

# Matemáticas III

R. Muñoz

25 de Noviembre del 2001

# Índice general

# Capítulo 1

## Funciones de Varias Variables

Las funciones de dos o más variables independientes se presentan en la ciencia con mucha más frecuencia que las funciones que hemos estudiado anteriormente de una sola variable. Sus derivadas son más interesantes y variadas debido a la diversidad de maneras en que las variables pueden interactuar. Sus integrales conducen a una mayor diversidad de aplicaciones. Los estudios de probabilidad, estadística, dinámica de fluidos y electricidad por sólo mencionar unos cuantos, conducen todos de manera natural a funciones de más de una variable.

Consideremos los siguientes ejemplos que nos permitirán introducir la noción de *función de varias variables*,

**Ejemplo 1** La presión  $P$  ejercida por un gas ideal sobre las paredes de un depósito por un gas ideal, es función de su temperatura  $T$  y de su volumen  $V$ ,

$$P = k \left( \frac{T}{V} \right),$$

en donde  $k$  es una constante. En este caso las variables son  $V$  y  $T$  y el resultado es el número real  $k \left( \frac{T}{V} \right)$ . Particularmente si  $T = 5$ ,  $V = 1$ , entonces  $P = k \left( \frac{5}{1} \right) = 5k$  en la unidades correspondientes.

**Ejemplo 2** El área  $S$  de la superficie del cuerpo humano es una función del peso  $w$  y de la estatura  $h$ . Se ha establecido empíricamente que

$$S = 0,1091w^{0,423}h^{0,734}.$$

**Ejemplo 3** El volumen de un paralelepípedo rectangular en función de sus aristas  $x, y, z$ , corresponde a  $V = xyz$ , ver figura 1.1

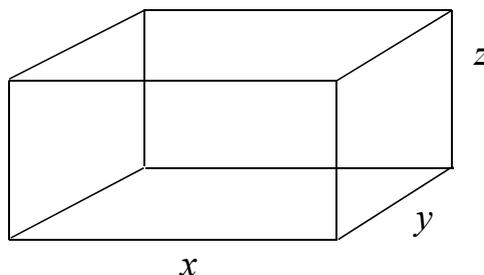


Figura 1.1:

### 1.0.1. Funciones de dos variables

En los tres ejemplos anteriores las variables independientes involucradas son 2 o 3 y el recorrido es un subconjunto de los números reales, presentamos ahora la definición de este tipo de funciones. Cuando se habla de plano debe entenderse el conjunto de puntos de la forma  $(x, y)$  en que  $x, y$  pertenecen a los números reales, usualmente asociaremos el plano con  $\mathbb{R}^2$ . Intuitivamente podemos pensar en un plano como la superficie de una mesa de largo y ancho infinitos. En la figura 1.2 observamos tres ejes  $x, y, z$ , perpendiculares mutuamente que generan tres planos también perpendiculares. El plano  $xy$ , el plano  $xz$  y el plano  $yz$ . Observe que para no complicar el dibujo se trazaron en realidad semiejes positivos. Un punto cualesquiera del espacio determinado por los 3 planos se determina por tres coordenadas. Por ejemplo el punto  $A$  de la figura presenta coordenadas positivas que se determinan trazando perpendiculares desde  $A$  hacia los planos  $xy, xz$  y  $zy$ . El punto  $D$  se encuentra en el plano  $xy$  y puede denotarse  $(a, b)$  o si lo consideramos como un punto del espacio  $(a, b, 0)$ .

Recuerde que en el plano la ecuación de una circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio  $r$  corresponde a  $x^2 + y^2 = r^2$ . Si a esta ecuación le agregamos la variables  $z$ , obtenemos  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , que representa en el espacio una esfera de centro el origen  $(0, 0, 0)$  y radio  $r$ . Además que la distancia entre dos puntos,  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  del plano se obtiene mediante la fórmula

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Para el caso de dos puntos  $A(x_1, y_1, z_1)$  y  $B(x_2, y_2, z_2)$  del espacio  $\mathbb{R}^3$ , la distancia entre ellos se establece mediante la fórmula

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = AB.$$

Si consideramos que la esfera de radio  $r$  y centro el origen está formada por aquellos puntos

