

Las funciones de varias variables

Josep Freixas Bosch

P01/75005/00103

Índice

Introducción	5
Objetivos	6
1. Contenidos básicos de las funciones de varias variables ..	7
1.1. Ejemplos de funciones de varias variables	7
1.2. Algunas definiciones	10
1.3. Entornos. Conjuntos abiertos o cerrados	11
1.3.1. Bolas y entornos	13
1.4. Continuidad	17
1.5. Mapas de alturas y curvas de nivel.....	21
1.6. Ejercicios	24
1.7. Solucionario	25
2. Diferenciabilidad con varias variables	28
2.1. Derivadas parciales	28
2.2. Diferenciabilidad	30
2.3. Derivadas direccionales.....	33
2.3.1. El vector gradiente y las derivadas direccionales	34
2.4. Derivadas parciales de orden superior	38
2.5. La regla de la cadena	40
2.6. Ejercicios	42
2.7. Solucionario	43
3. Extremos de funciones de varias variables	48
3.1. Extremos locales o relativos	48
3.2. Extremos absolutos sobre conjuntos compactos.....	54
3.3. El método de los multiplicadores de Lagrange.....	58
3.4. Solucionario	62

Ejercicios de autoevaluación	65
Solucionario	68
Glosario	68
Sumario	69
Bibliografía	69

Introducción

Las funciones de una variable, que se han presentado en los tres últimos módulos, son una idealización conveniente de un gran número de situaciones, pero si queremos pensar en ejemplos de funciones que estén relacionadas con la ingeniería, nos veremos tentados a ampliar este concepto de tal manera que incluya magnitudes que dependan de más de un factor.

Nuestro objetivo en los siguientes apartados es llegar a una definición formal de las funciones con varias variables y estudiar la extensión, en este contexto más general, de conceptos como la continuidad y la diferenciación, que, como ya hemos visto, resultan una herramienta esencial para el análisis de funciones de una variable.

En el transcurso de la primera parte encontraremos algunos ejemplos sencillos de funciones de varias variables, que un poco más adelante utilizaremos en la presentación del material.

Objetivos

Los objetivos que podréis alcanzar en este módulo didáctico son los siguientes:

1. Aproximaros al concepto de funciones de varias variables.
2. Saber relacionar las curvas de nivel de una función con su gráfico.
3. Entender la extensión de los conceptos de continuidad y diferenciación para funciones de varias variables.
4. Conocer los conceptos de derivada parcial, derivada direccional, vector gradiente y plano tangente.
5. Utilizar la regla de la cadena para diferenciar funciones compuestas.
6. Aprender a encontrar de manera analítica la solución de problemas de optimización, tanto con restricciones como sin ellas.
7. Conocer la regla de los multiplicadores de Lagrange con el fin de resolver problemas con restricciones de igualdad.

1. Contenidos básicos de las funciones de varias variables

A continuación vamos a introducir, mediante el uso de ejemplos, el concepto de funciones de varias variables y apuntaremos la relevancia que tiene para el estudiante de ingeniería.

1.1. Ejemplos de funciones de varias variables

Tras haber entendido el concepto de función de una variable, el hecho de generalizarlo en el caso de varias variables no presenta problemas desde el punto de vista conceptual, pero en cambio, sí introduce un grado más de complejidad. Por este motivo, en el presente módulo desarrollaremos las herramientas que nos permitirán utilizar al máximo nuestros conocimientos sobre funciones de una variable y así, comprender mejor las funciones con más de una variable.

Ejemplo 1.1.

Dados dos números cualesquiera x e y , su media aritmética es el número intermedio entre ambos, es decir:

$$\frac{x + y}{2}.$$

En general, dados n números x_1, x_2, \dots, x_n , su media aritmética es el número:

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

La media aritmética es, pues, una función $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables.

Ejemplo 1.2.

Dados dos números positivos x e y , su media geométrica es:

$$g(x, y) = \sqrt{xy}.$$

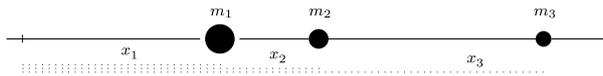
En general, dados n números positivos x_1, x_2, \dots, x_n , su media geométrica se define como:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Ejemplo 1.3.

El centro de tres masas móviles conocidas (m_1, m_2, m_3) situadas sobre el eje OX positivo es función de las posiciones de cada una de las masas en el origen x_1, x_2, x_3 .

$$C(x_1, x_2, x_3) = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$



Ejemplo 1.4.

Un sistema de fiabilidad (o bien en circuitos eléctricos) funciona (la corriente pasa) si hay algún camino activado para ir desde el principio (A) hasta el final (B) del sistema (circuito). Así pues, en una estructura en serie como ésta:

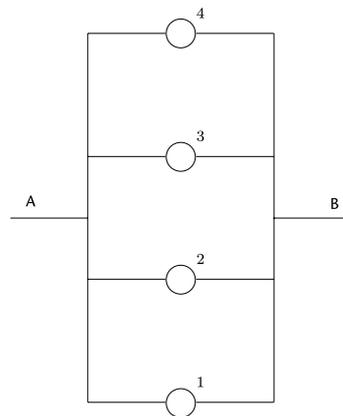


la función de varias variables que describe el sistema es:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4,$$

donde el componente i funciona si $x_i = 1$, y no lo hace si $x_i = 0$. De este modo, el sistema funciona si los cuatro componentes lo hacen, es decir, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. En caso de que alguno de los componentes no funcione ($x_i = 0$), la corriente no pasa de A a B.

Un sistema paralelo como por ejemplo:



se puede describir mediante la función de varias variables:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4).$$

El sistema no funciona cuando ninguno de los componentes funciona ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$).

Ejemplo 1.5.

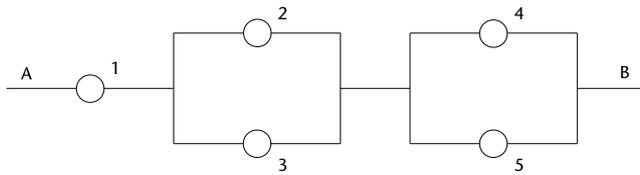
Pensemos ahora en los mismos ejemplos que hemos visto antes, en este caso admitiendo que cada componente del sistema funciona con probabilidad desconocida x_i , donde $0 \leq x_i \leq 1$. La diferencia entre esta situación y la de antes es que ahora $x_i \in [0, 1]$, mientras que antes $x_i \in \{0, 1\}$. Ahora, las respectivas funciones (tanto en el caso en serie como en el caso en paralelo) se interpretan como la probabilidad de que el sistema funcione. Así, por ejemplo, si la probabilidad de que cada uno de los componentes funcione es $\frac{1}{2}$, la probabilidad de que el sistema en serie lo haga es $\frac{1}{16}$, mientras que en el caso del sistema en paralelo se obtiene $\frac{15}{16}$.

Ejemplo 1.6.

Un sistema estéreo hi-fi tiene los cinco componentes que presentamos a continuación: (1) amplificador, (2) sintonizador de FM, (3) sintetizador de onda media, (4) altavoz A y (5) altavoz B. Se considera que el sistema funciona si podemos obtener sonido por medio de la FM o bien mediante la onda media. La función que modeliza este sistema es:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 [1 - (1 - x_2)(1 - x_3)] [1 - (1 - x_4)(1 - x_5)].$$

Ésta es una representación esquemática del sistema:



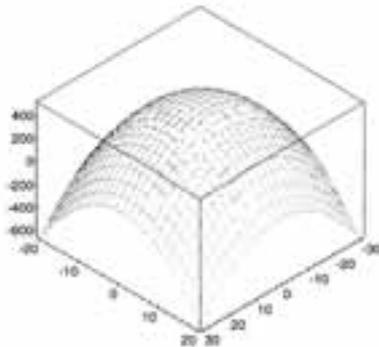
Si el fabricante estima que la probabilidad de que falle cualquier componente al cabo de un año (fecha de finalización de la garantía) es 0,95, la probabilidad de que falle el sistema es 0,9452559.

Es importante darse cuenta de que ejemplos de naturaleza muy diferente se pueden modelizar de la misma forma. De este modo, volar en un avión puede tomarse como un sistema formado por tres subsistemas: el avión (subsistema 1 o componente 1), los pilotos (subsistema 2) y los aeropuertos (subsistema 3). El subsistema 2 se puede observar como un sistema en paralelo formado por el piloto (componente 2) y el copiloto (componente 3); el subsistema 3 es otro paralelo, formado por el aeropuerto de aterrizaje (componente 4) y un aeropuerto alternativo sustitutorio para emergencias (componente 5). Sin lugar a dudas, los dos problemas descritos se pueden modelizar mediante la misma función y el mismo diagrama.

Ejemplo 1.7.

Supongamos que tenemos una placa metálica de grandes dimensiones. La temperatura (en grados centígrados) de la placa es función de las coordenadas de cada uno de sus puntos y viene dada por:

$$T(x, y) = 500 - 0,6x^2 - 1,5y^2.$$

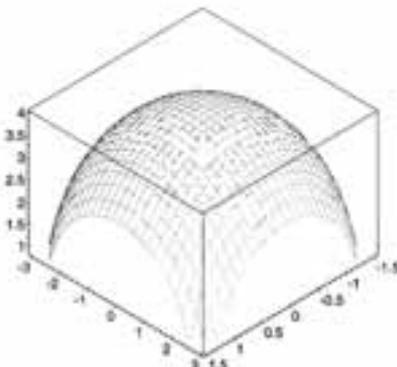


Representación gráfica de la función $T(x, y)$

Ejemplo 1.8.

La altura en metros de una boya que flota sobre el agua con respecto al nivel de ésta se puede modelizar mediante la función:

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}.$$



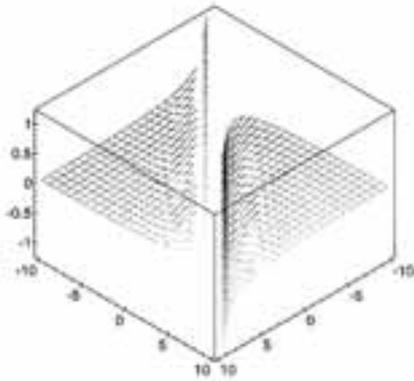
Representación gráfica de la función $f(x, y)$

Ejemplo 1.9.

La media de tiempo que un cliente espera en una cola para ser atendido viene dada por:

$$g(x, y) = \frac{1}{x - y}, \quad y < x,$$

donde y es la razón media de llegada, expresada como el número de clientes por unidad de tiempo y x es la razón media de servicio, expresada en las mismas unidades.



Representación gráfica de la función $g(x, y)$

1.2. Algunas definiciones

La función de una variable es una regla que asigna un número nuevo a cada número de un dominio determinado y , de la misma manera, una función de dos variables tiene como dominio parejas de números (así que se le asignará un número nuevo a cada una de estas parejas). En general, el dominio de una función con n variables ($n \geq 1$) está formado por puntos con n coordenadas, y la función asocia a cada punto un número real determinado.

Una **función con n variables** es una regla f que asocia a cada punto (x_1, x_2, \dots, x_n) dentro de un determinado conjunto D un número real $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. El **dominio** D es un subconjunto de \mathbb{R}^n , es decir, está formado por puntos con n coordenadas. Representaremos esta función escribiendo:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{o bien} \quad D \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Cuando queramos indicar la acción de la función sobre un punto, entonces escribiremos:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

¿Recordáis...

... cómo se define una función de una variable? Repasad la información que tenéis al respecto en los módulos anteriores.

Por ejemplo, si representamos con M la función media aritmética de n números, su dominio es $D = \mathbb{R}^n$ y su acción sobre un punto de \mathbb{R}^n viene descrita por:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{M} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Por otro lado, el dominio de la función **media geométrica** de dos números, $f(x, y) = \sqrt{xy}$, es el conjunto de puntos:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0 \}.$$

Los dominios para el resto de las funciones que se han introducido en los ejemplos descritos son:

$$D = \mathbb{R}^3$$

para la función del ejemplo 1.3, el de las tres masas móviles;

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq 4 \},$$

para la del ejemplo 1.4, el de estructuras binarias en serie y en paralelo;

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq 4 \},$$

para los ejemplos 1.5 y 1.6;

$$D = \mathbb{R}^2,$$

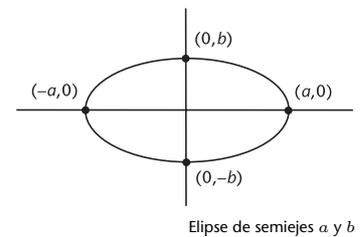
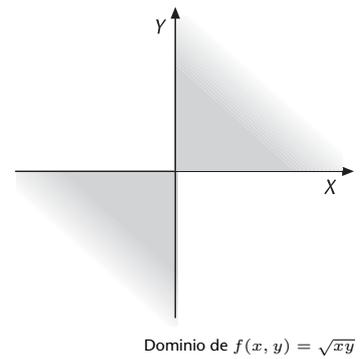
para la del ejemplo 1.7, de la temperatura de una placa metálica;

$$D = \{ (x, y) : 16 - 4x^2 - y^2 \geq 0 \},$$

para la del ejemplo 1.8, de una plataforma que flota sobre el agua. Observamos que $16 - 4x^2 - y^2 = 0$ es la ecuación de una elipse de semiejes 2 y 4, respectivamente.

$$D = \{ (x, y) : y < x \},$$

para la función del ejemplo 1.9, del modelo de colas.



Comentario

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es la ecuación de una elipse centrada en $(0, 0)$ de semiejes a, b .

Cuando tengamos una función con contexto desconocido, tomaremos como dominio el mayor posible.

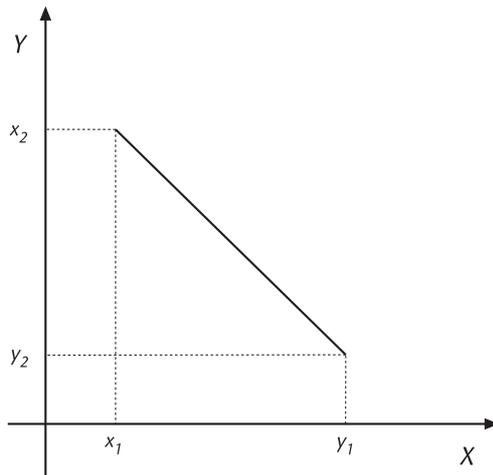
1.3. Entornos. Conjuntos abiertos o cerrados

Antes de entrar en materia, sería interesante introducir las nociones de conjuntos abiertos y cerrados en subconjuntos de \mathbb{R}^n . El concepto fundamental es, como en el caso de \mathbb{R} , el de un entorno.

La **distancia euclidiana** se define así:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ son puntos de \mathbb{R}^n . Geométricamente, se puede visualizar \mathbb{R}^2 como mostramos a continuación:



La distancia de $x = (x_1, x_2)$ a $y = (y_1, y_2)$ se interpreta como la longitud del segmento que los une.

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, se comprueba que se satisfacen las siguientes propiedades:

- 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

La primera propiedad nos indica que dos puntos diferentes están siempre separados por una distancia positiva. La segunda muestra que la distancia no dependerá del orden en que se escojan los puntos inicial y final. Mientras que la tercera (desigualdad triangular) pone de manifiesto que, si evaluamos la distancia entre dos puntos cualesquiera, ésta no es nunca mayor que la suma de las distancias obtenidas al pasar por un tercer punto. Observad que tendremos la igualdad sólo en caso de que z pertenezca al segmento delimitado por x e y , es decir, $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$, donde $\alpha \in [0, 1]$. Observad que la distancia que se obtiene en el conjunto \mathbb{R} es $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$, que es la distancia que se utiliza de manera habitual en \mathbb{R} .

1.3.1. Bolas y entornos

Si tenemos un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y un número $r > 0$, denominamos:

Bola abierta de centro a y radio r al conjunto:

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}.$$

Bola cerrada de centro a y radio r al conjunto:

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}.$$

Estas nociones, que vamos a utilizar con frecuencia, reflejan las de conjunto de “puntos próximos” al punto a .

En particular, para el conjunto \mathbb{R} , estas nociones coinciden con las de intervalo abierto y cerrado, definidas por su relación de orden ($< / \leq$).

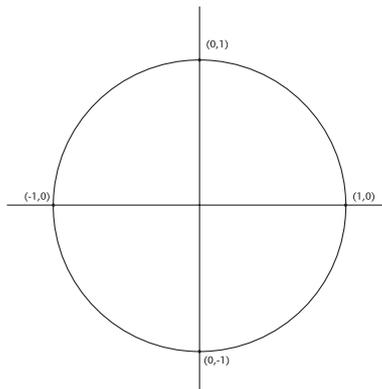
Veamos cuál es la representación gráfica de la bola de centro $(0, 0)$ y radio 1, que se conoce por lo general como **bola unidad**:

$$\begin{aligned} x \in B_1(0, 0) &\Leftrightarrow d(x, 0) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1. \end{aligned}$$

Los puntos a distancia 1 del centro de la bola, es decir, los que delimitan la “frontera” de la bola, son los que cumplen:

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1.$$

La ecuación de una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 es, en consecuencia, la siguiente:



Entonces, $B_1(0, 0)$ está formada por todos los puntos del interior del círculo, pero no por los de la circunferencia, porque la distancia de estos puntos en el $(0, 0)$ es exactamente 1. $\bar{B}_1(0, 0)$ está formada por los puntos del círculo y, además, por los puntos de la circunferencia que los delimita. En \mathbb{R}^3 , la bola abierta de centro en el punto $(0, 0, 0)$ y radio 1, $B_1(0, 0, 0)$, está formada por los puntos de la esfera maciza de radio 1 centrada en el origen de coordenadas. La bola cerrada unidad también contiene los puntos de la superficie esférica de radio 1.

La noción de proximidad reflejada en las bolas abiertas y cerradas (puntos próximos a uno determinado) se puede generalizar con la noción de entorno.

Un **entorno** de un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n que contenga una bola abierta de centro en el punto a . Por otro lado:

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ es entorno de } a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{existe } r > 0 \text{ tal que } B_r(a) \subseteq A.$$

Decimos que un subconjunto A de \mathbb{R} es un **conjunto abierto** si A es entorno de todos sus puntos.

