IQ57A: Dinámica y Control de Procesos
Pauta de Resolución del Control 1
tomado el Lunes 6 de Septiembre de 2004

1.- Para las funciones de transferencia a continuación, bosqueje la respuesta dinámica a un impulso escalón de magnitud 3

a) $\dfrac{0{,}3}{1{,}443\cdot s+1}$

Claramente, el tiempo de respuesta es 1,443 unidades de tiempo y la ganancia es de 0,3. El nuevo valor de e.e., posterior a un esclaón de magnitud 3 será 0,3*3 = 9 y la respuesta avanzara un 63,21% (1-e^{-1}) de la amplitud (llega a 9*.6321 = 0,57) en 1 / 1,433 = 0,7 unidades de tiempo. La gráfica debe reflejar esos cálculos y valores.

b) $\dfrac{0{,}208\cdot\exp(-5\cdot s)}{s+0{,}693}$

La función debe ser expresada de forma canónica para identificar con facilidad la ganacia y el tiempo de respuesta. Esto requiere, obviamente, dividir el numerador y el denominador por 0,693. Así, la función de transferencia será:

$$\frac{(0{,}208/0{,}693)\cdot\exp(-5\cdot s)}{(s/0{,}693+1)}=\frac{0{,}3\cdot\exp(-5\cdot s)}{1{,}443\cdot s+1}$$

asi que la respuesta dinámica es la misma que en la gráfica anterior pero retardada en 5 unidades de tiempo. La gráfica de reflejar esos cálculos y valores.

c) $\dfrac{0{,}3}{16\cdot s^2+0{,}8\cdot s+1}$

Se trata aquí de una respuesta dinámica de segundo orden, pero cuya ganancia es idéntica a los dos anteriores, de modo que el valor del e.e. posterior al escalón será 9. La resolución de la ecuación característica:

$$16\cdot s^2+0{,}8\cdot s+1=0\Rightarrow p_{1,2}=\frac{-0{,}8\pm\sqrt{0{,}8^2-4\cdot 16}}{2\cdot 16}=-0.025\pm j\,0.25$$

indica dos polos imaginarios (uno es el complemento del otro) de parte real negativa. El tiempo de respuesta es de 4 unidades de tiempo, de modo que el coeficiente de amortiguación: $2\cdot\xi\cdot\tau=0{,}8\Rightarrow\xi=\dfrac{0{,}8}{8}=0{,}1\Rightarrow\xi<1$ es menor que 1. La convergencia hacia el nuevo valor de estado estacionario (9) es oscilatoria.

d) $\dfrac{0{,}3\cdot\exp(-2\cdot s)}{s^2-2\cdot s-3}$ debe ser canonizada a: $\dfrac{-0{,}1\exp(-2\cdot s)}{-1/3\cdot s^2+2/3\cdot s+1}$ de modo que el polinomio característico

$$-1/3\cdot s^2+2/3\cdot s+1=0\Rightarrow p_{1,2}=\frac{-2/3\pm\sqrt{(2/3)^2-4\cdot(-1/3)}}{2\cdot(-1/3)}=\frac{-2/3}{-2/3}\pm\frac{4/3}{-2/3}=1\mp 2$$

arroja dos polos reales (-1 y 3) pero uno de ellos es mayor que cero, es decir, la respuesta es inestable y tiende a -∞; la gráfica debe reflejar que la respuesta parte hacia -∞ despues de 2 unidades de tiempo de aplicado el escalón de magnitud 3.