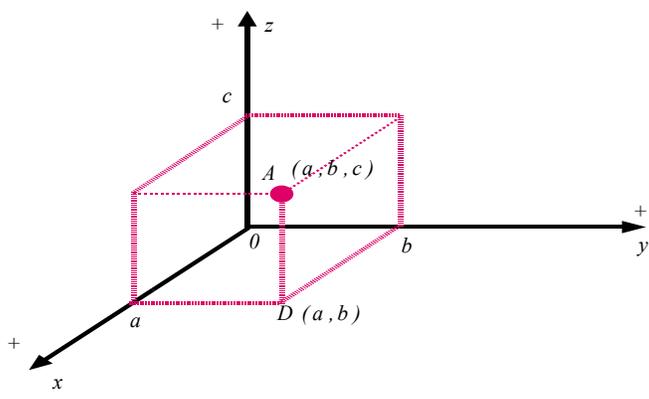
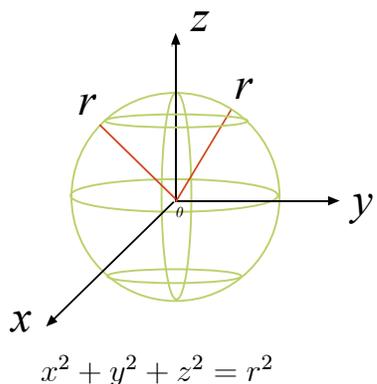


Figura 1.2:

$(x, y, z)$  cuya distancia al origen es  $r$  obtenemos la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .



**Definición 1** Una **función  $f$  de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales  $(x, y)$  de un subconjunto  $D$  del plano, un único número real  $z = f(x, y)$ .

La función usualmente se escribe  $z = f(x, y)$ , las variables  $x, y$  se denominan *variables independientes* y  $z$  la *variable dependiente*. En este caso el dominio de la función  $f$  será algún subconjunto del plano  $D \subset \mathbb{R}^2$ , tal que a cada punto de  $D$ , la función  $f$  asigna un número real. Tal como ocurre con las funciones de una variable si no se entrega el dominio se asume que  $D$  es el *máximo* posible.

**Ejemplo 4** Determine el valor de la función  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  en el punto  $(2, 5)$ .

*Solución.* Reemplazando  $x = 2$  e  $y = 5$ , obtenemos  $f(2, 5) = \sqrt{29,0} = 5.3852$ .

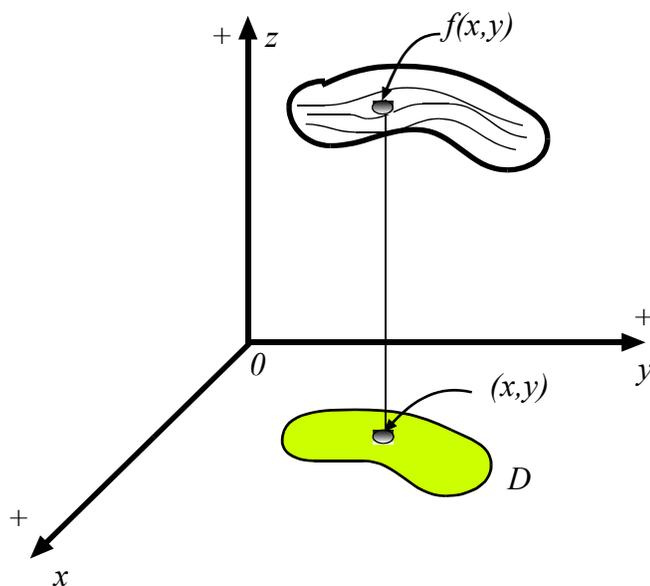


Figura 1.3:

### Gráficas

La gráfica de una función  $z = f(x, y)$  representa en general, una superficie en el espacio tridimensional. En general las gráficas no son fáciles de dibujar manualmente, pero computacionalmente existen programas que las representan muy bien. A cada punto  $(x, y)$  del dominio  $D$  corresponde un número real  $f(x, y)$  y estos números generan el recorrido

$$\text{Rec } f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}.$$

Ver gráfico 1.3

**Definición 2** Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , con lo cual denotamos una función cuyo dominio es el subconjunto  $D$  del plano  $xy$ , con  $f(x, y) \in \mathbb{R}$ . Se llama gráfica de la función de 2 variables al conjunto

$$\text{gra}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Se observa que si  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , ya no podemos visualizar el gráfico por que tendríamos que los puntos serían del tipo  $(x, y, z, f(x, y, z)) \in \mathbb{R}^4$ .