La idea de conjunto abierto es que cada punto de A está rodeado por un círculo abierto que está enteramente contenido en A .

Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es un **conjunto cerrado** si el complementario de A , $\mathbb{R}^n - A$, es un conjunto abierto.

Según estas definiciones, resulta evidente que \mathbb{R}^n es un conjunto abierto y, por tanto, su complementario (el conjunto vacío) es cerrado. Sin embargo, igualmente, el conjunto vacío cumple la condición para ser abierto al no tener ningún punto. En tal caso, también consideraremos \mathbb{R}^n como conjunto cerrado. Éstos son los dos únicos conjuntos de \mathbb{R}^n que cumplen ambas condiciones. Por otro lado, no es cierto que se pueda decir de cualquier conjunto que es abierto o cerrado.

Los siguientes conjuntos son conjuntos abiertos de \mathbb{R}^2 :

- $\{(x, y) : 0 < x + y < 1\}$

- $\{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$
- $\{(x, y) : x < y\}$
- $\{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$

Ejercicio 1.1.

Dibujad el conjunto para cada uno de los ejemplos anteriores y justificad que se trata de un conjunto abierto.

Los conjuntos que se muestran a continuación son conjuntos cerrados de \mathbb{R}^2 :

- $\{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 1\}$
- $\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
- $\{(x, y) : x \leq y\}$
- $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Ejercicio 1.2.

Tomad todos los ejemplos que se han presentado, dibujad el conjunto y justificad que se trata de un conjunto cerrado.

Estos conjuntos no son ni abiertos ni cerrados de \mathbb{R}^2 :

- $\{(x, y) : 0 \leq x + y < 1\}$
- $\{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$
- $\{(x, y) : x \leq y, x \neq 0\}$
- $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$

Ejercicio 1.3.

Probad que si partimos de un número fijo de conjuntos abiertos y efectuamos intersecciones o uniones entre ellos, el resultado es un nuevo conjunto abierto. Haced lo mismo para los conjuntos cerrados.

Sin embargo, existe una categoría de conjuntos que resulta especialmente importante para el ingeniero, puesto que posee bastante relevancia en problemas de optimización. Se trata de los **conjuntos compactos**, los cuales, para ser definidos, necesitan la extensión a \mathbb{R}^n de un concepto que ya se introdujo en la recta real.

El subconjunto A de \mathbb{R}^n está **acotado** si lo podemos incluir dentro de una bola de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$.

Por ejemplo, una recta dentro del plano no es nunca un conjunto acotado, ya que siempre se extiende más allá de cualquier bola acotada; y, un rectángulo es un conjunto acotado porque siempre lo podemos inscribir dentro de una bola lo bastante grande.

Decimos que un subconjunto de \mathbb{R}^n es **compacto** si al mismo tiempo está acotado y es cerrado.

Los conjuntos siguientes son compactos de \mathbb{R}^2 :

- $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
- $\{(x, y) : x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
- $\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
- $\{(x, y) : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

Y ninguno de los siguientes conjuntos de \mathbb{R}^2 es compacto:

- $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$
- $\{(x, y) : x + y = 1\}$
- $\{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$
- $\{(x, y) : x + y \leq 1, x \geq 0\}$

Una última definición que debemos tener en cuenta es ésta:

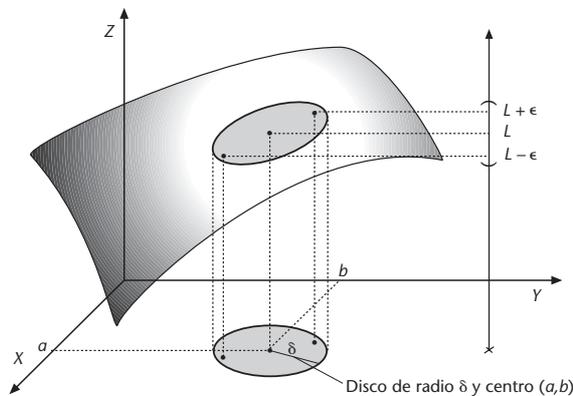
Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, decimos que x es **punto de acumulación** de A si, y sólo si, para todo $r > 0$ tenemos $B_r(x) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.

1.4. Continuidad

En este apartado, nuestro objetivo será definir la continuidad de una función de varias variables, aunque, de hecho, la definición es exactamente la misma que vimos en el caso de una variable. En primer lugar, presentaremos la definición formal de límite de una función de varias variables.

Sea D un subconjunto de \mathbb{R}^n y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, una función definida en D , y sea a un punto de acumulación de D . Decimos que el **límite** de una función f cuando x se acerca a a es $L \in \mathbb{R}$, y lo escribiremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si para cada $\epsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $x \in D$ y $0 < d(x, a) < \delta$.

Por ejemplo, si la función es de dos variables, esto significa que para un entorno de L , $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, encontramos un disco de centro a tal que la imagen de todos los puntos del disco donde la función esté definida, diferentes del mismo a , está comprendida dentro de $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.



Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se define en $x = a$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, se dice que f es **continua** en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Intuitivamente, la definición de continuidad significa que la función no tiene saltos repentinos.

Cuando tratamos con subconjuntos de \mathbb{R} , sólo contamos con dos direcciones mediante las cuales un punto puede ser aproximado: desde la izquierda o desde la derecha. Sin embargo, cuando hay más variables la situación

cambia, ya que tenemos muchas trayectorias posibles de aproximación. Esto, por un lado, marca una diferencia no trivial con respecto al caso de una variable y , por el otro, hace que la definición de límite sea más restrictiva, puesto que el límite se encuentra bien definido si, y sólo si, existe para todas y cada una de las trayectorias posibles de aproximación. Los ejemplos que se presentan a continuación ilustran este punto.

Ejemplo 1.10.

Consideramos la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Queremos estudiar su continuidad en el punto $(0, 0)$, y para hacerlo vamos a restringir la función siguiendo trayectorias rectas del tipo $y = mx$. Sustituimos en la función y calculamos el límite cuando x tiende a cero.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Puesto que el límite depende de m , la función no es continua en este punto.

Comentario

Si el límite de una función existe, tened en cuenta que éste tiene que ser único.

Ejemplo 1.11.

Consideramos la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Queremos comprobar que f no es continua en el punto $(0, 0)$. Para conseguirlo veremos que si nos acercamos a $(0, 0)$ siguiendo trayectorias diferentes, obtenemos resultados también diferentes. Empezamos por las trayectorias más sencillas: las rectas. Una recta que pase por $(0, 0)$ tiene la ecuación:

$$ax + by = 0,$$

donde a y b son números fijos. A continuación estudiaremos dos casos diferentes:

a) Si $b = 0$, entonces la recta es $x = 0$, es decir, estamos observando la función a lo largo del eje Y . En este caso, tenemos que $f(0, y) = 0$ para todo y , que es una función continua (al ser constante).

b) Si $b \neq 0$, tenemos que $y = -\frac{a}{b}x$. Definimos $c = -\frac{a}{b}$ tal que $y = cx$. El valor que toma la función en este punto es:

$$f(x, cx) = \begin{cases} \frac{c^2x^3}{x^2+c^4x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función de una variable es continua para todo c fijado, puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, cx) = c^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + c^4x^2} = 0.$$

Hemos visto que si nos acercamos a $(0, 0)$ siguiendo trayectorias rectas, $f(x, y)$ es continua.

Por otro lado, para comprobar que f no es continua en $(0, 0)$, consideramos la trayectoria (parabólica) establecida por $x = y^2$. En este caso, la función de una variable que resulta es:

$$f(y^2, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{y^4+y^4} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

es decir:

$$f(y^2, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

que corresponde claramente a una función discontinua cuando $y = 0$, lo cual implica, en particular, que la función $f(x, y)$ no puede ser continua en el punto $(0, 0)$.

Para estudiar la continuidad de una función en un punto, podemos utilizar un par de técnicas que ya fueron usadas para funciones de una variable.

Si $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es producto de dos funciones, una acotada y la otra con límite cero en (a_1, a_2, \dots, a_n) , entonces la función f tiene límite cero en (a_1, a_2, \dots, a_n) .

También se pueden utilizar infinitésimos equivalentes, parecidos a los vistos para funciones de una variable. De este modo, por ejemplo, si:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0,$$

tenemos que en un entorno de (a, b) :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\sin f(x,y)}{f(x,y)} &= 1 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{1 - \cos(f(x,y))}{\frac{f^2(x,y)}{2}} &= 1 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{e^{f(x,y)} - 1}{f(x,y)} &= 1 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\ln(1 + f(x,y))}{f(x,y)} &= 1 \end{aligned}$$

Este hecho se escribe de forma abreviada:

$$\begin{aligned} \sin(f(x, y)) &\approx f(x, y) \\ 1 - \cos(f(x, y)) &\approx \frac{f^2(x, y)}{2} \\ e^{f(x, y)} - 1 &\approx f(x, y) \\ \ln(1 + f(x, y)) &\approx f(x, y) \end{aligned}$$

siempre que (x, y) esté cerca de (a, b) . En la práctica, en determinados límites es útil sustituir una expresión complicada por una más sencilla. Si dos funciones son infinitésimos equivalentes en un mismo punto, entonces podremos sustituir una por otra siempre que la función que se pretende sustituir no forme parte de una suma o de una resta.

De hecho, sin embargo, la continuidad es un aspecto de las funciones que no nos preocupará demasiado en este curso, puesto que todas las funciones con que trabajaremos no sólo serán continuas, sino también diferenciables, salvo algunos ejemplos como el que hemos comentado, contruidos expresamente. Un resultado positivo que tendremos en cuenta es el siguiente:

Si partimos de funciones continuas y vamos construyendo otras mediante las operaciones de adición y sustracción, multiplicación y división, y composición de funciones, llegaremos de nuevo a funciones continuas (sobre sus dominios de definición).

En el ejemplo 1.11 hemos visto una aplicación de este principio. La función:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

es continua sobre su dominio. No obstante, fijémonos en que esta función no se define en el punto $(0, 0)$. ¿Se podría asignar ahora un valor real a $(0, 0)$ de manera que la nueva función fuese continua? Según el desarrollo realizado en el ejemplo mencionado, la respuesta es no.

Existe un resultado muy importante que relaciona los conjuntos compactos y la continuidad.

Teorema de Weirstrass

Sea C un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, una función continua. En tal caso, f alcanza tanto un máximo como un mínimo absoluto, es decir que existen $a \in C$ y $b \in C$ tales que para cada $x \in C$ se cumple que $m = f(b) \leq f(x) \leq f(a) = M$, donde m es el valor mínimo que toma la función y M es el valor máximo.

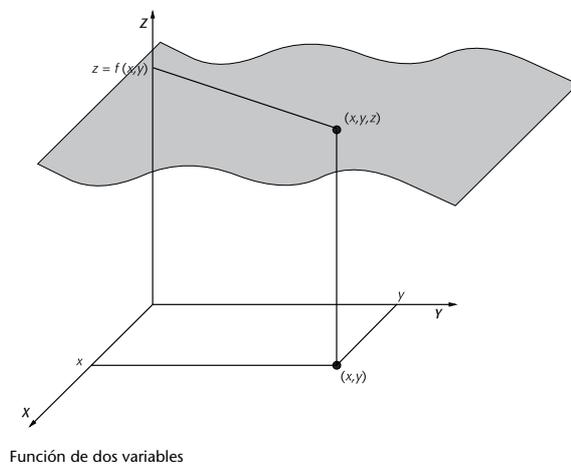
Karl Weierstrass...

... (Ostefelde 1815 - Berlín 1897), en la obra *Werke*, de 1890, presenta su método para desarrollar la teoría de funciones.

En el último apartado de este módulo tendremos ocasión de volver a hablar de este teorema.

1.5. Mapas de alturas y curvas de nivel

La gráfica de una función h de una sola variable es la representación de un conjunto de puntos de la forma (x, y) tales que $y = h(x)$. Cuando tenemos una función f de dos variables, la gráfica tiene que representar conjuntos de puntos de la forma (x, y, z) tales que $z = f(x, y)$. Por este motivo, para representar la gráfica de una función de dos variables necesitamos tres dimensiones. En el caso de la gráfica tridimensional, partimos de tres ejes perpendiculares entre sí: en los dos ejes horizontales representamos las variables x e y , y en el eje vertical representamos los valores z que toma la función.



Hemos denominado los ejes con las letras X, Y y Z , respectivamente. A cada valor de las variables x e y le corresponde un punto (x, y) del plano que se encuentra en la base. Por último, la función f asocia un valor $z = f(x, y)$ al punto (x, y) .

Con la gráfica nos podemos imaginar el grafo de una función de dos variables como una sábana por encima (o por debajo, si la función toma valores negativos) del plano donde están los puntos (x, y) . También podemos establecer un símil con una montaña, de forma que para describir el comportamiento de la función nos interesará saber si la pendiente es muy fuerte o no en una determinada dirección, junto con donde se encuentran las cumbres y los valles. Una última manera, que nos resultará intuitiva para otros propósitos como veremos más adelante, es considerar la gráfica de la función como si se tratase de la superficie de un pastel que hemos colocado sobre el plano donde están las variables x e y (de ahora en adelante lo llamaremos **plano XY**).



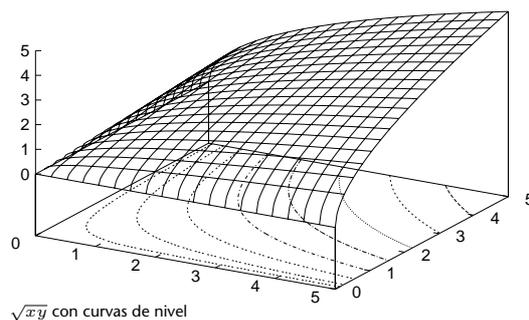
Es probable que los aficionados al excursionismo estén familiarizados con los **mapas topográficos**, donde se indican las alturas de los puntos mediante una serie de curvas que conectan puntos de una misma altitud. Estas curvas se conocen como **curvas de nivel**, porque como su propio nombre indica, si seguimos una de ellas nos mantenemos en el mismo nivel. Una de las formas posibles de imaginarnos la gráfica de una función de dos variables es como si fuese una montaña (o, mejor dicho, como una región con accidentes geográficos: montañas y valles). No tenemos que extrañarnos, pues, de que el recurso de las curvas de nivel utilizado en los mapas topográficos también nos sirva a nosotros para simplificar la representación de funciones de dos variables.

Podemos ver que las curvas de nivel no se representan en tres dimensiones, sino en dos. Las curvas de nivel son precisamente una forma de tener información sobre la tercera dimensión (la altitud), sin necesidad de dibujarla.

Si queremos determinar una curva de nivel, tenemos que fijar una cierta altitud, es decir, un cierto valor de la z , y entonces unir todos los puntos (x, y) que tienen la propiedad de que $f(x, y) = z$.

Ejemplo 1.12.

Sea $g(x, y) = \sqrt{xy}$ la media geométrica de los números x e y . La curva de nivel 4 está formada por todos los pares de ordenados (x, y) , la media geométrica de los cuales es 4. Por ejemplo, $(4, 4)$, $(2, 8)$ y $(8, 2)$ están todos sobre esta curva de nivel. A continuación mostramos la gráfica de \sqrt{xy} y sus curvas de nivel en el plano xy .



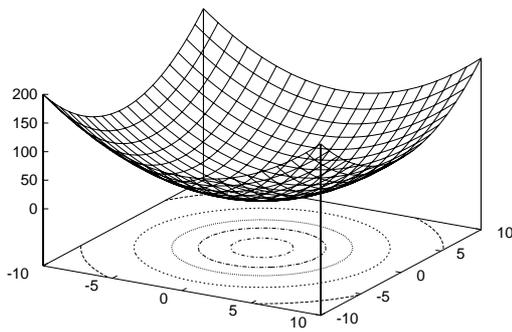
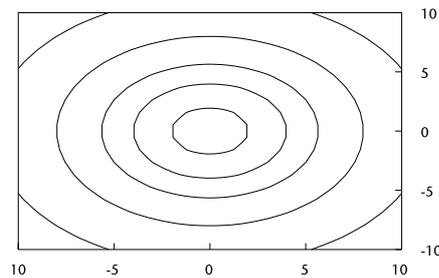
Ejemplo 1.13.

Consideramos ahora la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. La curva de nivel 4 está formada por todos los pares (x, y) que cumplen:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 4.$$

Puede que algunos de vosotros hayáis visto antes que la ecuación describe la circunferencia de radio 2 ($2 = \sqrt{4}$) centrada en el origen de coordenadas.

A continuación mostramos la gráfica de $x^2 + y^2$, así como diferentes curvas de nivel de la función.

Gráfica de $x^2 + y^2$ Curvas de nivel de $x^2 + y^2$

Así pues, podemos resumir:

Dada una función f con dominio en \mathbb{R}^2 y un número cualquiera c , la **curva de nivel c de la función f** está formada por el conjunto de puntos que satisfacen $f(x_1, x_2) = c$.

Observamos que la definición no excluye el hecho de que haya algún c en el que la curva de nivel c de f no tenga ningún punto, a pesar de que éste es un caso poco interesante. Por ejemplo, si $f(x, y) = x^2 + y^2$, la curva de nivel 1 no tiene ningún punto, porque la función f asocia un número no negativo a cada vector de \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.14.

Dada la función $f(x, y) = 2 \ln x + \ln y$, su curva de nivel 2 está formada por aquellas parejas (x, y) que solucionan la ecuación:

$$2 \ln x + \ln y = 2 \implies \ln(x^2 y) = 2 \implies x^2 y = e^2,$$

es decir:

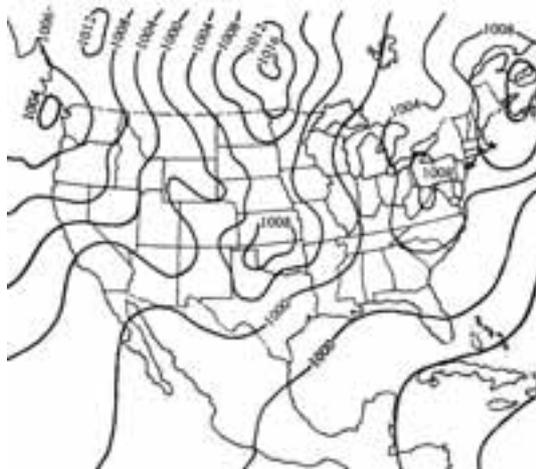
$$x^2 y = e^2 \implies y = \left(\frac{e}{x}\right)^2.$$

Dependiendo de la procedencia de la función de varias variables, las curvas de nivel reciben un nombre u otro. Así, por ejemplo, si en un mapa del tiempo $f(x, y)$ representa la presión atmosférica, las curvas de nivel de igual presión se denominan **isobaras**. Si en un mapa del tiempo $f(x, y)$ se representa la temperatura, las curvas de nivel de la misma temperatura se denominan **isotermas**. Si en un mapa cartográfico $f(x, y)$ se representa la altura con respecto al nivel del mar de una población situada en (x, y) , las curvas de nivel de igual altura se conocen como **líneas de contorno**.

