

10. Funciones de varias variables (II): Derivadas parciales, diferencial y derivada direccional

1. Calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ (y $\frac{\partial f}{\partial z}$) de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} (a) & f(x, y) = e^{\operatorname{sen}(x/y)} & (b) \quad f(x, y) = x^y \quad (c) \quad f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \\ (c) & f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & (d) \quad f(x, y, z) = x^{y^z} \quad (e) \quad f(x, y, z) = ze^{-(x^2+y^2)} \end{array}$$

2. Para las siguientes funciones estudiar la continuidad y la existencia de derivadas parciales en el origen:

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x, y) = x^{1/3}y \text{ en } (0, 0) \text{ y } (0, 2) \\ (b) & f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ (c) & f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ (d) & f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

3. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ (b) & f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ (c) & f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y}{1 - xy}, & xy \neq 1 \\ 0, & xy = 1 \end{cases} \\ (d) & f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 + y^2)x - y(x^2 + y^2)}{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ (e) & f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - (x - 1)^3}{(x - 1)^2 + y^2}, & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0, & (x, y) = (1, 0) \end{cases} \\ (f) & f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x - 1)|y|}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0, & (x, y) = (1, 0) \end{cases} \end{array}$$

4. Calcular el gradiente de las funciones:

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x, y) = \ln(x/y) \text{ en } P = (1, 1). \\ (b) & f(x, y, z) = \cos(x + y + z) \text{ en } P = (\pi, \pi, \pi) \text{ y } Q = (0, 0, \pi/2). \end{array}$$

5. Calcular las derivadas direccionales de las funciones:

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \text{ en el punto } (1, 0) \text{ según la dirección } \bar{v} = \frac{2}{\sqrt{5}}i + \frac{1}{\sqrt{5}}j. \\ (b) & f(x, y) = e^x \cos(xy) \text{ en el punto } (0, -1) \text{ según la dirección } \bar{v} = \frac{-1}{\sqrt{5}}i + \frac{2}{\sqrt{5}}j. \\ (c) & f(x, y, z) = x^2 - 2xy + z^3 \text{ en el punto } (1, -1, 2) \text{ según la dirección del vector } \bar{v} = (1, 3, 1). \end{array}$$

6. Dada la función $f(x, y) = \sqrt{x^3 + 2xy + y^2}$, determinar la dirección de máxima pendiente en el punto $(1, 1)$, así como el valor de la derivada direccional máxima.

7. Sea $T(x, y, z) = x^2 - 2yz$ la temperatura de un sólido de \mathbb{R}^3 . Si partimos del punto $P = (1, 2, 3)$ con la dirección del vector $\bar{v} = (2, 2, 1)$, ¿cuál es el cambio de temperatura que experimentamos por unidad de tiempo? ¿En qué dirección es máxima la variación de temperatura? ¿Cuál es ése valor máximo?

8. Sea la función $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{x+y} + \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t^4 + 1}} dt$. Se pide:

- Probar que g es diferenciable.
- Calcular la derivada direccional de g en el punto $(0, 0)$ según la dirección del vector $\bar{v} = (1, 2)$.
- ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional en $(0, 0)$? ¿Cuál es su valor?