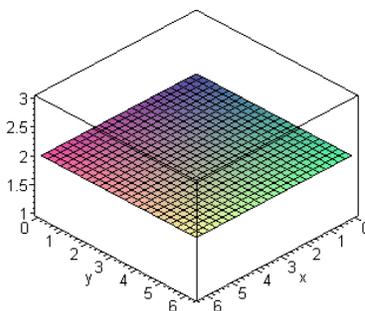


Figura 1.4:

**Ejemplo 5** Indique porqué la gráfica de la esfera no corresponde al gráfico de una función de dos variables.

**Solución.** Si consideramos el círculo de centro el origen y radio  $r$  en el plano  $xy$  como el dominio de la supuesta función, se observa que las imágenes de cada punto son dos, una, sobre el plano  $xy$  y la otra bajo él.

**Ejemplo 6** Determine el dominio y la gráfica de la función constante  $f(x, y) = 2$ .

**Solución.** En este caso el dominio de  $f$  corresponde a  $\mathbb{R}^2$  y observamos que todas las imágenes quedan a 2 unidades sobre el plano  $xy$  por tanto constituyen un nuevo plano paralelo al plano  $xy$  y cuyas coordenadas son del tipo  $(x, y, 2)$ . Ver figura 1.4

**Ejemplo 7** Determine la gráfica de la función  $f(x, y) = 2x - y + 4$ .

**Solución.** El gráfico de una función del tipo  $f(x, y) = ax + by + c$ , corresponde en general a un plano considerando  $a$  o  $b$  no nulos simultáneamente. Es útil obtener la intersecciones de este plano con los planos coordenados usuales,  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0$ . Si intersectamos con el plano  $zy$ , hacemos  $x = 0$  y obtenemos la recta  $z = -y + 4$ ; si intersectamos con el plano  $xy$ , hacemos  $z = 0$  y obtenemos la recta  $y = 2x + 4$ , finalmente para el plano  $zx$  obtenemos la recta  $z = 2x + 4$ . Observemos que el plano pedido contiene al triángulo  $ABC$  de la figura 1.5

En el caso de las funciones de una variable que estudiamos en cursos anteriores era importante determinar el dominio de una función, ocurre lo mismo para las funciones de dos o más variables.

**Ejemplo 8** Determine la gráfica, el dominio y el recorrido de la función

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

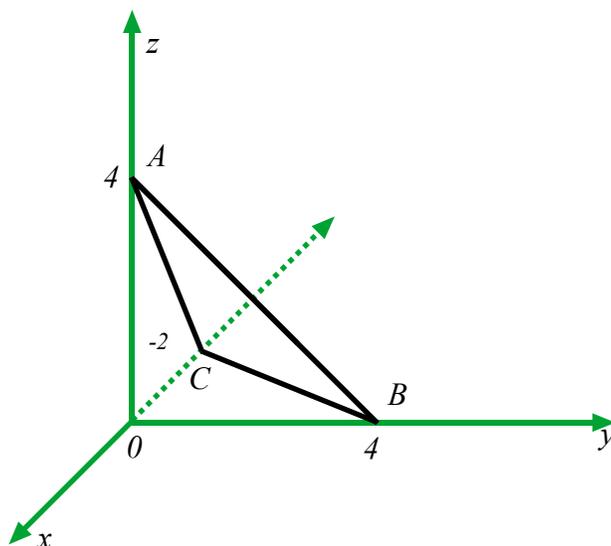


Figura 1.5:

**Solución.** Si sustituimos  $f(x, y) = z$  obtenemos  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  o sea,  $z^2 + x^2 + y^2 = 4$ , que corresponde a la ecuación de una esfera, pero que en este caso como  $z > 0$  la ecuación anterior representa la parte superior de la esfera como vemos en la figura 1.6 El dominio

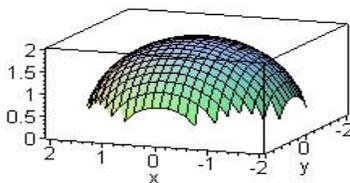


Figura 1.6:

corresponde a  $\{(x, y) / 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$ , que corresponde al círculo de radio 2 y centro el origen. El recorrido observando el gráfico corresponde a  $[0, 2]$ .