Recordad

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$, donde $x > 0, y > 0$.
 $\ln(x^2) = 2 \ln x$, donde $x > 0$.

En todos los casos, dibujando diferentes curvas de nivel, correspondientes a valores constantes C_1, C_2, \dots, C_n , podemos obtener un mapa que muestra regiones de la superficie de la Tierra con las curvas de nivel que representan la presión atmosférica, la temperatura o la altura sobre el nivel del mar (mapas topográficos).



Mapa de presiones atmosféricas de los EUA

1.6. Ejercicios

1.4. Calculad el dominio de la función $g(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$. Empezad por los casos $n = 3$ y $n = 4$.

1.5. Comprobad que el conjunto de puntos de acumulación de $\{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ es $\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

1.6. Calculad, si es posible, el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 - 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

1.7. Calculad, si es posible, el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(x^4 - y^4 + 1)}{x^2 + y^2}$$

1.8. Calculad, si es posible, el límite que tenéis a continuación:

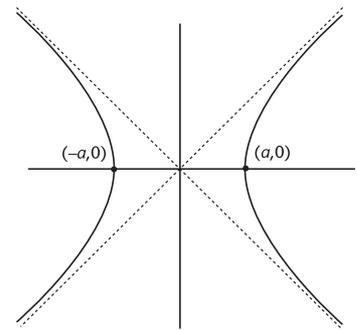
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^4}}$$

1.9. Estableced la ecuación de las curvas de nivel 1 y de nivel 4 para las funciones siguientes e identificad los tipos de curva que se obtienen:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

c) $f(x, y) = 2 + x - y$.



Comentario

$x^2 + y^2 = r^2$ es la ecuación de una circunferencia centrada en $(0, 0)$ y de radio r .

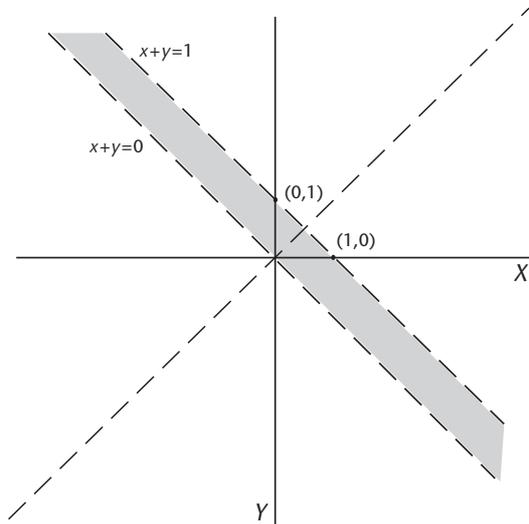
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ es la ecuación de una hipérbola centrada en $(0, 0)$ y con vértices $(a, 0)$ y $(-a, 0)$

1.7. Solucionario

1.1.

- $\{(x, y) : 0 < x + y < 1\}$

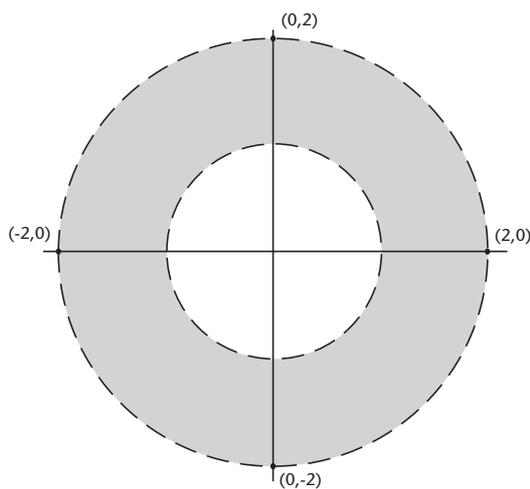
La gráfica de puntos del plano que forman este conjunto es:



Este conjunto es abierto, puesto que para cualquier punto (x, y) del conjunto existe una bola $B_\epsilon(x, y)$ con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, enteramente contenida en el conjunto definido. Nos bastará con escoger un ϵ menor que el mínimo de las distancias del punto (x, y) a las rectas $x + y = 1$ y $x + y = 0$.

- $\{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

La zona de puntos del plano que forma este conjunto es la corona circular:

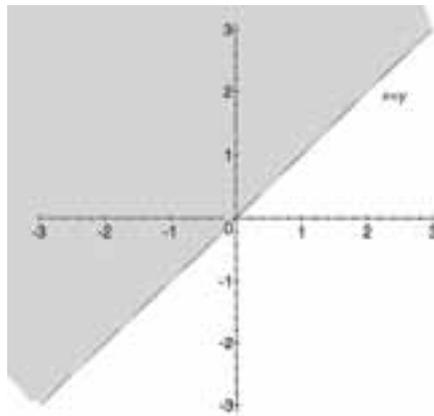


Este conjunto es abierto, debido a que en cualquier punto (x, y) del conjunto existe una bola $B_\epsilon(x, y)$ con $\epsilon > 0$ lo bastante pequeño, enteramente contenida en el conjunto definido. Nos bastará con escoger un ϵ menor que la mínima distancia del punto (x, y) a las circunferencias:

$$x^2 + y^2 = 1; \quad x^2 + y^2 = 4.$$

- $\{(x, y) : x < y\}$

La zona de puntos del plano que forman parte de este conjunto es:

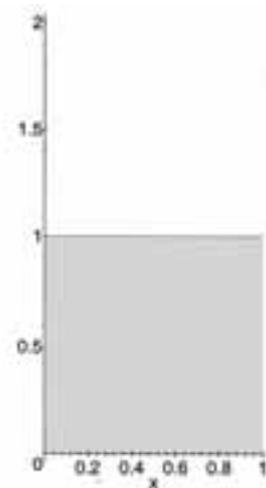


Este conjunto es abierto, puesto que para cualquier punto (x, y) del conjunto existe una bola $B_\epsilon(x, y)$ con $\epsilon > 0$ lo bastante pequeño, enteramente contenida en el conjunto definido. Nos bastará con escoger un ϵ menor que la distancia (x, y) a la recta $x = y$.

- $\{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$

La zona de puntos que forman este conjunto es el cuadrado unitario, sin incluir los puntos que pertenecen a las aristas.

Este conjunto es abierto, ya que para cualquier punto (x, y) del conjunto existe una bola $B_\epsilon(x, y)$ con $\epsilon > 0$ lo bastante pequeño, que se contiene por completo en el conjunto definido. Nos bastará con escoger un ϵ menor que la distancia de (x, y) a cada una de las rectas $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.



1.2. Se trata de los mismos conjuntos que en el ejercicio anterior, con la única diferencia de que, ahora todos los puntos que delimitan el conjunto están incluidos en el mismo. Para afirmar que son conjuntos cerrados, será suficiente con argumentar que los respectivos complementarios son abiertos. En cada caso, consideraremos un punto (x, y) del complementario y veremos que podremos escoger una bola $B_\epsilon(x, y)$ con $\epsilon > 0$ lo bastante pequeño, que se contenga por completo en el conjunto. Sólo tenemos que prestar atención al hecho de que el criterio para escoger ϵ es exactamente el mismo que en el ejercicio anterior.

1.3. Sean A y C dos conjuntos abiertos. Primero demostraremos que la unión $A \cup C$ es un conjunto abierto, y después que la intersección $A \cap C$, también lo es. Si $(x, y) \in A \cup C$, entonces $(x, y) \in A$ o bien $(x, y) \in C$. Suponemos $(x, y) \in A$, puesto que A es abierto existe $B_\epsilon(x, y)$ con $\epsilon > 0$ lo bastante pequeño, tal que $B_\epsilon(x, y) \subseteq A \subseteq A \cup C$.

Si $(x, y) \in A \subseteq A \cap C$, entonces $(x, y) \in A$ y $(x, y) \in C$. Para que A y C sean conjuntos abiertos, existirán dos bolas $B_\epsilon(x, y)$ y $B_{\epsilon'}(x, y)$ con $\epsilon > 0, \epsilon' > 0$ y ϵ, ϵ' lo bastante pequeños, de manera que $B_\epsilon(x, y) \subseteq A$ y $B_{\epsilon'}(x, y) \subseteq C$ con $\epsilon \leq \epsilon'$ o bien $\epsilon' < \epsilon$. Supongamos que $\epsilon \leq \epsilon'$; en este caso tendremos $B_\epsilon(x, y) \subseteq C$ y, por tanto, $B_\epsilon(x, y) \subseteq A \cap C$. Por otro lado, si $\epsilon' < \epsilon$, tendremos $B_{\epsilon'}(x, y) \subseteq A$ y, en consecuencia, $B_{\epsilon'}(x, y) \subseteq A \cap C$.

Os dejamos como ejercicio la prueba del resultado enunciado por un número arbitrario y finito de conjuntos abiertos, así como la prueba para conjuntos cerrados.

1.4. Para $n = 3$, observad que una raíz cúbica (o, en general, una raíz con un radicando impar) se puede calcular independientemente del radical. Por lo tanto, el dominio de la función es \mathbb{R}^3 o, en general, \mathbb{R}^n .

Para $n = 4$, observad que una raíz cuarta (o, en general, una raíz con radicando par) se puede calcular sólo si el radical es no negativo. Así pues, para $n = 4$:

$$\text{Dom } g = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 x_2 x_3 x_4 \geq 0\}.$$

En general, para n par arbitrario:

$$\text{Dom } g = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \cdot \dots \cdot x_n \geq 0\}.$$

Observad en este último caso que, para que un punto no sea del dominio, es necesario que todos los componentes sean diferentes de cero y el número de componentes negativos sea impar.

1.5. Para cualquier punto (a, b) del complementario de:

$$\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

se puede encontrar una bola $B_\epsilon(a, b)$ con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que:

$$B_\epsilon(a, b) \cap \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} = \emptyset.$$

Por otro lado, cualquier $B_\epsilon(a, b)$ con $\epsilon > 0$ y (a, b) verificando $1 \leq a^2 + b^2 \leq 4$ tiene puntos del conjunto, es decir:

$$B_\epsilon(a, b) \cap \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \neq \emptyset,$$

de donde queda probado que el conjunto de puntos de acumulación de $\{(x, y) : 1 \leq x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ es $\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. La segunda parte del ejercicio os la dejamos para que penséis en ella.

1.6. En primer lugar, observad que el cálculo directo del límite nos conduce a la indeterminación $\frac{0}{0}$. Expresaremos la función de esta forma:

$$\frac{x^5 - 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)^2 - 2y \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

$\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ y $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$ están acotadas superiormente por 1 y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$. De aquí deducimos que el límite buscado es cero.

1.7. Observad que el cálculo directo del límite nos dirige hacia la indeterminación $\frac{0}{0}$. Utilizando que $\ln(1 + (x^4 - y^4)) \approx x^4 - y^4$ en $(0, 0)$, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(x^4 - y^4 + 1)}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 = 0. \end{aligned}$$

Comentario

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

1.8. Observad que el cálculo directo del límite nos lleva a la indeterminación $\frac{0}{0}$. Fijaos también en que, si os restringís a trayectorias rectas del tipo $y = mx$ o parabólicas $y = mx^2$ o bien $x = my^2$, obtenéis como resultado cero en todos los casos. Esto nos indica que 0 es el único candidato a ser límite de la función. Comprobemos que, en efecto, es el límite.

Observad que $\left| \frac{x}{\sqrt{x^2}} \right| = 1$ (si $x \neq 0$), y por tanto $\left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}} \right| \leq 1$, de donde:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^4}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}} = 0.$$

La última igualdad se debe al hecho de que la expresión $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}}$ está acotada, mientras que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0.$$

1.9. Mediante la igualación de todas las funciones a 1, obtendremos la curva de nivel 1; si igualamos a 4, obtendremos la curva de nivel 4. En concreto:

a) $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, circunferencia centrada en $(0, 0)$ y de radio 1.

$\sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$, circunferencia centrada en $(0, 0)$ y de radio 4.

b) $x^2 - y^2 = 1$, hipérbola con vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

$x^2 - y^2 = 4$, hipérbola con vértices $(2, 0)$, $(-2, 0)$.

c) $2 + x - y = 1 \Leftrightarrow y = x + 1$ recta de pendiente 1 y ordenada en el origen 1.

$2 + x - y = 4 \Leftrightarrow y = x - 2$ recta de pendiente 1 y ordenada en el origen -2 .

2. Diferenciabilidad con varias variables

2.1. Derivadas parciales

Empecemos con un concepto nuevo pero muy parecido al de derivada de una función variable.

Sea $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $1 \leq i \leq n$ el vector i -ésimo de la base canónica de \mathbb{R}^n , y sea f una función definida en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}^n$. Si existe el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h},$$

se denomina derivada parcial i -ésima de la función f en el punto a y se designa por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

A continuación se presenta una forma operativa de obtener la derivada parcial de una función.

La **derivada parcial de una función** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con respecto a la componente i -ésima es la derivada de la función de una variable obtenida al fijar los valores de todas las componentes excepto la i -ésima. Indicamos esta derivada parcial como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

o bien:

$$D_i f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ejemplo 2.1.

Sea $f(x, y, z) = x^2y + xz^3 - y^2z^2$. Las derivadas parciales de esta función son:

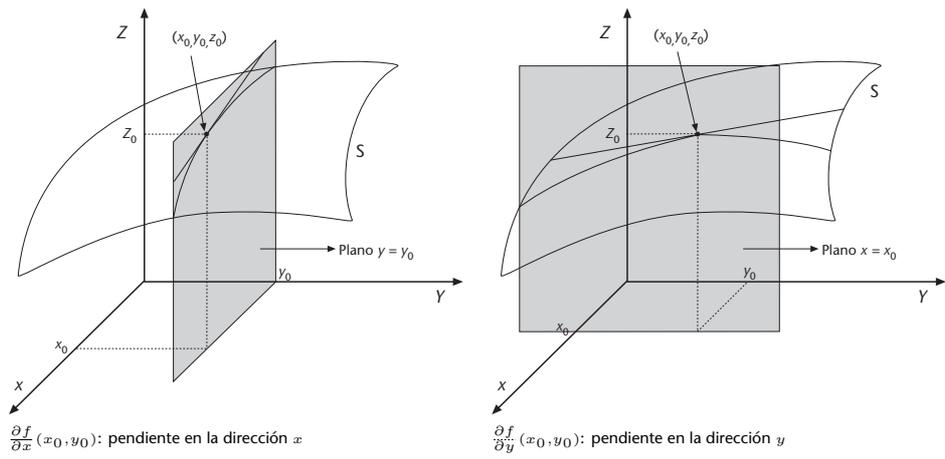
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy + z^3, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 - 2yz^2, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 3xz^2 - 2y^2z. \end{aligned}$$

Coloquialmente, para una función de dos variables $f(x, y)$ decimos que los valores de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto (x_0, y_0) denotan la **pendiente de la superficie** $z = g(x, y)$ **en las direcciones de x e y** , respectivamente.

Geoméricamente, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene de intersectar el plano $y = y_0$ y la superficie $z = f(x, y)$. Dicho de otro modo, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(x, y_0) |_{x=x_0}$, donde f' es la derivada de f respecto de x . Análogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'(x_0, y) |_{y=y_0}$, donde ahora f' es la derivada de f respecto de y .

Notación

$f'(x, y_0) |_{x=x_0}$ denota la derivada con respecto a x de $f(x, y_0)$ evaluada en $x = x_0$.



Independientemente de la cantidad de variables que intervienen, las derivadas parciales de funciones de varias variables se pueden interpretar físicamente como **razones de cambio, variaciones instantáneas o coeficientes de variación**, igual que cuando se tiene una sola variable. El ejemplo que vemos a continuación muestra este aspecto.

Ejemplo 2.2.

Proponemos una función de densidad $f(x, y) = 48 - \frac{4x^2}{3} - 3y^2$. La razón de cambio o el coeficiente de variación de la densidad en el punto $(1, 2)$ en la dirección x es $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$, es decir, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{8x}{3} \Big|_{(1,2)} = -\frac{8}{3}$. La razón de cambio en el punto $(1, 2)$ en la dirección y es:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -6y \Big|_{(1,2)} = -12.$$

Ejemplo 2.3.

La temperatura en un punto de una placa de acero viene dada en grados centígrados y depende de las coordenadas de cada punto:

$$T(x, y) = 500 - 0,6x^2 - 1,5y^2.$$

Las razones de cambio de la temperatura o la variación instantánea con respecto a la distancia medida en centímetros al movernos sobre la placa en las direcciones de los ejes x , y desde el punto $(2, 1)$ son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &= -1,2x \Big|_{(2,1)} = -2,4, \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= -3y \Big|_{(2,1)} = -3.\end{aligned}$$

Este resultado pone de manifiesto el hecho intuitivo de que un aumento repentino de la variable x desde el punto de coordenadas $(1, 2)$ representará un descenso de la temperatura.

Geoméricamente, este resultado nos indica que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, 1)$ de la restricción $y = 1$ es $-2,4$. Comprobad que la función $T(x, 1)$ satisface $T'(2, 1) = -2,4$. Físicamente, podemos afirmar que la variación instantánea de la temperatura con respecto a x en $(2, 1)$ es $-2,4$ grados/cm.

Ejemplo 2.4.

