot (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v - 2u, u) du dv \\ &= -(2u^4 \sin v + 4u^3 \sin^2 v + 6u^2 \sin v + 2u^3 + 2u) du dv. \end{aligned}$$

La integral pedida es

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} &= - \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} [(2u^4 + 6u^2) \sin v + 4u^3 \sin^2 v + 2u^3 + 2u] dv du \\ &= - \int_0^{\sqrt{3}} \left[ 4u^3 \left( \frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right) + (2u^3 + 2u)v \right]_0^{2\pi} du \\ &= - \int_0^{\sqrt{3}} (8\pi u^3 + 4\pi u) du \\ &= - [2\pi u^4 + 2\pi u^2]_0^{\sqrt{3}} \\ &= -24\pi. \end{aligned}$$

2. Sea  $C$  la curva frontera de  $S$ . La parametrización de  $C$  viene dada por

$$\mathbf{r}(v) = S(\sqrt{3}, v) = (\sqrt{3} \cos v, 2 + \sqrt{3} \sin v, 4 + 2\sqrt{3} \sin v), \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

La orientación inducida por la normal exterior al paraboloide es opuesta a la orientación de  $C$  con la parametrización dada. Entonces, el teorema de Stokes asegura que

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \oint_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}[\mathbf{r}(v)] \cdot \mathbf{r}'(v) dv.$$

Dado que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}[\mathbf{r}(v)] &= \left(2 + \sqrt{3}\sin v, \sqrt{3}\cos v, \sqrt{3}\cos v(4 + 2\sqrt{3}\sin v)\right) \\ \mathbf{r}'(v) &= \left(-\sqrt{3}\sin v, \sqrt{3}\cos v, 2\sqrt{3}\cos v\right),\end{aligned}$$

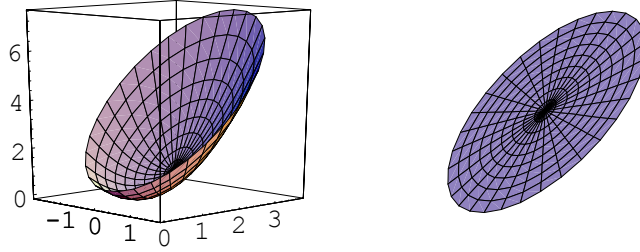
su producto escalar

$$\begin{aligned}\mathbf{F}[\mathbf{r}(v)] \cdot \mathbf{r}'(v) &= -2\sqrt{3}\sin v - 3\sin^2 v + 3\cos^2 v + 24\cos^2 v + 12\sqrt{3}\cos^2 v \sin v \\ &= -2\sqrt{3}\sin v - 3 + 30\cos^2 v + 12\sqrt{3}\cos^2 v \sin v.\end{aligned}$$

Calculamos la integral de línea

$$\begin{aligned}-\int_0^{2\pi} \mathbf{F}[\mathbf{r}(v)] \cdot \mathbf{r}'(v) dv &= -\left[2\sqrt{3}\cos v - 3v + 30\left(\frac{v}{2} + \frac{\sin 2v}{4}\right) - \frac{12\sqrt{3}}{3}\cos^3 v\right]_0^{2\pi} \\ &= 6\pi - 30\pi \\ &= -24\pi.\end{aligned}$$

3. Colocando un techo  $T$  a la superficie  $S$ , de forma que  $\Omega = S \cup T$  sea una superficie cerrada, podemos aplicar el teorema de Gauss.



Superficie  $S$  y techo  $T$

Sabemos que  $\text{div}(\text{rot}(\mathbf{F})) = 0$ . Entonces,

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} + \iint_T \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \text{div}(\text{rot}(\mathbf{F})) dx dy dz = 0,$$

lo que implica que

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = -\iint_T \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S}.$$

La superficie  $T$  es la curva  $C$  y su interior. Es decir,

$$T(u, v) = (u \cos v, 2 + u \sin v, 4 + 2u \sin v), \quad 0 \leq u \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Calculamos el producto vectorial

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2 \sin v \\ -u \sin v & u \cos v & 2u \cos v \end{vmatrix} = (0, -2u, u).$$

La normal exterior al techo  $T$  tiene el mismo sentido que  $T_u \times T_v$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} &= \text{rot}(\mathbf{F})(T(u, v)) \cdot (T_u \times T_v)(u, v) du dv \\ &= (0, -4 - 2u \sin v, 0) \cdot (0, -2u, u) du dv \\ &= (8u + 4u^2 \sin v) du dv.\end{aligned}$$

Obtenemos la integral

$$\begin{aligned}
 \iint_T \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (8u + 4u^2 \operatorname{sen} v) dv du \\
 &= \int_0^{\sqrt{3}} 16\pi u du \\
 &= [8\pi u^2]_0^{\sqrt{3}} \\
 &= 24\pi.
 \end{aligned}$$

Por tanto, el flujo del rotacional del campo a través de  $S$ , es

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = -24\pi.$$

**Nota.** Si usamos coordenadas cilíndricas, con centro en el vértice  $(0, 1, 0)$  del paraboloide  $z = x^2 + (y - 1)^2$ , la parametrización es

$$S(u^*, v^*) = (u^* \cos v^*, 1 + u^* \operatorname{sen} v^*, u^{*2}).$$

En este caso, los parámetros deben verificar

$$(u^* \cos v^*)^2 + (u^* \operatorname{sen} v^* - 1)^2 = u^{*2} - 2u^* \operatorname{sen} v^* + 1 \leq 3,$$

es decir,  $u^{*2} - 2u^* \operatorname{sen} v^* - 2 \leq 0$ . Las raíces de ese polinomio, resuelto en  $u^*$ , son

$$u^* = \frac{2 \operatorname{sen} v^* \pm \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 v^* + 8}}{2} = \operatorname{sen} v^* \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 v^* + 2},$$

siendo negativa la correspondiente al signo menos. Por tanto, el dominio es

$$D^* = \left\{ (u^*, v^*) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u^* \leq \operatorname{sen} v^* + \sqrt{\operatorname{sen}^2 v^* + 2}, \quad 0 \leq v^* \leq 2\pi \right\}.$$