**Ejemplo 9** Dado que  $f(x, y) = 6 + \sqrt{x^2 - y^2}$ , encuentre

1.  $f(2, 6), f(4, 3)$ .

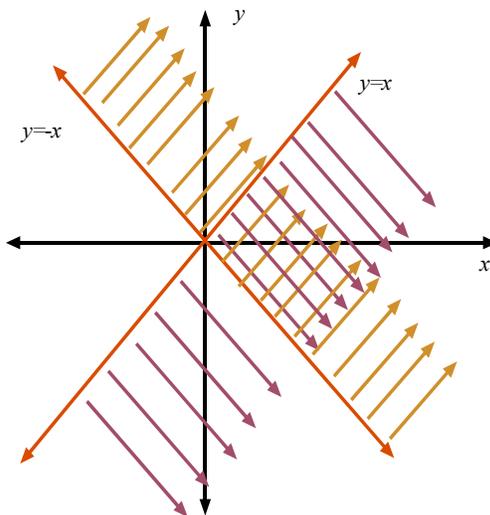
2. Trace un esquema del dominio de la función.

*Solución.*

1.  $f(2,6) = 6 + 4i\sqrt{2}$  no pertenece a los números reales, por tanto  $(2,6)$  no pertenece al dominio de la función.

$$f(4,3) = 6 + \sqrt{7}.$$

2. El dominio de  $f$  consiste de todos los pares ordenados  $(x,y)$  tales que  $x^2 - y^2 \geq 0$ . En este caso  $(x - y)(x + y) \geq 0$  por lo que  $x - y \geq 0$  y  $x + y \geq 0$  o  $x - y \leq 0$  y  $x + y \leq 0$ . Lo que es equivalente a  $(x \geq y \text{ y } x \geq -y)$  o  $(x \leq y \text{ y } x \leq -y)$ . Explicaremos el caso  $(x \geq y \text{ y } x \geq -y)$ , para ello es conveniente graficar las rectas  $x = y$  y  $y = -x$ . La solución gráfica de  $y \geq -x$  corresponde al semiplano superior y puede determinarse en forma práctica eligiendo un punto arbitrario en uno de los semiplanos y reemplazándolo en la inecuación, si resulta verdadero, ese semiplano es el correcto. Lo mismo hacemos para el caso  $x \geq y$  y la intersección ( la parte doblemente achurada) de los semiplanos entrega la solución final del caso  $(x \geq y \text{ y } x \geq -y)$ .



Realizando las intersecciones y uniones pertinentes obtenemos la figura 1.7, donde la región achurada corresponde al dominio

En el campo científico se emplean a menudo las palabras **isotérmica** o **equipotencial** o **isobárica**. Estos términos se aplican a rectas o curvas en las cuales la temperatura el potencial o la presión barométrica es constante.

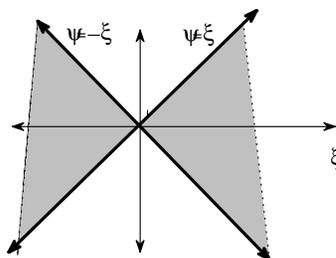


Figura 1.7:



Figura 1.8:

**Ejemplo 10** El potencial electrostático en un punto  $P(x, y)$  del plano debido a una carga puntual unitaria colocada en el origen está dado por  $U = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Si  $U = c$ , es una constante positiva, entonces  $x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$ , de esta manera las líneas o curvas que tienen el mismo potencial (equipotenciales) son círculos concéntricos alrededor de la carga como se muestra en la figura 1.8

En la figura note que podemos tener una idea del comportamiento de  $U$ , específicamente en donde crece o decrece, observando la dirección en que  $c$  aumenta.

Estas ideas posteriormente darán origen a lo que entenderemos como *curvas de nivel*.

Mostraremos algunos ejemplos de gráficas realizadas con el computador, específicamente con el Maple.