La media de tiempo que un cliente espera haciendo cola para ser atendido se establece por:

$$g(x, y) = \frac{1}{x - y}, \quad y < x,$$

donde y es la razón media de llegada, expresada como el número de clientes por unidad de tiempo y x es la razón media de servicio, expresada en las mismas unidades. Las razones de cambio del tiempo de espera con respecto a las variables x e y son:

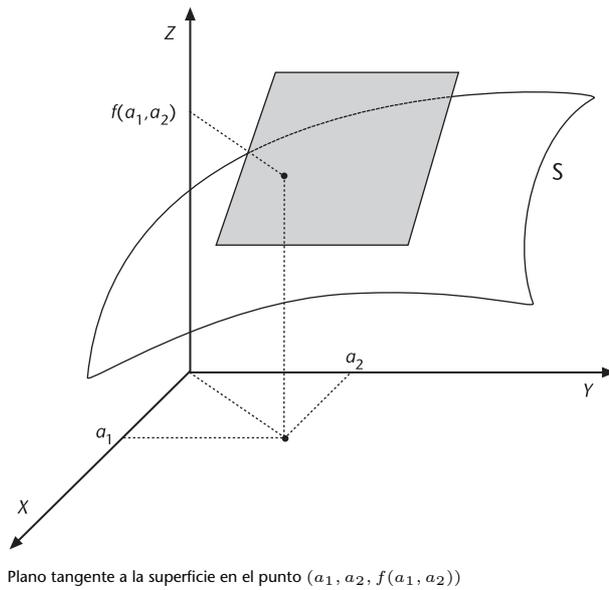
$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{1}{(x-y)^2} < 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{1}{(x-y)^2} > 0.\end{aligned}$$

Este resultado nos muestra el hecho intuitivo de que un aumento repentino en x repercutirá en una disminución en el tiempo de espera (valor de la derivada negativo), mientras que un aumento en y repercutirá de manera desfavorable en el tiempo de espera de los clientes.

2.2. Diferenciabilidad

En el caso de varias variables, la diferenciabilidad también es una aproximación lineal a una función, alrededor de un determinado punto.

Consideramos el caso de una función de dos variables $z = f(x, y)$, cuya gráfica será una superficie de \mathbb{R}^3 .



El hecho de que un plano tangente que pasa por el punto $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ de ecuación:

$$z = f(a_1, a_2) + \alpha(x - a_1) + \beta(y - a_2)$$

sea tangente a $z = f(x, y)$ en $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ significa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - (f(a_1, a_2) + \alpha(x - a_1) + \beta(y - a_2))}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}} = 0.$$

El término $\alpha(x - a_1) + \beta(y - a_2)$ se puede interpretar, por otro lado, como la imagen para una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ del vector incremento $h = (h_1, h_2)$ (o bien $\Delta x = (\Delta x, \Delta y)$). Observad que la aplicación lineal T depende tanto de la función como del punto considerado. Si la función es diferenciable en (a_1, a_2) , los coeficientes α y β son únicos y $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right)$, y se dice que la derivada de la función $f(x, y)$ en el punto (a_1, a_2) es la función lineal T que viene dada por el vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right)$.

Ejemplo 2.5.

En el ejemplo 2.1, hemos encontrado las derivadas parciales de $f(x, y, z) = x^2y + xz^3 - y^2z^2$. En el punto $(1, -1, 0)$, estas derivadas parciales valen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 0) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 0) = 0.$$

Para describir la ecuación del hiperplano tangente, tenemos que añadir una nueva variable T . Puesto que, $f(1, -1, 0) = -1$ y $(-2, 1, 0) \cdot (x - 1, y + 1, z) = 2 - 2x + y$, donde $(x - 1, y + 1, z) = (x, y, z) - (1, -1, 0)$ y el punto centrado denota el producto escalar de los dos vectores, el hiperplano tangente viene dado por $T = 2 - 2x + y$. De este modo, la diferencial de f en el punto $(1, -1, 0)$ es la función lineal:

$$T(x, y, z) = -2x + y.$$

Definición

Un hiperplano es el conjunto de puntos de \mathbb{R}^n que verifican una ecuación lineal determinada: en \mathbb{R}^3 es un plano y en \mathbb{R}^2 es una recta.

En general, la derivada de una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es la función lineal que viene dada por el vector:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Este hecho comportará una nueva definición, que será bastante recurrente en este módulo.

El **vector gradiente** de la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en el punto (a_1, \dots, a_n) es el vector que tiene por componentes las derivadas parciales de f en este punto. El vector gradiente se escribe $\nabla f(a_1, \dots, a_n)$. Si se supone que se evalúa en el punto (a_1, \dots, a_n) , tenemos:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Es importante remarcar el hecho de que el gradiente es un vector.

En particular, si indicamos el producto escalar entre dos vectores con un punto centrado, en tal caso el hiperplano tangente de una función f en el punto $a \in \mathbb{R}^n$ se puede calcular de esta manera:

$$x_{n+1} = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a), \text{ donde } x = (x_1, \dots, x_n).$$

Nos interesa remarcar, ya que se trata de la expresión que se utiliza con mayor frecuencia, lo siguiente:

La aproximación lineal a una función diferenciable f alrededor del punto a se puede escribir en términos del gradiente así:

$$f(x) \approx f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a).$$

Por lo que respecta a los cálculos, prestemos atención a que:

$$\nabla f(a) \cdot (x - a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i).$$

A continuación se presenta otro resultado importante.

Podemos afirmar que si una función f es diferenciable en a , entonces:

- a) f es continua en a .
- b) Existen las derivadas parciales de f en este punto.

Para garantizar la diferenciable a partir de las derivadas parciales, necesitamos comprobar si se verifica una condición.

Condición suficiente para la diferenciable

Si las derivadas parciales existen y son funciones continuas dentro de un determinado conjunto abierto O incluido en el dominio de f , entonces f es diferenciable en todos los puntos de O .

Nomenclatura

Decimos que una función f es de clase \mathcal{C}^1 en D si f satisface la condición suficiente de diferenciable.

Decimos que una función f es de clase \mathcal{C}^2 en D si la función y sus derivadas parciales satisfacen la condición suficiente de diferenciable.

Normalmente, en la mayor parte de las funciones que vamos a tratar nos encontraremos con que esta condición suficiente se satisface.

Ejemplo 2.6.

La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es diferenciable en \mathbb{R}^2 porque es continua en cualquier punto y existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ que también son funciones continuas.

2.3. Derivadas direccionales

En el caso de las funciones de varias variables, podemos considerar la variación de la función en un punto en función de la dirección que tomemos.

Sea v un vector unitario de \mathbb{R}^n , es decir, $\|v\| = 1$, y sea f una función definida en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}^n$. Si existe el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h},$$

su valor es la derivada de la función f en el punto a en la dirección v , y se escribe $D_v f(a)$.

Observad que la existencia de estas derivadas direccionales significa simplemente que la función de una variable real $t \mapsto f(a + tv)$ es derivable en $t = 0$. En particular, si $v = e_i$ se obtiene la i -ésima derivada parcial de f .

De entre las infinitas direcciones que podemos considerar para una función f en un punto $a \in \mathbb{R}^3$, tres de las derivadas direccionales coincidirán con $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

Ejemplo 2.7.

Para la función $g(x, y) = 4x^3 + 3x^2y - 2xy^2 - 5x + y^3 + 7$ consideramos la condición de que su derivada direccional pase por el punto $(0, 0)$ y tenga la dirección del vector unitario $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Definimos la derivada direccional de g en el punto $(0, 0)$ y en la dirección del vector $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ como la derivada de la función de una variable, $u(t) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, -\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$ evaluada en $t = 0$. En concreto:

$$u(t) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, -\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = \left(\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)t^3 - \frac{5\sqrt{2}}{2}t + 7.$$

Por lo tanto:

$$u'(t) = 3\left(\frac{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4}\right)t^2 - \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$u'(0) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)0 - \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

La derivada direccional es $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$, lo cual nos indica que el corte vertical (y , en consecuencia, la función g) decrece a partir de $(0, 0)$, si nos movemos en la dirección del vector $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (Recordemos que una derivada negativa indica que la función es decreciente).

Al calcular una derivada direccional, los vectores que consideramos siempre deben tener longitud 1. Así, por ejemplo, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es unitario, debido que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$. El motivo por el cual se han escogido siempre vectores unitarios es que, de esta manera, se pueden comparar dos derivadas direccionales en direcciones diferentes. **!**

En general, si $a \in \mathbb{R}^3$ y v es un vector unitario, la derivada direccional de f en a según la dirección v se puede calcular como la derivada en cero de $u(t) = f(a + tv)$. Es decir, $D_v f(a) = u'(0)$.

2.3.1. El vector gradiente y las derivadas direccionales

El vector gradiente, un concepto que fue presentado en el apartado 2.2, se utiliza en diferentes situaciones. Las dos más importantes son: en el cálculo de derivadas direccionales y en el cálculo de extremos de funciones. Para considerar el gradiente en un punto es necesario que en éste la función admita derivadas parciales. Recordemos ahora que:

Si $z = f(x_1, \dots, x_n)$, entonces el gradiente de f , que se denota mediante $\nabla f(x_1, \dots, x_n)$, es el vector:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right).$$

A continuación relacionaremos el vector gradiente y las derivadas direccionales. Si ahora nos preguntamos en qué dirección es máxima, en $(0, 0)$, la derivada para la función g del ejemplo anterior, sólo tenemos que escoger un vector unitario (a, b) con $(a^2 + b^2 = 1)$ y seguir el mismo procedimiento que se realizó para $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Comprobad que la función de una variable u que da la derivada direccional de g en $(0, 0)$ en la dirección (a, b) será del tipo:

$$u(t) = At^3 - 5at + 7$$

(donde A depende de a y b) y que:

$$u'(0) = -5a.$$

Así pues, la derivada direccional de g en $(0, 0)$ es máxima en la dirección $(a, b) = (-1, 0)$ y su valor es 5. Análogamente, la derivada direccional de g en $(0, 0)$ cuando consideramos la dirección $(a, b) = (1, 0)$ y su valor es -5 . La derivada direccional de g en $(0, 0)$ es nula cuando se considera cualquier dirección $(a, b) = (0, \pm 1)$. Observamos que $\nabla g(0, 0) = (\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)) = (-5, 0)$ y que la derivada direccional de g en $(0, 0)$ en la dirección del vector unitario (a, b) se puede calcular como:

$$\nabla g(0, 0) \cdot (a, b),$$

donde \cdot denota el producto escalar. Recordemos que $(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$.

El método práctico para calcular la derivada direccional de una función es el siguiente:

$$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v,$$

donde v es un vector unitario, es decir, $\|v\| = 1$.

Así, por ejemplo, si consideramos la función g , el punto $(0, 0)$ y el vector $(1, 0)$ obtenemos:

$$D_{(1,0)}g(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = -5;$$

si consideramos ahora el vector $(0, 1)$, resulta:

$$D_{(0,1)}g(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0;$$

en caso del que el vector sea $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, obtenemos, como vimos en el ejemplo 2.7:

$$D_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{5\sqrt{2}}{2};$$

si el vector es $(-1, 0)$, resulta: $D_{(-1,0)}g(0, 0) = 5$,

y si, finalmente, $v = (0, \pm 1)$, entonces: $D_{(0,\pm 1)}g(0, 0) = 0$.

Observamos que las derivadas direccionales máxima y mínima se alcanzan cuando la dirección del vector unitario (a, b) coincide respectivamente con la dirección de $\nabla g(0, 0)$ y con la de $-\nabla g(0, 0)$. Además, la derivada direccional es nula en cualquier dirección perpendicular al vector gradiente. Éste es un hecho general que se concreta a continuación:

1) La dirección de máximo crecimiento de una función f en un punto arbitrario (x, y) viene dada por $\nabla f(x, y)$ y el valor máximo de

$$D_u f(x, y) \text{ es } \|\nabla f(x, y)\| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ con } u = \frac{\nabla f(x, y)}{\|\nabla f(x, y)\|}.$$

2) La dirección de máximo decrecimiento de una función f viene dada por $-\nabla f(x, y)$ y el valor mínimo de $D_u f(x, y)$ es $-\|\nabla f(x, y)\| =$

$$-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ con } u = -\frac{\nabla f(x, y)}{\|\nabla f(x, y)\|}.$$

3) La derivada direccional de una función f en (x, y) , en la dirección del vector u , es nula si, y sólo si, el vector u es perpendicular al vector gradiente $\nabla f(x, y)$.

Comentario

De (3) se deduce que el vector gradiente es perpendicular a las curvas de nivel.

Ejemplo 2.8.

Encontrad la derivada direccional de $g(x, y) = x^2 - y^2$ en el punto $(1, 1)$ y en la dirección que forma un ángulo de 60° con la dirección positiva del eje OX .

Un vector de longitud 1 que forma un ángulo de 60° con el semieje positivo OX es aquel que tiene coordenadas $u = (\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Podemos calcular la derivada direccional utilizando el producto escalar:

$$D_u g(1, 1) = \nabla g(1, 1) \cdot (u_1, u_2).$$

Observad que $\nabla g(x, y) = (2x, -2y)$ y $\nabla g(1, 1) = (2, -2)$, de donde se obtiene:

$$D_u g(1, 1) = (2, -2) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}.$$

Ejemplo 2.9.

La temperatura en cada punto de una placa metálica viene dada por $T(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x$.

a) ¿En qué dirección aumenta la temperatura con mayor rapidez en $(0, 0)$? En este caso, ¿cuál es el coeficiente de variación de T ?

b) ¿En qué dirección disminuye la temperatura con mayor rapidez en $(0, 0)$?

a) La dirección de máximo crecimiento de la temperatura es:

$$\nabla T(0,0) = (e^x \cos y - e^y \sin x, -e^x \sin y + e^y \cos x) |_{(0,0)} = (1, 1).$$

Tengamos en cuenta que este vector no es unitario; por lo tanto, es necesario que lo normalicemos: $\frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. El coeficiente de variación viene dado por:

$$D_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} T(0,0) = \nabla T(0,0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1,1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Este valor se podría encontrar directamente: sólo hay que darse cuenta de que $\|(1,1)\| = \sqrt{2}$.

b) La dirección de máximo decrecimiento en el punto $(0,0)$ es $(-1, -1)$. En este caso comprobéis que la derivada direccional da $-\sqrt{2}$.

Ejemplo 2.10.

Una gota de agua resbala sobre una plataforma definida por $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$. ¿Qué dirección seguirá cuando esté situada en $(1, 2, 2\sqrt{2})$?

Tendremos que encontrar la dirección de mínima pendiente de la función diferenciable que representa la plataforma en el punto $(1, 2, 2\sqrt{2})$. El vector gradiente es:

$$\nabla z(x,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{-4x}{\sqrt{16 - 4x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{16 - 4x^2 - y^2}}\right)$$

y, por tanto, $\nabla z(1,2) = \left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Así, la dirección de mínima pendiente es $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Si además se solicita esta dirección normalizada, se divide cada componente por $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Comentario

Se entiende por mínima pendiente el menor valor que puede alcanzar la pendiente, incluyendo los reales negativos.

Ejemplo 2.11.

Los cuatro componentes de un sistema probabilístico en serie funcionan con una probabilidad de 0,95. Arreglando el sistema se puede conseguir un aumento de la suma de las probabilidades de los componentes del mismo en 0,04. ¿Cómo hay que distribuir las nuevas probabilidades de los componentes para rentabilizar al máximo el sistema?

Consideramos la función $f(x,y,z,t) = xyz t$ (en lugar de la expresión $x_1 x_2 x_3 x_4$). La probabilidad de que el sistema funcione es $f(0,95, 0,95, 0,95, 0,95) = (0,95)^4$. El vector gradiente en $P = (0,95, 0,95, 0,95, 0,95)$ es el siguiente:

$$\nabla f(P) = (yzt, xzt, xyt, xyz) |_{P} = ((0,95)^3, (0,95)^3, (0,95)^3, (0,95)^3).$$

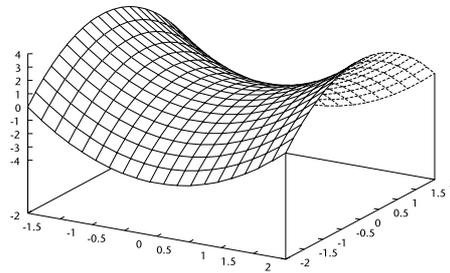
Así pues, la máxima variación positiva de la función se alcanza en la dirección en que todos los componentes son iguales y positivos. Por tanto, repartiremos la probabilidad 0,04 de la misma manera para cada componente y obtendremos las nuevas probabilidades de los componentes $(0,96, 0,96, 0,96, 0,96)$. Ahora, el sistema funcionará con probabilidad $0,96^4$.

Una de las peculiaridades que se presentan en funciones de dos variables en relación con las funciones de una variable es que, teniendo en cuenta que a partir de un determinado punto nos encontramos con muchas direcciones posibles, nos podemos encontrar con puntos donde la función tiene un mínimo a lo largo de una determinada dirección, pero también tiene un máximo a lo largo de otra dirección. Un punto con estas características recibe el nombre de **punto de silla**. 

Ejemplo 2.12.

Consideramos la función: $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Como paso previo, prestad atención a la gráfica de la función alrededor del origen:



Punto de silla de $x^2 - y^2$

Observad que la gráfica tiene un cierto parecido con una silla de montar a caballo, y de este símil es de donde proviene su nombre. Fijémonos en que la función tiene un mínimo en $(0, 0)$ al considerar la función restringida en $y = 0$ de la función $f(x, y)$, y que tiene un máximo en $(0, 0)$ al considerar la función restringida en $x = 0$ de la función $f(x, y)$. Esto se deduce del hecho de que en el primer caso se obtiene $f(x, 0) = x^2$, mientras que en el segundo se obtiene $f(0, y) = -y^2$.

2.4. Derivadas parciales de orden superior

Si tenemos una función f de n variables y mantenemos todas las variables excepto una fija en un determinado valor, obtendremos como resultado una función de una variable. Hemos denominado a la derivada de esta función *derivada parcial*. Si derivamos esta función de una variable en dos ocasiones, obtendremos una **derivada parcial de segundo orden**. Del mismo modo, podemos definir derivadas parciales de cualquier orden mediante derivaciones sucesivas.

Ejemplo 2.13.

La función $f(x, y) = x^4 - x^2 + xy + y^2 - y^4$ tiene como derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 4y^3.$$

Cada derivada parcial es función tanto de x como de y . Así pues, tenemos cuatro posibles derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 12x^2 - 2, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 1, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2 - 12y^2. \end{aligned}$$

Prestemos atención al hecho de que, con n variables, hay n^2 posibles derivadas parciales de segundo orden, que corresponden a todas las posibles parejas (ordenadas) que podemos formar con las n variables.

Dada una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, definimos su **matriz hessiana** como la matriz que tiene como componentes las derivadas parciales de segundo orden, dispuestas de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Designamos la matriz hessiana de f evaluada en (a_1, \dots, a_n) por $D^2 f(a_1, \dots, a_n)$.

Notación

Otra posibilidad para expresar la matriz hessiana asociada a la función f es $H(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Ejemplo 2.14.

En el ejemplo anterior hemos encontrado las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x, y) = x^4 - x^2 + x y + y^2 - y^4$. La matriz hessiana de esta función es:

$$\begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 1 \\ 1 & 2 - 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.15.

En este ejemplo vamos a utilizar una notación alternativa que también aparece en muchos libros de texto. Sea $f(x, y, z) = x y z$. Entonces:

$$D_1 f(x, y, z) = y z, \quad D_2 f(x, y, z) = x z, \quad D_3 f(x, y, z) = x y.$$

Y dado el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$, las derivadas parciales en este punto son:

$$D_1 f(1, 2, 3) = 6, \quad D_2 f(1, 2, 3) = 3 \quad \text{y} \quad D_3 f(1, 2, 3) = 2.$$

Si denotamos las derivadas parciales segundas por D_{ij} , entonces:

$$\begin{aligned} D_{11} f(x, y, z) &= D_{22} f(x, y, z) = D_{33} f(x, y, z) = 0 \\ D_{12} f(x, y, z) &= D_{21} f(x, y, z) = z \\ D_{13} f(x, y, z) &= D_{31} f(x, y, z) = y \\ D_{23} f(x, y, z) &= D_{32} f(x, y, z) = x \end{aligned}$$

por lo cual, la matriz hessiana es:

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D^2 f(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación se presenta un resultado que, en algunos casos, será de utilidad.

Regla de Schwartz

Siempre que las derivadas parciales de segundo orden sean funciones continuas, las derivadas cruzadas coincidirán:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

cualesquiera que sean los índices i y j .

Notación

En el apartado de extremos, todavía utilizaremos otra nomenclatura: $f_{x_i x_j}$ denota

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

A efectos prácticos, puesto que siempre trabajaremos con funciones que tienen derivadas continuas de cualquier orden, el resultado que acabamos de ver significa que, de todas las n^2 posibles derivadas de segundo orden, tendremos que calcular bastantes menos. De hecho, podéis comprobar que es suficiente con $\frac{n^2+n}{2}$.

2.5. La regla de la cadena

Hay una serie de funciones elementales con las que nos encontramos muy a menudo, ya desde la enseñanza primaria: suma y resta, multiplicación y división, potenciación y radicación. También hay otras tantas que habréis tenido ocasión de ver posteriormente, como los logaritmos, exponenciales o funciones trigonométricas. Todas estas funciones son continuas y diferenciables y, de hecho, casi todos los ejemplos de funciones que encontraréis en este texto de cálculo diferencial (o en cualquier otro de un nivel similar) no son más que el resultado de hacer “mezclas” con estas funciones. Estas mezclas conforman lo que, en lenguaje más formal, se denomina la **composición de funciones**. Por ejemplo, la función $f(x) = \ln[\sin^2 x]$ es el resultado del proceso de composiciones siguiente:

$$x \mapsto \sin x \mapsto \sin^2 x \mapsto \ln[\sin^2 x].$$

Es decir, hemos compuesto el seno con el cuadrado y, después, todo esto con el logaritmo.

La **regla de la cadena** facilita mucho el trabajo con estas funciones: para encontrar las derivadas de funciones compuestas es suficiente con conocer las derivadas de las funciones elementales.

En el caso del cálculo de una variable, la regla de la cadena nos indica que:

$$(g(h(x)))' = g'[h(x)] h'(x),$$

es decir, que lo que tenemos que hacer es ir multiplicando las sucesivas derivadas de las funciones componentes.

Por ejemplo,...

... en el caso de la función que hemos escrito antes, tendríamos: $f'(x) =$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} (2 \sin x) \cos x.$$

El primer término corresponde a la derivada del logaritmo; el segundo, a la derivada del cuadrado y el tercero, a la derivada del seno.

En el caso de varias variables, el asunto se complica cada vez más, a pesar de que si se utiliza una notación adecuada, el proceso resulta muy parecido al que acabamos de ver. Aquí no trataremos el caso más general posible, sino sólo aquellos casos particulares que a la hora de la verdad son los más representativos. Para simplificar la presentación, sólo apuntaremos el caso de dos variables. Cuando tenemos más variables, el problema es exactamente igual.

Supongamos que tenemos una determinada función de dos variables $z = f(x, y)$. Un tipo de composición muy frecuente es aplicar ahora una función de una variable h a z . La función compuesta resultante es $h(z) = h[f(x, y)]$, como se ve, una nueva función de dos variables.

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $h(z) = \sqrt{z}$, entonces la función compuesta es la siguiente: $h[f(x, y)] = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Regla de la cadena I

Supongamos que tenemos una función compuesta:

$g(x, y) = h[f(x, y)]$. La regla de la cadena determina que sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = h'[f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = h'[f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Esquemáticamente, si $z = f(x, y)$, podemos escribir:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = h'(z) \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = h'(z) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ejemplo 2.16.

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$, $h(z) = \sqrt{z}$ y $g(x, y) = h[f(x, y)] = \sqrt{x^2 + y^2}$. Entonces se tiene que:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} (2x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} (2y).$$

Otro caso típico en ingeniería es que cuando partimos de una función de dos variables $f(x, y)$, donde tanto x como y dependen de otra variable p . Si suponemos que hay dos funciones de una variable u y v , en que $x = u(p)$ e $y = v(p)$, entonces la función compuesta es $g(p) = f[u(p), v(p)]$.

Ejemplo 2.17.

Supongamos que $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x = u(p) = \sqrt{p}$ y $y = v(p) = p^2$. En tal caso, la función compuesta es $g(p) = (\sqrt{p})^2 + (p^2)^2 = p + p^4$.

Regla de la cadena II

Supongamos que tenemos una función compuesta de la forma siguiente:

$$g(p) = f(x, y) = f[u(p), v(p)].$$

La regla de la cadena indica que su derivada es:

$$g'(p) = \frac{\partial f}{\partial x} u'(p) + \frac{\partial f}{\partial y} v'(p).$$

Supongamos que $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x = u(p) = \sqrt{p}$ y $y = v(p) = p^2$. Entonces, podemos encontrar la derivada de la función compuesta aplicando la regla de la cadena:

$$g'(p) = (2x) \frac{1}{2\sqrt{p}} + (2y) (2p) = (2\sqrt{p}) \frac{1}{2\sqrt{p}} + (2p^2) (2p) = 1 + 4p^3.$$

Podemos apreciar que esta derivada coincide con la que habríamos encontrado si primero hubiésemos operado de manera algebraica hasta simplificar la función compuesta en $g(p) = p + p^4$.

2.6. Ejercicios

2.1. Encontrad, si existen, las derivadas parciales de las funciones que tenemos a continuación en los puntos que se indican:

a) $f(x, y) = x|y|$ en $(1, 0)$

b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ en $(1, 0)$

c) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$ en $(1, 1)$

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(0, 1)$

2.2. Estudiad de la diferenciabilidad, encontrad el plano tangente y escribid la diferencial, si es posible, para las funciones del ejercicio anterior en los puntos indicados.

2.3. Probad que el error relativo de un producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.

2.4. Encontrad la ecuación del plano tangente y de la recta normal de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $f(x, y) = 26 - x^2 - xy^2$ en $(2, -3)$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $(1, 2)$

c) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en $(3, -4)$

2.5. Si $f(x, y) = 48 - \frac{4x^2}{3} - 3y^2$ da como resultado la densidad de una placa metálica plana, encontrad el coeficiente de variación de la densidad en $(1, -1)$:

a) En la dirección de disminución más repentina de la densidad.

b) En la dirección de crecimiento máximo.

c) En la dirección $(1, 0)$.

d) ¿En qué dirección ni aumenta ni disminuye la densidad?

2.6. Demostrad que la función $u(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2.7. Aplicando la regla de la cadena, encontrad las derivadas parciales de la función compuesta que tenemos a continuación: $g(x, y) = h[f(x, y)] = \ln\left[x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}\right]$.

2.8. Aplicando la regla de la cadena, encontrad la derivada de $g(p)$, obtenida a partir de la función $f(x, y) = \ln(x) + 2 \ln(y)$, donde $x = p^2$ y $y = p^4$. Después, operad algebraicamente hasta simplificar la función compuesta y determinad su derivada de manera directa, para así comprobar que con los dos métodos llegáis al mismo resultado.

2.9. El lado de un rectángulo de 20 metros aumenta con una velocidad constante de 5 m/s y el otro lado, de 30 m, disminuye a una velocidad de 4 m/s. ¿A qué velocidad varían el perímetro y el área?

2.10. Si $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, donde $x = e^t$, $y = \sin t$, calculad $\frac{\partial z}{\partial t}$.

2.11. Demostrad que la función $z = yf(x^2 - y^2)$ satisface $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

2.7. Solucionario

2.1. Observad, en primer lugar, que el dominio de las funciones a , b , y d es \mathbb{R}^2 , y el dominio de la función del apartado c es $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. En todos los apartados, el punto indicado pertenece al interior del dominio.

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 0) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, h) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} \end{aligned}$$

Puesto que el último límite no existe (el resultado es 1 por la derecha y -1 por la izquierda), podemos concluir que $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$ no existe.

En los apartados siguientes vamos a calcular las derivadas parciales sin utilizar la definición. En un buen ejercicio comprobar que si se calculan directamente utilizando la definición de límite, se obtienen los mismos resultados que a continuación encontraremos mediante el cálculo directo.

b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3ay, & \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) &= 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3ax, & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) &= -3a \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y + \frac{1}{y}, & \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x - \frac{x}{y^2}, & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= 0\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) &= 1\end{aligned}$$

2.2.

a) Hemos visto que $f(x, y) = x|y|$ no tiene derivada parcial con respecto a y en el punto $(1, 0)$. Así pues, no se cumple la condición necesaria de diferenciabilidad y, por lo tanto, la función no es diferenciable en $(1, 0)$.

b) Observad que las funciones $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax$ son continuas (ya que son polinómicas); por tanto, se cumple la condición suficiente de diferenciabilidad. El plano tangente en $(1, 0)$ es:

$$z - f(1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)(y - 0),$$

es decir:

$$z - 1 = 3(x - 1) - 3ay$$

o bien:

$$z = -2 + 3x - 3ay.$$

Por tanto, la diferencial de f en el punto $(1, 0)$ es la función lineal:

$$T(x, y) = 3x - 3ay.$$

c) Observad que las funciones $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$ son continuas en un entorno de $(1, 1)$; por tanto, se cumple la condición suficiente de diferenciabilidad. El plano tangente en $(1, 1)$ es:

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1),$$

es decir:

$$z - 2 = 2(x - 1) + 0(y - 1)$$

o bien:

$$z = 2x.$$

Por tanto, la diferencial de f en el punto $(1, 1)$ es la función lineal:

$$T(x, y) = 2x.$$

d) Observad que las funciones $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ son continuas en un entorno de $(0, 1)$; por tanto, se cumple la condición suficiente de diferenciabilidad. El plano tangente en $(0, 1)$ es:

$$z - f(0, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1),$$

es decir:

$$z - 1 = 0(x - 0) + 1(y - 1)$$

o bien:

$$z = y.$$

Por lo tanto, la diferencial de f en el punto $(0, 1)$ es la función lineal:

$$T(x, y) = y.$$

2.3. La función producto es $p(x, y) = xy$. El error relativo se define como $E_r = \frac{\Delta p}{p}$, donde $\Delta p = p(x + \Delta x, y + \Delta y) - p(x, y)$ y Δx , Δy se interpretan como los errores cometidos al medir x e y respectivamente. Puesto que la función p es diferenciable, podemos aproximar Δp por la diferencial de p en (x, y) evaluada en $(\Delta x, \Delta y)$, es decir:

$$\Delta p \approx T(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y = y \Delta x + x \Delta y,$$

donde el error relativo es:

$$E_r \approx \frac{y \Delta x + x \Delta y}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}.$$

Así, por ejemplo, un error por exceso del 1% al medir x y un error también por exceso del 2% al medir y repercutirán en un error del 3% al medir el producto.

2.4. Las funciones consideradas son diferenciables en los puntos indicados. La ecuación del plano tangente en el punto $(a, b, f(a, b))$ es, en cada caso:

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b),$$

y la ecuación de la recta normal (perpendicular al plano tangente) que pasa por $(a, b, f(a, b))$ es:

$$\frac{x - a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)} = \frac{y - b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}.$$

a) Plano tangente:

$$z - 4 = -13(x - 2) + 12(y + 3)$$

Recta normal:

$$\frac{x - 2}{-13} = \frac{y + 3}{12} = \frac{z - 4}{-1}.$$

b) Plano tangente:

$$z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2).$$

Recta normal:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 5}{-1}.$$

c) Plano tangente:

$$z - \frac{3}{5} = \frac{16}{125}(x - 3) + \frac{12}{125}(y + 4).$$

Recta normal:

$$\frac{x - 3}{\frac{16}{125}} = \frac{y + 4}{\frac{12}{125}} = \frac{z - \frac{3}{5}}{-1}.$$

2.5. El coeficiente de variación de f en el punto P en función de la dirección v nos da la derivada direccional de f en el punto P y en la dirección v .

a) El gradiente es $\nabla f(x, y) = \left(-\frac{8x}{3}, -6y\right)$, en concreto $\nabla f(1, -1) = \left(-\frac{8}{3}, 6\right)$. La dirección de disminución más repentina es $-\nabla f(1, -1) = \left(\frac{8}{3}, -6\right)$ y el coeficiente de variación es $-\|\nabla f(1, -1)\| = -\frac{2\sqrt{97}}{3}$.

b) La dirección de aumento más repentino es $\nabla f(1, -1) = \left(-\frac{8}{3}, 6\right)$ y el coeficiente de variación es $\frac{2\sqrt{97}}{3}$.

c) Si ahora tomamos la dirección $v = (1, 0)$, obtenemos:

$$D_{(1,0)}f(1, -1) = \nabla f(1, -1) \cdot (1, 0) = \left(-\frac{8}{3}, 6\right) \cdot (1, 0) = -\frac{8}{3}.$$

d) El coeficiente de variación de cero en la dirección perpendicular a $\nabla f(1, -1) = \left(-\frac{8}{3}, 6\right)$, es decir, en la dirección $\left(6, \frac{8}{3}\right)$. Si se quiere, la dirección obtenida se puede normalizar dividiendo el vector por su norma. Asimismo, podréis observar que el vector opuesto $\left(-6, -\frac{8}{3}\right)$ también es perpendicular.

2.6. Con el fin de probar la ecuación que nos piden, es necesario que calculemos las derivadas parciales de segundo orden. En primer lugar calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

A continuación calculamos las derivadas parciales de segundo orden que necesitamos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Está claro, por lo tanto, que se satisface la ecuación de Laplace.

2.7. Tenemos $g(x, y) = h[f(x, y)] = \ln \left[x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \right]$. Entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} x^{-1},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} y^{-1}.$$

2.8. Obtenemos $g(p)$ a partir de $f(x, y) = \ln x + 2 \ln y$, tomando $x = p^2$ y $y = p^4$. Por tanto:

$$g'(p) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{1}{x} 2p + \frac{2}{y} 4p^3 = \frac{1}{p^2} 2p + \frac{2}{p^4} 4p^3 = \frac{2}{p} + \frac{8}{p} = \frac{10}{p}.$$

Ahora encontramos primero, $g(p)$:

$$g(p) = \ln p^2 + 2 \ln p^4 = 2 \ln p + 8 \ln p = 10 \ln p.$$

Por lo tanto:

$$g'(p) = \frac{10}{p}.$$

2.9. El área del rectángulo es $A(x, y) = xy$. Los lados varían en el tiempo, el área también es función del tiempo. $A(t) = x(t)y(t)$. La velocidad a la que varía el área es:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = y \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + x \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

En el instante en que $x = 20$ m e $y = 30$ m, las variaciones son $\frac{\partial x}{\partial t} = 5$ m/s y $\frac{\partial y}{\partial t} = -4$ m/s, respectivamente, de manera que la variación instantánea del área es:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 30 \cdot 5 - 20 \cdot 4 = 70 \text{ m/s}^2.$$

Por lo que respecta al perímetro, tenemos $P(t) = 2(x(t) + y(t))$, y su variación instantánea es:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + 2 \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

En el instante en que $x = 20$ m, $y = 30$ m se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 2 \text{ m/s}^2.$$

2.10. Si tenemos en cuenta el método explicado (regla de la cadena II), entonces:

$$z'(t) = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'(t).$$

Por tanto:

$$z'(t) = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot e^t + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \cos t.$$

Mediante la sustitución de los valores de x y de y en función de t , resulta:

$$z'(t) = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + \sin^2 t}} \cdot e^t + \frac{\sin t}{\sqrt{e^{2t} + \sin^2 t}} \cdot \cos t.$$

2.11. En primer lugar, observad que z es producto de la variable independiente y por la función f , así que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, definimos $p = x^2 - y^2$. En tal caso:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(p) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = f'(p) \cdot 2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'(p) \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = -f'(p) \cdot 2y.$$

De modo que queda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot f'(p) \cdot 2x = 2xyf'(x^2 - y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f(p) + y(-f'(p) \cdot 2y) = f(x^2 - y^2) - 2y^2 f'(x^2 - y^2).$$

Para comprobar que la ecuación del enunciado es cierta, sustituimos estas expresiones y tendremos que verificar, también, que tenemos una identidad.

$$\frac{1}{x} \cdot 2xyf'(x^2 - y^2) + \frac{1}{y} (f(x^2 - y^2) - 2y^2 f'(x^2 - y^2)) = \frac{f(x^2 - y^2)}{y},$$

$$2y \cdot f'(x^2 - y^2) + \frac{f(x^2 - y^2)}{y} - 2yf'(x^2 - y^2) = \frac{f(x^2 - y^2)}{y}.$$

La última igualdad es cierta, así que la ecuación enunciada también lo es.

3. Extremos de funciones de varias variables

Entre las características básicas de la gráfica de una función encontramos sus puntos extremos, en los cuales la función alcanza sus valores mayores y menores. En este apartado deduciremos un método que nos permite determinar estos puntos. Aparecerá dividido en tres partes: la primera, que se dedica al cálculo de extremos libres; la segunda, al cálculo de extremos absolutos sobre conjuntos compactos; y la última, al estudio de extremos en funciones sobre restricciones de igualdad utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

En cada subapartado encontraremos las definiciones de los términos que se utilizarán. Para que estas definiciones resulten más comprensibles, las introduciremos para funciones de dos variables y os dejaremos a vosotros la extrapolación para un mayor número de variables.

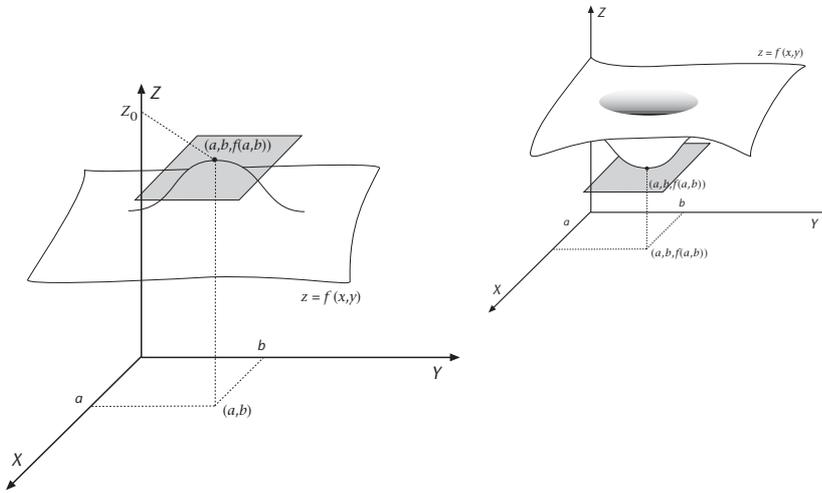
3.1. Extremos locales o relativos

Empezaremos este subapartado presentando la definición de extremos locales o relativos:

Sea f una función definida en un dominio D que contiene el punto (a, b) y que supondremos abierto.

- 1) (a, b) es un **mínimo local** de f si existe un entorno U de (a, b) tal que $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todo $(x, y) \in U$.
- 2) (a, b) es un **máximo local** de f si existe un entorno U de (a, b) tal que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo $(x, y) \in U$.
- 3) (a, b) es un **extremo local o relativo** de f si es un mínimo local o máximo local.

Decir que f tiene un mínimo local en (a, b) significa que el punto $(a, b, f(a, b))$ es, como mínimo, tan bajo como los puntos de su entorno en la gráfica $z = f(x, y)$.



Para localizar los extremos locales de f , supuestamente de clase \mathcal{C}^1 en D , investigaremos los puntos con gradiente nulo. Estos puntos se conocen como puntos críticos de f .

El punto (a, b) es un **punto crítico** de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, de clase \mathcal{C}^1 si $\nabla f(a, b) = (0, 0)$.

La relación que se establece entre los extremos locales de funciones diferenciables y los puntos críticos queda reflejada en el teorema siguiente:

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto; $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 en $(a, b) \in D$ que es un extremo local de éste. Entonces, $\nabla f(a, b) = (0, 0)$; es decir, (a, b) es un punto crítico de f .

Este último resultado pone de manifiesto que para encontrar extremos locales sólo tenemos que determinar los puntos críticos de $f(x, y)$. Ahora bien, tal y como sucedía para funciones de una variable, los puntos críticos de una función de dos o más variables no siempre son extremos locales. Así pues, un punto crítico de f que no es un extremo local se denomina **punto de silla**.

Para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$, introducida en el ejemplo 2.12, resulta que $(0, 0)$ es un punto crítico, ya que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{aligned} \right\}$$

y, como se ha visto en el ejemplo mencionado, la restricción de la función en $(x, 0)$ y en $(0, y)$ es indicativo de que $(0, 0)$ no es un extremo local de f .

Ejemplo 3.1.

Calculad los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$.

Observad, en primer lugar, que la función f tiene por dominio el conjunto abierto $D = \mathbb{R}^2$ y es de clase C^1 en D . En caso de que queramos encontrar los puntos críticos, tendremos que igualar las derivadas parciales a cero y resolver el sistema que resulte.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6x + 3y^2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Tras resolver el sistema encontramos como soluciones únicas $(0, 0)$ y $(2, 2)$.

Ejemplo 3.2.

Calculad los punto críticos de la función $g(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$.

El dominio de la función es todo el plano, excepto los puntos de los ejes de coordenadas; es decir, $D = \{(x, y) : x \neq 0, y \neq 0\}$. Este conjunto es abierto (comprobadlo) y la función es de clase C^1 ; por tanto, tiene sentido calcular los extremos de la función g en el dominio D . Si nos interesa encontrar los puntos críticos, tendremos que igualar a cero las derivadas parciales y resolver el sistema que resulte.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= x - \frac{8}{y^2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Si aislamos y en la primera ecuación, tenemos $y = \frac{1}{x^2}$, que elevado al cuadrado resulta $y^2 = \frac{1}{x^4}$. Ahora aislamos y^2 en la segunda ecuación, $y^2 = \frac{8}{x}$. Igualando ambas expresiones tenemos:

$$\frac{8}{x} = \frac{1}{x^4} \Rightarrow x(8x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{1}{2}.$$

El sistema que se ha planteado tiene como soluciones $(0, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 4)$; ahora bien, $(0, 0)$ no es un punto crítico, ya que no pertenece al dominio. La función g tiene $(\frac{1}{2}, 4)$ como único punto crítico.

Ejemplo 3.3.

Calculad los puntos críticos de la función $h(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 15$.

La función h es de clase C^1 en el conjunto abierto $D = \mathbb{R}^2$. Para encontrar los puntos críticos, tenemos que resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= 4x + 8 = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= 2y - 6 = 0 \end{aligned} \right\}$$

que tiene como única solución el punto $(-2, 3)$.

Ejemplo 3.4.

Calculad los puntos críticos de la función $f(x, y, z) = x^2(y - 1)^2(z + \frac{1}{2})^2$.

El dominio de la función h está compuesto por todos los puntos del espacio, es decir, es el conjunto abierto $D = \mathbb{R}^3$ y la función es de clase C^1 en su dominio. Si queremos encontrar los puntos críticos, tendremos que igualar las tres derivadas parciales a cero y resolver el sistema que resulte.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x(y - 1)^2(z + \frac{1}{2})^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^2(y - 1)(z + \frac{1}{2})^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2x^2(y - 1)^2(z + \frac{1}{2}) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Las soluciones del sistema son de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} (0, y, z) &\quad \text{con } y, z \in \mathbb{R}, \\ (x, 1, z) &\quad \text{con } x, z \in \mathbb{R}, \\ (x, y, -\frac{1}{2}) &\quad \text{con } x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso tenemos infinitos puntos críticos.

Ejemplo 3.5.

Calculad los puntos críticos de la función $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Se trata de una función polinómica que tiene por dominio todos los puntos del espacio, es decir, es el conjunto abierto $D = \mathbb{R}^3$ y la función es de clase C^1 en su dominio. Para encontrar los puntos críticos, tendremos que igualar las tres derivadas parciales a cero y resolver el sistema resultante.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y - x = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 2z - 2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

La única solución del sistema y, por tanto, el único punto crítico de la función, es $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$.

El objetivo de este apartado es encontrar los extremos locales de una función. Ahora ya sabemos que éstos tienen que ser puntos críticos de la función y que no nos proporcionan un extremo local, tal como sucedía con $(0, 0)$ para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Observad que el punto $(-2, 3)$ del ejemplo 3.3 se corresponde con un mínimo local, ya que si completamos cuadrados podemos escribir:

$$h(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 15 = 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 2$$

y, por tanto, $h(x, y) > -2$ para todo $(x, y) \neq (-2, 3)$; en el mínimo $(-2, 3)$ se alcanza un valor $h(-2, 3) = -2$. Del mismo modo, todos los puntos críticos de la función f del ejemplo 3.4 corresponden a mínimos locales, ya que $f(x, y, z) \geq 0 \forall (x, y, z)$ y $f(x, y, z) = 0$ si, y sólo si (x, y, z) es un punto crítico.

En el caso de estos dos ejemplos, no hemos encontrado grandes dificultades a la hora de determinar los extremos locales. Ahora bien, en funciones más

Observad...

$(-2, 3)$ es un mínimo local estricto, ya que $h(x, y) > -2$ en un entorno de $(-2, 3)$ que no lo contenga.

$(-2, 3)$ es también un mínimo absoluto, puesto que $h(x, y) \geq -2$.

complicadas, los argumentos algebraicos no son tan útiles, por lo que se hace necesario un criterio analítico que depende de las derivadas segundas. En cuanto al caso especial de una variable, el criterio que se expone a continuación se ve reducido a la conocida condición de que $f''(a) > 0$ si a es un mínimo local y $f''(a) < 0$ si a es máximo local.

Criterio de derivadas parciales segundas

Sea f una función de clase \mathcal{C}^2 en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ que contenga el punto crítico (a, b) y sean $d_1 = f_{xx}(a, b)$ y d_2 los determinantes de la matriz hessiana evaluada en (a, b) . Entonces:

- 1) Si $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$, se deduce que (a, b) es un mínimo local.
- 2) Si $d_1 < 0$ y $d_2 > 0$, se deduce que (a, b) es un máximo local.
- 3) Si $d_2 < 0$, se deduce que (a, b) es un punto de silla.
- 4) Si $d_2 = 0$, el criterio no es decisivo.

Observad que si $d_2 > 0$, entonces $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ deben tener el mismo signo. Esto quiere decir que se puede sustituir $f_{xx}(a, b)$ por $f_{yy}(a, b)$ en los dos primeros apartados del criterio.

Ejemplo 3.6.

Estudiemos los extremos de la función $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$. En el ejemplo 3.1 hemos encontrado estos puntos críticos: $(0, 0)$ y $(2, 2)$. Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -6, \quad f_{yy} = 6y.$$

A continuación evaluaremos la matriz hessiana en cada punto:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{xy}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

puesto que $d_2 = -36 < 0$, deducimos que $(0, 0)$ es un punto de silla.

$$H(2, 2) = \begin{pmatrix} f_{xx}(2, 2) & f_{xy}(2, 2) \\ f_{xy}(2, 2) & f_{yy}(2, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos $d_1 = f_{xx}(2, 2) = 12 > 0$ y $d_2 = 144 - 36 = 108 > 0$; por tanto, el punto $(2, 2)$ es un mínimo local.

Ejemplo 3.7.

Estudiemos los extremos de la función $g(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$. En el ejemplo 3.2 hemos encontrado un único punto crítico, el punto $(\frac{1}{2}, 4)$. Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$g_{xx} = \frac{2}{x^3}, \quad g_{xy} = 1, \quad g_{yy} = \frac{16}{y^3}.$$

A continuación evaluaremos la matriz hessiana en el punto $(\frac{1}{2}, 4)$.

$$H\left(\frac{1}{2}, 4\right) = \begin{pmatrix} g_{xx}(\frac{1}{2}, 4) & g_{xy}(\frac{1}{2}, 4) \\ g_{yx}(\frac{1}{2}, 4) & g_{yy}(\frac{1}{2}, 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Puesto que $d_2 = 3 > 0$ y $d_1 = 16 > 0$, llegamos a la conclusión de que $(\frac{1}{2}, 4)$ es un mínimo local de la función g en su dominio.

El criterio de las derivadas parciales segundas para determinar extremos locales falla si:

$$d_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = 0.$$

En estos casos tenemos que confiar en un gráfico efectuado mediante algún programa o utilizar algún criterio algebraico como los empleados en los ejemplos 3.3 y 3.4. La extensión del criterio, de dos a más variables, que nos indica que todo extremo local es un punto crítico, está clara. Ahora bien, la extensión del criterio de las derivadas parciales de segundo orden a tres variables no es tan directa. A continuación enunciamos el resultado para funciones de tres variables.

Criterio de las derivadas parciales segundas ($n = 3$)

Sea f una función de clase \mathcal{C}^2 en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^3$ que contenga el punto crítico (a, b, c) y sean:

$$d_1 = f_{xx}(a, b, c), \quad d_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b, c) & f_{xy}(a, b, c) \\ f_{yx}(a, b, c) & f_{yy}(a, b, c) \end{vmatrix},$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b, c) & f_{xy}(a, b, c) & f_{xz}(a, b, c) \\ f_{yx}(a, b, c) & f_{yy}(a, b, c) & f_{yz}(a, b, c) \\ f_{zx}(a, b, c) & f_{zy}(a, b, c) & f_{zz}(a, b, c) \end{vmatrix}.$$

Entonces:

- 1) Si $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ y $d_3 > 0$, se deduce que (a, b, c) es un mínimo local.
- 2) Si $d_1 < 0$, $d_2 > 0$ y $d_3 < 0$, se deduce que (a, b, c) es un máximo local.
- 3) Si $d_i = 0$, para algún $i = 1, 2, 3$, el criterio no es decisivo.
- 4) Si $d_i \neq 0$, para todo $i = 1, 2, 3$ y no se verifica 1) o 2), se deduce que (a, b, c) es un punto de silla.

Ejemplo 3.8.

Estudiemos los extremos de $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$, función que se introdujo en el ejemplo 3.5. Hemos encontrado un punto crítico, el punto $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$. Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$\begin{aligned} g_{xx} &= g_{yy} = g_{zz} = 2 \\ g_{xz} &= g_{yz} = 0 \\ g_{xy} &= -1 \end{aligned}$$

La matriz hessiana en $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ es:

$$H\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ya que $d_1 = 2 > 0$, $d_2 = 3 > 0$ y $d_3 = 6 > 0$, resulta que $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ es un mínimo local.

Ejercicios

3.1. Calculad el paralelepípedo de mayor volumen contenido en el primer cuadrante con un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en el plano $x + y + z = 1$.

3.2. Encontrad el punto $M(x, y)$ tal que la suma de los cuadrados de las distancias a las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ sea mínima.

3.3. Encontrad los puntos críticos de la función $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy$ y determinad si son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

3.4. Determinad los puntos críticos de la función $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - xy - x$ y determinad si son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

3.5. Encontrad y analizad los puntos críticos de la función $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}x^4 - y^2$.

3.6. Encontrad y analizad los puntos críticos de la función $f(x, y) = 2xy + \frac{1}{2}x^4 + y^2$.

3.7. Sea $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}x^2y^2$. Encontrad y analizad los puntos críticos. Discutid su carácter global.

3.2. Extremos absolutos sobre conjuntos compactos

En este apartado nos planteamos determinar los extremos absolutos de una función continua definida en un conjunto compacto (conjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^n). Empezaremos por presentar la definición de extremo absoluto.

Sea f una función definida en un conjunto D que contiene el punto (a, b) .

1) (a, b) es un **mínimo absoluto** de f si $f(x, y) \geq f(a, b) \forall (x, y) \in D$.

2) (a, b) es un **máximo absoluto** de f si $f(x, y) \leq f(a, b) \forall (x, y) \in D$.

3) (a, b) es un **extremo absoluto** de f si es un mínimo absoluto o un máximo absoluto.

En el apartado anterior hemos visto, mediante diferentes ejemplos, que una función puede tener o no máximos o mínimos locales en un conjunto abierto. Si la función es continua y se define en un conjunto compacto, se puede asegurar la existencia de, como mínimo, un mínimo absoluto y un máximo absoluto. Este importante resultado (teorema de Weierstrass) ya había sido enunciado en el módulo “Profundización en las técnicas del cálculo”, y a continuación lo repasaremos.

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto; en tal caso, existen por lo menos $a \in D$ y $b \in D$ tales que $m = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = M$, donde m y M son respectivamente el **valor mínimo** y el **valor máximo** de la función en D .

A partir de ahora nos centraremos en \mathbb{R}^2 y, por tanto, en funciones de dos variables. Para que D sea cerrado, lo podemos escribir $D = U \cup \partial U$, donde U es el conjunto abierto mayor contenido en D y ∂U (que es $D - U$) se denomina la **frontera** de D (es decir, los puntos que delimitan la región D). Supondremos que ∂U es una unión finita de trayectorias, cada una de las cuales se puede escribir $y = g(x)$ o bien $x = h(y)$, donde h y g son funciones de una variable. Algunos ejemplos de regiones que se pueden describir de esta forma son:

1) El disco centrado en el origen de coordenadas y de radio 1:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

En este caso, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Ahora podemos descomponer ∂U de muchas maneras, como por ejemplo:

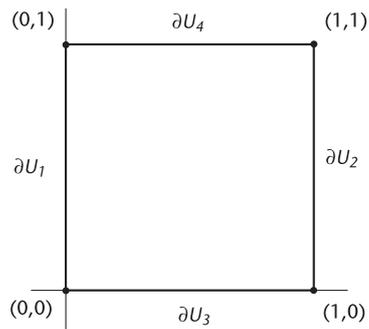
$$\begin{aligned} \partial U_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1\} \\ \partial U_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

2) Cuadrado de lado 1 y con centro en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

En este caso, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Las cuatro trayectorias más naturales que se deben considerar son las cuatro aristas:

$$\begin{aligned} \partial U_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}, \\ \partial U_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, 0 \leq y \leq 1\}, \\ \partial U_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \leq x \leq 1\}, \\ \partial U_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1, 0 \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$



Si el máximo absoluto o el mínimo absoluto se alcanzan en el conjunto abierto U , entonces éstos tendrán que ser, en particular, puntos críticos; en concreto:

Sea D definido según la descripción anterior, con $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua, y sea f de clase \mathcal{C}^1 en U . Si f alcanza su valor máximo (o mínimo) en un punto (a, b) de U , entonces (a, b) es un punto crítico de f .

En general, para encontrar los máximos y los mínimos absolutos en una función de clase \mathcal{C}^1 , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, utilizaremos un procedimiento parecido al cálculo de una variable:

- 1) Encontrar los puntos críticos de f en U .
- 2) Encontrar los puntos críticos de f , considerada como una función definida sólo en ∂U .
- 3) Calcular el valor de f en todos los puntos críticos que se hayan encontrado en los pasos 1) y 2).
- 4) Comparar estos valores y seleccionar el mayor y el menor.

A excepción del paso 2), ya conocemos el resto de los pasos. Es necesario apuntar que cuando se lleva a cabo el paso 2), hay que restringirse a cada una de las trayectorias consideradas y sustituir $y = g(x)$ en la función $f(x, y)$, o bien $x = h(y)$ en la función $f(x, y)$, dependiendo del caso. En cada restricción obtendremos candidatos que deberemos tener en cuenta para la realización de los pasos 3) y 4). Los puntos que delimitan las

trayectorias consideradas no se tendrán en cuenta en el paso 2) y se les aplicarán directamente los pasos siguientes. Éste es el caso de los puntos (1, 0) y (-1, 0) para el ejemplo 1) y (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) para el 2).

Para finalizar, hay que tener en cuenta que si la función continua f no es de clase C^1 en un número finito de puntos, entonces tendremos que aplicar en estos puntos los pasos 3) y 4) directamente.

Ejemplo 3.9.

Determinad los máximos y los mínimos absolutos de la función $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27$ en el cuadrado de lado 10 centrado en el origen de coordenadas.

El conjunto de la función es compacto y la función es continua; así pues, podemos asegurar la existencia de, como mínimo, un máximo absoluto y un mínimo absoluto. La función es de clase C^2 en el conjunto considerado. Empezaremos por estudiar los puntos interiores, es decir, los puntos de $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -5 < x < 5, -5 < y < 5\}$. Comprobad que se obtienen los puntos críticos (0, 0) y (-3, -3) y observad que $f(0, 0) = 27$ y que $f(-3, -3) = 54$.

A partir de ahora nos restringiremos a la frontera:

1) Segmento $x = 5, -5 \leq y \leq 5$.

Tomamos en consideración la restricción de la función en este tramo, $f(5, y) = 152 + 45y + y^3$. Tras observar que $f'(5, y) = 3y^2 + 45 > 0$, deducimos que la función es estrictamente creciente sobre el segmento y , por tanto, no hay ningún extremo en $-5 < y < 5$.

2) Segmento $y = 5, -5 \leq x \leq 5$.

Si observamos que la función f es simétrica con respecto al cambio x por y , es decir, $f(x, y) = f(y, x)$, obtendremos el mismo resultado que en el caso anterior.

3) Segmento $y = -5, -5 \leq x \leq 5$.

En este caso, $f(x, -5) = x^3 - 45x - 98$. A partir de $f'(x, -5) = 3x^2 - 45 = 0$ obtenemos $x = \sqrt{15}$ y $x = -\sqrt{15}$. Por tanto, resultan $(\sqrt{15}, -5)$ y $(-\sqrt{15}, -5)$. Si evaluamos f en estos dos puntos tenemos $f(\sqrt{15}, -5) = -98 - 30\sqrt{15}$ y $f(-\sqrt{15}, -5) = -98 + 30\sqrt{15}$.

4) Segmento $x = -5, -5 \leq y \leq 5$.

Observando que la función f es simétrica con respecto a $x = y$, es decir, $f(x, y) = f(y, x)$, obtendremos los puntos $(-5, \sqrt{15})$ y $(-5, -\sqrt{15})$. Observamos que $f(-5, \sqrt{15}) = -98 - 30\sqrt{15}$ y $f(-5, -\sqrt{15}) = -98 + 30\sqrt{15}$.

Por último, evaluamos la función en los vértices:

$$f(5, 5) = 502, f(-5, -5) = 2, f(5, -5) = f(-5, 5) = -198.$$

Resumiendo: la función f tiene un máximo absoluto en (5, 5), que toma el valor 502, y tiene dos mínimos absolutos en $(\sqrt{15}, -5)$ y $(-5, \sqrt{15})$, donde f toma el valor $-98 - 30\sqrt{15}$.

La siguiente tabla aclara los resultados encontrados.

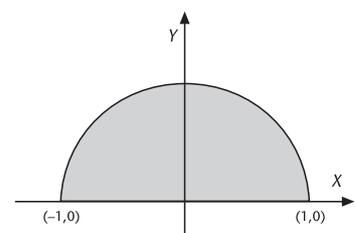
Posibles extremos absolutos	(0, 0) (-3, -3) $(\sqrt{15}, -5)$ $(-\sqrt{15}, -5)$ $(-\sqrt{15}, 5)$ $(5, -\sqrt{15})$ (5, 5) (-5, -5) (5, -5) (-5, 5)
Valor de la función f	27 54 $-98 - 30\sqrt{15}$ $-98 + 30\sqrt{15}$ $-98 - 30\sqrt{15}$ $-98 + 30\sqrt{15}$ 502 2 -198 -198

Ejemplo 3.10.

Encontrad los máximos y los mínimos absolutos de la función $g(x, y) = x + y$ en la región:

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

El conjunto de la función es compacto y la función es continua; por lo tanto, podemos asegurar la existencia de, como mínimo, un máximo absoluto y un mínimo absoluto. La función es de clase C^2 en el conjunto considerado.



Calculamos los puntos críticos de g en U :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 1 = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

No obtenemos ninguna solución a partir del sistema. Ahora vamos a restringirnos a la frontera:

a) $\{(x, y) : y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$

$g(x, 0) = x$. Puesto que $g'(x, 0) = 1 > 0$, la función no alcanza ningún extremo en $-1 < x < 1$.

b) $\{(x, y) : y = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$

$g(x, \sqrt{1-x^2}) = x + \sqrt{1-x^2}$. Calculando la derivada de la función resulta $g'(x, \sqrt{1-x^2}) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; e igualando a cero la derivada primera, resulta: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ahora evaluamos la función en este punto: $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Finalmente, evaluamos la función en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$: $g(1, 0) = 1$ y $g(-1, 0) = -1$.

Resumiendo: el máximo absoluto es $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, y la función g toma en éste el valor $\sqrt{2}$; el mínimo absoluto es $(-1, 0)$, donde la función g alcanza el valor -1 .

La siguiente tabla aclara los resultados que se han encontrado:

Posibles extremos absolutos	Valor de la función f
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\sqrt{2}$
$(1, 0)$	1
$(-1, 0)$	-1

3.3. El método de los multiplicadores de Lagrange

A menudo, la descomposición que se lleva a cabo en el paso 2) del procedimiento descrito anteriormente es larga (hay que descomponer la región en bastantes subregiones o porciones) y, en algunas ocasiones, la función restringida que obtenemos en cada una de éstas no es fácil de analizar. El método de los multiplicadores de Lagrange permite resolver problemas de optimización con restricciones. El problema consiste en maximizar $f(x, y)$ entre los (x, y) que satisfacen una restricción del tipo $g(x, y) = c$. La idea surge del hecho de que en el punto donde se alcanza el extremo de la función f restringida en $g(x, y) = c$, los vectores gradientes ∇f y ∇g deben ser paralelos. Concretamente:

Sean f y g dos funciones de clase C^1 ; f tiene un extremo en el punto (a, b) de la curva de nivel $g(x, y) = c$. Si $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$, entonces existe un número real λ tal que:

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b).$$

Una forma sistemática de obtener estos puntos críticos es aplicando el resultado siguiente:

Sean f y g dos funciones de clase C^1 ; f tiene un máximo o mínimo local restringido en $g(x, y) - c = 0$; entonces, este extremo se alcanzará en uno de los puntos críticos de la función L definida por:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c).$$

Ejemplo 3.11.

Encontrad los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre $x^2 + y^2 \leq 1$. Se trata de una función de clase C^1 definida en un conjunto compacto. La función f tendrá en este conjunto extremos absolutos. Empezamos por los puntos interiores:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Este sistema tiene como única solución el punto $(0, 0)$. A continuación evaluamos la matriz hessiana en este punto:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{xy}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Debido a que $d_2 = -4 < 0$, se deduce que $(0, 0)$ es un punto de silla y, en consecuencia, no es necesario que lo tengamos en cuenta.

Ahora nos restringiremos a la frontera:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Consideramos la función lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

A continuación, buscamos los puntos críticos de L :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2\lambda x &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2y - 2\lambda y &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo este sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda x = 0 &\Rightarrow 2x(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ o } x = 0 \\ -2y - 2\lambda y = 0 &\Rightarrow -2y(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ o } y = 0 \end{aligned}$$

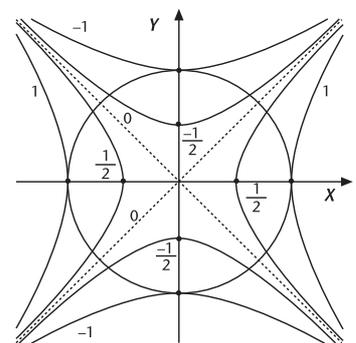
Si $\lambda = 1, y = 0$ y sustituyendo en la tercera resulta $x = 1$ o $x = -1$. Si $\lambda = -1, x = 0$ y sustituyendo en la tercera resulta $y = 1$ o $y = -1$. Observad que el caso $x = 0$ e $y = 0$ no satisface la última ecuación. Por lo tanto, tenemos cuatro puntos críticos:

$$(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1).$$

Para los dos primeros, la función f alcanza un valor máximo igual a 1, mientras que en los otros dos, la función alcanza un valor mínimo igual a -1.

Ejercicio

3.8. Determinad los extremos de la función $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ en el recinto cerrado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.



Curvas de nivel de $f(x, y)$. Los máximos se alcanzan en $(\pm 1, 0)$ y los mínimos, en $(0, \pm 1)$.

Observad

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 0) &= \nabla g(1, 0) = (2, 0) \\ \nabla f(-1, 0) &= \nabla g(-1, 0) = (-2, 0) \\ \nabla f(0, 1) &= -\nabla g(0, 1) = (0, -2) \\ \nabla f(0, -1) &= -\nabla g(0, -1) = (0, 2) \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos anteriormente se pueden generalizar para funciones de tres variables.

Sean f y g dos funciones de clase \mathcal{C}^1 ; f tiene un extremo en el punto (a, b, c) de la superficie de nivel $g(x, y, z) = c$. Si $\nabla g(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, entonces existe un número real λ tal que:

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c).$$

Una manera sistemática de obtener estos puntos críticos es mediante la aplicación del resultado que vemos a continuación:

Sean f y g dos funciones de clase \mathcal{C}^1 ; f tiene un máximo o mínimo local restringido en $g(x, y, z) - c = 0$; en tal caso, este extremo se alcanzará en uno de los puntos críticos de la función L definida por:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda(g(x, y, z) - c).$$

En funciones de tres variables, nos podemos restringir a curvas que vienen dadas por la intersección de dos superficies. En este caso, tenemos:

Sean f , g_1 y g_2 tres funciones de clase \mathcal{C}^1 ; f tiene un extremo en el punto (a, b, c) de la curva $g_1(x, y, z) = c_1$, $g_2(x, y, z) = c_2$. Si $\nabla g_1(a, b, c)$ y $\nabla g_2(a, b, c)$ son linealmente independientes, entonces existen dos números reales λ , μ tales que:

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g_1(a, b, c) + \mu \nabla g_2(a, b, c).$$

Una manera sistemática de obtener estos puntos críticos es mediante la aplicación del siguiente resultado:

Sean f , g_1 y g_2 funciones de clase \mathcal{C}^1 ; f tiene un máximo o un mínimo local restringido en $g_1(x, y, z) - c_1 = 0$, $g_2(x, y, z) - c_2 = 0$; por lo tanto, este extremo se alcanzará en uno de los puntos críticos de la función L definida por:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda(g_1(x, y, z) - c_1) - \mu(g_2(x, y, z) - c_2).$$

Ejemplo 3.12.

Sea $f(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura de una placa metálica sobre cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ y sobre cada punto del plano $x + y + z = 3$. Consideramos la temperatura únicamente en la intersección de la esfera y del plano, es decir, sobre la circunferencia resultante. Se requiere que obtengamos las temperaturas extremas y que indiquemos entre qué valores oscila la temperatura sobre la circunferencia.

Consideramos las restricciones:

$$\begin{aligned}g_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 11 = 0 \\g_2(x, y, z) &= x + y + z - 3 = 0\end{aligned}$$

Introducimos la función L :

$$\begin{aligned}L(x, y, z, \lambda, \mu) &= f(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z) = \\&= 20 + 2x + 2y + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 11) - \mu(x + y + z - 3).\end{aligned}$$

Tras calcular las cinco derivadas parciales tenemos:

$$\left. \begin{aligned}L_x(x, y, z, \lambda, \mu) &= 2 - 2x\lambda - \mu = 0 \\L_y(x, y, z, \lambda, \mu) &= 2 - 2y\lambda - \mu = 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda(x - y) = 0$$

$$\begin{aligned}L_z(x, y, z, \lambda, \mu) &= 2z - 2z\lambda - \mu = 0 \Rightarrow 2z(1 - \lambda) - \mu = 0 \\L_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) &= -x^2 - y^2 - z^2 + 11 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 11 \\L_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) &= -x - y - z + 3 = 0 \Rightarrow x + y + z = 3\end{aligned}$$

De la primera implicación obtenida, restando las dos primeras ecuaciones, obtenemos que $\lambda = 0$ o $x = y$. Consideramos en primer lugar el caso $\lambda = 0$; de cualquiera de las dos primeras ecuaciones tenemos $\mu = 2$, que sustituido en la ecuación $2z(1 - \lambda) - \mu = 0$ nos da $z = 1$. Las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ y $x + y + z = 3$ son ahora:

$$x^2 + y^2 = 10 \quad \text{y} \quad x + y = 2.$$

Una vez hemos resuelto este último sistema nos queda: $x = 3$ y $x = -1$. Los correspondientes valores de y son $y = -1$ e $y = 3$, respectivamente. Por tanto, si $\lambda = 0$, los puntos críticos son $(3, -1, 1)$ y $(-1, 3, 1)$.

Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = y$ se convierte en:

$$2x^2 + z^2 = 11, \quad 2x + z = 3$$

y por sustitución resulta:

$$x = \frac{(3 + 2\sqrt{3})}{3} \quad \text{y} \quad x = \frac{(3 - 2\sqrt{3})}{3}.$$

Los valores correspondientes de z son, respectivamente:

$$z = \frac{(3 - 4\sqrt{3})}{3} \quad \text{y} \quad z = \frac{(3 + 4\sqrt{3})}{3}.$$

Por tanto, hemos obtenido un total de cuatro puntos críticos. Finalmente, evaluemos la temperatura en cada uno de ellos para poder determinar los puntos extremos absolutos:

$$\begin{aligned}f(3, -1, 1) &= f(-1, 3, 1) = 25 \\f\left(\frac{(3 - 2\sqrt{3})}{3}, \frac{(3 - 2\sqrt{3})}{3}, \frac{(3 + 4\sqrt{3})}{3}\right) &= \frac{91}{3} \\f\left(\frac{(3 + 2\sqrt{3})}{3}, \frac{(3 + 2\sqrt{3})}{3}, \frac{(3 - 4\sqrt{3})}{3}\right) &= \frac{91}{3}\end{aligned}$$

Así pues, los dos primeros puntos corresponden a mínimos absolutos, mientras que los dos últimos son máximos absolutos, y la temperatura de la circunferencia oscila entre 25 y $\frac{91}{3}$.

Observación

En este subapartado nos hemos concentrado en encontrar extremos absolutos sobre curvas de nivel o superficies de nivel que siempre son conjuntos cerrados, aunque no siempre están acotados. En este texto nos limitaremos únicamente al caso en que las regiones también están acotadas.

3.4. Solucionario

3.1. El paralelepípedo tiene un vértice en $(0, 0, 0)$ y el vértice opuesto en (x, y, z) con $x > 0, y > 0, z > 0$. El volumen de este paralelepípedo es $V(x, y, z) = xyz$. Se trata de encontrar el punto (x, y, z) que hace que la función V sea máxima. Si imponemos la restricción $z = 1 - x - y$, tenemos que calcular los extremos de la función de clase \mathcal{C}^2 : $V(x, y) = xy(1 - x - y)$ en el conjunto abierto $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$. Obtendremos los puntos críticos de la función resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= y(1 - 2x - y) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= x(1 - x - 2y) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Puesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, nos podemos limitar a resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 1 - 2x - y &= 0 \\ 1 - x - 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que tiene la única solución $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Para saber si se trata de un máximo o de un mínimo, calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$V_{xx} = -2y, \quad V_{yy} = -2x, \quad V_{xy} = 1 - 2x - 2y$$

$$H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

de donde $d_1 = -\frac{2}{3} < 0, d_2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es un máximo local. Por lo tanto, las dimensiones que maximizan el paralelepípedo son $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Fijaos en que el problema no tiene mínimo en D , ya que podemos hacer que cualquiera de las tres dimensiones $x, y, o z$ tienda a cero, y el volumen puede ser tan cercano a cero como queramos.

3.2. La distancia de $M(x, y)$ a la recta $x = 0$ es $|y|$, la distancia de $M(x, y)$ a la recta $y = 0$ es $|x|$, y la distancia de $M(x, y)$ a la recta $x - y + 1 = 0$ es $\left(\frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}\right)$.

La función que queremos minimizar en el conjunto abierto $D = \mathbb{R}^2$ es:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{(x - y + 1)^2}{2}$$

El sistema que permite obtener los puntos críticos es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + (x - y + 1) = 3x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y + (x - y + 1)(-1) = -x + 3y - 1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

El único punto crítico es $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$f_{xx} = 3, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = 3,$$

de donde resulta $d_1 = 3 > 0$ y $d_2 = 9 - 1 = 8 > 0$. Por tanto, $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ se trata de un mínimo local.

3.3. Encontramos los puntos críticos mediante la igualación de las derivadas parciales a cero:

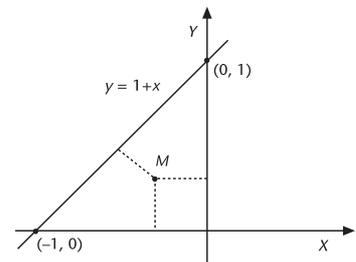
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^2 + 2x - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y - x = 0 \end{aligned} \right\}$$

A partir de la segunda ecuación, tenemos que $y = x$, y sustituyendo en la primera nos encontramos con que las soluciones son $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) = (-1, -1)$. La matriz hessiana es:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si sustituimos $(x, y) = (0, 0)$, tenemos que:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Recordad

La distancia de un punto $M = (a, b)$ a una recta $r: Ax + By + C = 0$ es $\frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Debido a que $d_1 = 2 > 0$ y $d_2 = 1 > 0$, deducimos que $(0, 0)$ es un mínimo local de f .

Si sustituimos $(x, y) = (-1, -1)$, tenemos que:

$$H(-1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que $d_2 < 0$, deducimos que $(-1, -1)$ es un punto de silla de f .

3.4. Hallamos los puntos críticos igualando las derivadas parciales a cero:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^2 - x - y - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -y - x = 0 \end{aligned} \right\}$$

A partir de la segunda ecuación tenemos que $y = -x$, y sustituyendo en la primera encontramos que las soluciones son $(x, y) = (1, -1)$ y $(x, y) = (-1, 1)$. La matriz hessiana es:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo $(x, y) = (1, -1)$, tenemos que:

$$H(1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Puesto que $d_1 = 1 > 0$ y $d_2 = -2 < 0$, deducimos que $(1, -1)$ es un punto de silla de f .

Si sustituimos $(x, y) = (-1, 1)$, tendremos que:

$$H(-1, 1) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Puesto que $d_1 = -3 < 0$ y $d_2 = 2 > 0$, deducimos que $(-1, 1)$ es un máximo local de f .

3.5. Encontramos los puntos críticos igualando las derivadas parciales a cero:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2y - 2x^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x - 2y = 0 \end{aligned} \right\}$$

A partir de la segunda ecuación tenemos que $y = x$ y, sustituyendo en la primera, encontramos que las soluciones son $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (1, 1)$ y $(x, y) = (-1, -1)$. La matriz hessiana es:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -6x^2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Tras sustituir $(x, y) = (0, 0)$, tenemos que:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Puesto que $d_2 < 0$, deducimos que $(0, 0)$ es un punto de silla de f .

Si realizamos la sustitución de los otros valores de (x, y) , tenemos que:

$$H(1, 1) = H(-1, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Puesto que $d_1 < 0$ y $d_2 > 0$, deducimos que $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ son máximos locales de f .

3.6. Encontramos los puntos críticos mediante la igualación de las derivadas parciales a cero:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2y + 2x^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x + 2y = 0 \end{aligned} \right\}$$

A partir de la segunda ecuación tenemos que $y = -x$ y, tras sustituir en la primera, encontramos que las soluciones son $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (1, -1)$ y $(x, y) = (-1, 1)$. La matriz hessiana es:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x^2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo $(x, y) = (0, 0)$, tenemos que:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Puesto que $d_2 < 0$, deducimos que $(0, 0)$ es un punto de silla de f .

Si sustituimos los otros valores de (x, y) , tenemos que:

$$H(1, -1) = H(-1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Debido a que $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$, deducimos que $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ son mínimos locales de f .

3.7. Encontramos los puntos críticos igualando las derivadas parciales a cero:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^3 + xy^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y^3 + x^2y = 0 \end{aligned} \right\}$$

La única solución es $(x, y) = (0, 0)$. La matriz hessiana es:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & 3y^2 + x^2 \end{pmatrix}$$

Cuando sustituimos $(x, y) = (0, 0)$, tenemos que:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El criterio local no es decisivo.

Ahora bien, cualquiera que sea (x, y) , podemos ver que $f(x, y) \geq 0$ y $f(x, y) = 0$ si, y sólo si, $(x, y) = (0, 0)$. Por lo tanto, $(0, 0)$ es un mínimo global de f .

3.8. Tenemos que buscar los extremos $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$ sobre $x^2 + y^2 \leq 4$. Se trata de una función de clase C^1 definida en un conjunto compacto. Gracias al teorema de Weierstrass, podemos asegurar que f tendrá en este conjunto extremos absolutos. Empezamos por los puntos interiores, es decir, extremos de f sobre el conjunto $x^2 + y^2 < 4$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned} \right\}$$

Ahora nos restringiremos a la frontera $x^2 + y^2 = 4$.

Consideramos la función lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

A continuación buscamos los puntos críticos de L :

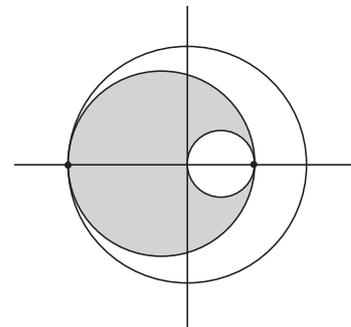
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2(x-1) - \lambda(2x) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - \lambda(2y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

A partir de la segunda ecuación resulta $\lambda = 1$ o bien $y = 0$. Si $y = 0$, de la tercera ecuación resulta $(x, y) = (2, 0)$ (que corresponde a $\lambda = \frac{1}{2}$) y $(x, y) = (-2, 0)$ (que corresponde a $\lambda = \frac{3}{2}$). Si $\lambda = 1$, en la primera ecuación resulta la incompatibilidad $-2 = 0$; por tanto, no obtenemos ningún punto crítico.

Evaluando la función en todos los posibles extremos globales tenemos:

$$f(1, 0) = 0, f(2, 0) = 1 \text{ y } f(-2, 0) = 9.$$

Así pues, se deduce que en $(1, 0)$ tenemos el mínimo absoluto y en $(-2, 0)$ el máximo absoluto. Observamos que en estos puntos se alcanzan respectivamente los valores 0 y 9.



Curvas de nivel de $f(x, y)$ tangentes a $x^2 + y^2 = 4$. El máximo se alcanza en $(-2, 0)$. El mínimo en $(1, 0)$.

Observad

$$\begin{aligned} \nabla f(-2, 0) &= (-6, 0) \\ \nabla g(-2, 0) &= (-4, 0) \\ \nabla f(2, 0) &= (2, 0) \\ \nabla g(2, 0) &= (4, 0) \end{aligned}$$

donde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, así pues $\nabla f(-2, 0)$ y $\nabla g(-2, 0)$ son linealmente dependientes así como $\nabla f(2, 0)$ y $\nabla g(2, 0)$.

Ejercicios de autoevaluación

- Dada la función $f(x, y) = xy$, ¿qué representa la curva de la ecuación $xy = 9$?
 - Los puntos que se encuentran a una misma altura igual a 9.
 - Los puntos que definen los máximos de la función.
 - Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.
- ¿Cómo se definiría la restricción de una función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) siguiendo la dirección del vector (v, w) ?
 - $(x_0, y_0) + f(v, w)$.
 - $f((x_0, y_0) + t(v, w))$.
 - $f(x_0, y_0) + f(tv + tw)$.
- La restricción de la función $f(x, y) = xy$ en el punto $(2, 3)$ y siguiendo la dirección $(1, 0)$ es:
 - $3(2 + t)$.
 - $2(3 + t)$.
 - $t^2 + 2t - 3$.
- Las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^{y^2}$ son:
 - $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^2} 2y \ln y^2$.
 - $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^2} 2y \ln x$.
 - $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1} 2y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^2} 2y \ln x$.
- Si existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y) = 3$, entonces...
 - el $\lim_{x \rightarrow 1} (\lim_{y \rightarrow 2} f(x, y)) = 3$.
 - el $\lim_{y \rightarrow 2} (\lim_{x \rightarrow 1} f(x, y))$ no tiene que valer necesariamente 3.
 - Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.
- El dominio de la función $z = \ln(xy + 1)$ es...
 - $\text{Dom } z = \{(x, y) : xy \geq -1\}$.
 - $\text{Dom } z = \{(x, y) : xy > -1\}$.
 - $\text{Dom } z = \{(x, y) : x > 0 \text{ y } y > 0\}$.
- El conjunto determinado por los puntos (x, y) , donde $x^2 + y^2 < 1$, es...
 - compacto.
 - acotado pero no cerrado.
 - cerrado.
- La intersección de dos conjuntos cerrados siempre es un conjunto cerrado. Si S es cerrado y T es compacto, entonces podemos asegurar que...
 - $S \cap T$ es compacto.
 - $S \cup T$ es compacto.
 - Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.
- El vector gradiente de $f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$ en el punto $(0, 1)$ es...
 - $(1, 0)$.
 - $(1, 1)$.
 - $(0, 0)$.
- La aproximación lineal a la función $e^{x^2+y^2}$ es:
 - $2e^{x^2+y^2} (x \Delta x + y \Delta y)$.
 - $2e^{x^2+y^2} (\Delta x + \Delta y)$.
 - $2xe^{x^2} \Delta x + 2ye^{y^2} \Delta y$.
- La ecuación $u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface la ecuación...
 - $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
 - $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
 - $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1$.

12. Si $f(x, y)$ es una función diferenciable que cumple $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t real y $n \geq 1$, se verifica...

- a) $x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$.
- b) $x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = n$.
- c) $x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = n f(x, y)$.

13. El plano tangente y la recta normal en la superficie $x^2 + xy^2 + z = 26$ en $(2, -3, 4)$ son, respectivamente...

- a) $13(x - 2) - 12(y + 3) + (z - 4) = 0$ y $\frac{x-2}{13} = \frac{y+3}{-12} = \frac{z-4}{1}$.
- b) $13(x - 2) - 6(y + 3) + (z - 4) = 0$ y $\frac{x-2}{13} = \frac{y+3}{-12} = \frac{z-4}{1}$.
- c) $13(x - 2) - 12(y + 3) + (z - 4) = 0$ y $\frac{x-2}{13} = \frac{y+3}{-12} = \frac{z-4}{2}$.

14. La función $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$ tiene...

- a) un mínimo local en $(2, 2)$ y un punto de silla en $(0, 0)$.
- b) un máximo local en $(2, 2)$ y un punto de silla en $(0, 0)$.
- c) un punto de silla en $(2, 2)$ y un máximo local en $(0, 0)$.

15. La función $h(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab + a - 2c$ tiene...

- a) un mínimo local en $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.
- b) un máximo local en $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.
- c) un punto de silla en $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.

16. El punto del plano $M = (x, y)$ que hace que la suma de los cuadrados de las distancias en las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ sea mínima es...

- a) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.
- b) $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.
- c) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

17. La temperatura en un punto (x, y, z) del espacio viene dada por $T(x, y, z) = 2x - 2y + z^2$. Los puntos del cono $z^2 - x^2 - y^2 = 0$, que se encuentran sometidos a una menor temperatura son:

- a) $(-1, 1, \sqrt{2})$ y $(0, 0, 0)$.
- b) $(-1, 1, -\sqrt{2})$ y $(-1, 1, \sqrt{2})$.
- c) No hay puntos que alcancen ningún valor mínimo.

18. La función $z = x^2 - y^2$ sobre $x^2 + y^2 = 1$ tiene:

- a) mínimos absolutos en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, y máximos absolutos en $(0, 1)$ y $(0, -1)$.
- b) máximos absolutos en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, y mínimos absolutos en $(0, 1)$ y $(0, -1)$.
- c) sillars en $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

19. La función $u(t, x) = A \sin(a\lambda t + \psi) \sin \lambda x$ satisface la ecuación de la cuerda vibrante, que es:

- a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$.
- b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
- c) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2$.

20. Calculad cuáles son los puntos que pertenecen a la intersección de las superficies dadas por las ecuaciones $x^2 - xy + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ están más cerca y más alejados del origen de coordenadas. (Considerad la función distancia al cuadrado $x^2 + y^2 + z^2$, las dos restricciones y aplicad el método de Lagrange).

- a) La mínima distancia se alcanza en $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$. La máxima distancia se alcanza en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- b) La máxima distancia se alcanza en $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$. La mínima distancia se alcanza en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- c) No hay mínimos ni máximos, ya que el recinto no es compacto.

21. Un fabricante produce dos modelos de un determinado artículo, el normal y el de lujo. La fabricación del modelo normal supone un coste de 40 euros, y la del modelo de lujo, 60 euros. Una compañía especialista en estudios de mercado estima que si el precio del modelo normal se fija en x y el de lujo en y , entonces el fabricante venderá $500(y - x)$ de los artículos normales y $45.000 + 500(x - 2y)$ de los de lujo, cada año. Calculad el precio de cada artículo que hace máximos los beneficios.

- a) El máximo beneficio se alcanza en $(x, y) = (45, 90)$.
- b) El máximo beneficio se alcanza en $(x, y) = (45, 45)$.
- c) El máximo beneficio se alcanza en $(x, y) = (65, 75)$.

22. Descomponed el número 15 en tres sumandos no negativos de manera que su producto sea máximo.

- a) Uno de ellos es 4 y los otros dos, 5,5.
- b) Los números son 4,8, 4,9 y 5,3.
- c) Los tres son 5.

23. Encontrad los extremos absolutos de $f(x, y, z) = x + 2y + 4z$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 7$.

- a) $(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -2\frac{\sqrt{3}}{3}, -4\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ es el mínimo absoluto y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\frac{\sqrt{3}}{3}, 4\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ es el máximo absoluto.
- b) $(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -2\frac{\sqrt{3}}{3}, -4\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ es el máximo absoluto y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\frac{\sqrt{3}}{3}, 4\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ es el mínimo absoluto.
- c) La función no tiene máximos ni mínimos absolutos sobre la esfera.

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. a, 2. b, 3. a, 4. b, 5. a, 6. b, 7. b, 8. a, 9. c, 10. a, 11. a, 12. c, 13. a, 14. a, 15. a, 16. a, 17. b, 18. b, 19. a, 20. a, 21. c, 22. c, 23. a.

Glosario

Condiciones de primer orden: condiciones para tener un óptimo en términos de las derivadas de primer orden.

Condiciones de segundo orden: condiciones para tener un óptimo en términos de las derivadas de segundo orden.

Conjunto acotado: conjunto que se contiene dentro de una bola abierta y que tiene por componentes intervalos acotados.

Conjunto abierto: O es un conjunto abierto si cada punto de O está rodeado de una bola abierta que se contiene por completo en O .

Conjunto cerrado: conjunto complementario de un conjunto abierto.

Conjunto compacto: conjunto que es cerrado y está acotado al mismo tiempo.

Curva de nivel: dada una función f de \mathbb{R}^2 y un número real c , la curva de nivel c es el conjunto de todos los puntos (x, y) , donde $f(x, y) = c$.

Derivada: función lineal que aproxima una función dada alrededor de un punto. La gráfica de la derivada es el plano tangente a la gráfica de la función, en el punto alrededor del cual realizamos la aproximación.

Derivada direccional: derivada de la función de una variable que se obtiene cuando evaluamos una función de varias variables a lo largo de una recta.

Derivada parcial: derivada de la función de una variable que se obtiene cuando mantenemos fijos los valores de todas las variables excepto de una.

Gradiente: el vector que tiene como componentes las derivadas parciales de la función. Siempre apunta en la dirección de crecimiento máximo de la función.

Lagrangiano: función objetivo modificada, donde introducimos un término para cada restricción, ponderado por el modificador correspondiente.

Máximo: punto del dominio donde la función alcanza el valor máximo. Puede haber muchos máximos, pero sólo un valor máximo.

Máximo global: máximo de la función sobre todo el dominio en consideración (teniendo en cuenta las posibles restricciones).

Máximo local: máximo de la función, pero sólo en un cierto entorno.

Mínimo: punto del dominio donde la función alcanza el valor mínimo. Puede haber muchos mínimos, pero sólo un valor mínimo.

Mínimo global: mínimo de la función sobre todo el dominio en consideración (teniendo en cuenta las posibles restricciones).

Mínimo local: mínimo de la función, pero sólo en un entorno determinado.

Punto crítico: candidato a máximo o mínimo. Se trata de un punto que satisface las condiciones de primer orden de un problema de optimización.

Punto de silla: punto donde todas las derivadas parciales son cero y a partir del cual la función crece en alguna dirección y decrece en alguna otra.

Regla de la cadena: norma para encontrar la derivada de una función compuesta a partir de las derivadas de las funciones componentes.

Regularidad: independencia lineal de los gradientes de las restricciones que se satisfacen con igualdad en un punto.

Restricciones: condiciones, en forma de igualdad o de desigualdad, que las variables tienen que cumplir en un problema de optimización.

Valor máximo: valor máximo que alcanza la función.

Valor mínimo: valor mínimo que alcanza la función.

Sumario

En este módulo se han presentado las definiciones de continuidad y diferenciabilidad para funciones de varias variables. Hemos tenido la oportunidad de aprender a calcular derivadas parciales, direccionales. La regla de la cadena nos ha permitido diferenciar funciones arbitrarias obtenidas mediante la composición de funciones elementales conocidas. También hemos estudiado los problemas de optimización que se plantean con más frecuencia en ingeniería: los problemas de extremos libres y los de extremos absolutos sobre conjuntos compactos.

Bibliografía

En las obras de consulta que presentamos a continuación, sobre cálculo diferencial e integral, encontraréis un enfoque más formal que el que nosotros hemos utilizado en este curso:

Freixas, J.; Molina, M.A. (1990). *Problemas de cálculo infinitesimal* (2ª ed.). Barcelona: Remsa.

Larson, R.E.; Hostetler, R.P. (1995). *Cálculo y geometría analítica* (vol.1 y 2, 5ª ed.). Madrid: McGraw-Hill.

Marsden, J.E.; Tromba, A.J. (1991). *Cálculo vectorial* (3ª ed.). Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, SA.

Ortega, J. (1990). *Introducció a l'anàlisi matemàtica*. Barcelona: Publicacions de la Universitat Autònoma.

Salas, S.L.; Hille, E. (1994). *Calculus* (vol. II, 3ª ed.). Barcelona: Reverté.