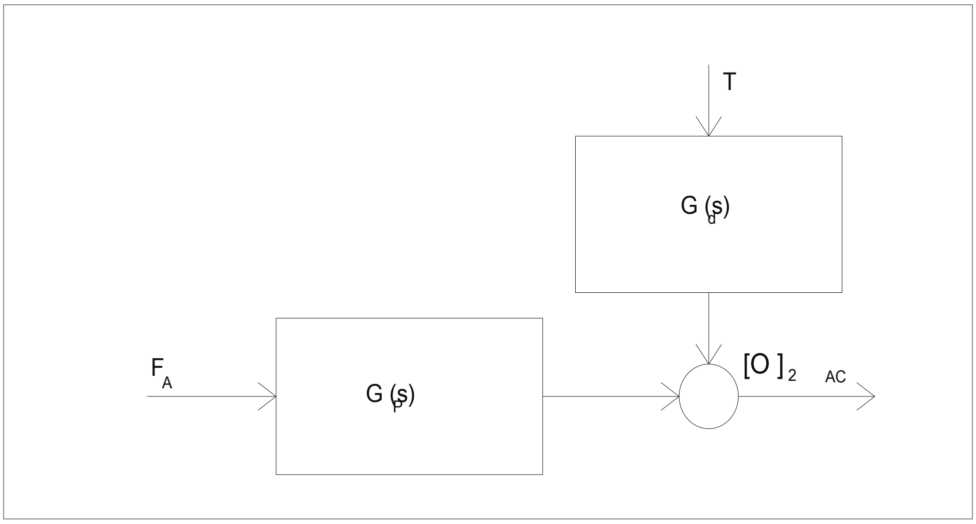
2.- En un reactor continuo se consume oxígeno a una tasa R en la fase acuosa. Al reactor se inyecta aire para transferir el oxígeno necesario. El modelo típico de la transferencia de masa en sistemas gas / líquido supone una fuerza motriz regulada por la tendencia al equilibrio:

$$\frac{d[O_2]_{AC}}{dt}=k_L a\cdot\left([O_2]_{saturacion}-[O_2]_{AC}\right)$$

La concentración de saturación de oxígeno disuelto está dada por la presión parcial y la constante de Henry. El coeficiente global de transferencia de oxígeno, k_La, para este reactor es una función del flujo de aire, F_A, de tipo exponencial determinada empíricamente:

$$k_L a=(k_L a)_0+A\cdot\{1-\exp(-\theta\cdot F_A)\}$$

El caudal de entrada no tiene oxígeno disuelto.
Establezca las variables y clasifíquelas en entradas o salidas, para encontrar un modelo entrada salida para este reactor.
La variable de entrada es, obviamente, el flujo de aire, F_A. La variable de salida es, obviamente, la concentración de oxígeno en la fase acuosa, "($[O_2]_{AC}$)". La principal perturbación es la presión parcial de oxígeno (que no esperamos que cambie significativamente) y la temperatura del proceso (porque la constante de Henry, o la solubilidad, es función de la temperatura y NO se ha dicho nada de ella). En términos de diagramas de bloques:



Encuentre la función de transferencia del caso (si no se puede, establezca como sería la f. de t. y por qué no la ha establecido).

En este caso se debe determinar $G_P(s)$ que relaciona el oxígeno de salida con el flujo de aire de entrada, en variables desviación. La ecuación dinámica modelo, al incorporar la dependencia del coeficiente de transferencia con el flujo contiene un término exponencial del flujo de aire y un término en producto con la concentración de oxígeno. El modelo dinámico explícito es:

$$\frac{d[O_2]_{AC}}{dt}=\left\{(k_L a)_0+A\cdot\{1-\exp(-\theta\cdot F_A)\}\right\}\cdot\left([O_2]_{saturacion}-[O_2]_{AC}\right)$$

El desarrollo en serie de Taylor del término exponencial, en torno de flujo cero, es del tipo:

$e^{-\theta\cdot F} \simeq 1-\theta\cdot F+\frac{1}{2}(\theta\cdot F)^2-\frac{1}{6}(\theta\cdot F)^3+O^4$ donde se usarán solo los dos primeros términos para disponer de un función lineal rápidamente (se podría desarrollar una aproximación al término cuadrático y cúbico, pero sería un poco tedioso). Así, el modelo dinámico puede ser escrito como:

$$\frac{d[O_2]_{AC}}{dt}=\left\{(k_L a)_0+A\cdot\{1-(1-\theta\cdot F_A)\}\right\}\cdot\left([O_2]_{saturacion}-[O_2]_{AC}\right)$$

que se simplifica a:

$$\frac{d[O_2]_{AC}}{dt}=\left\{(k_L a)_0+A\cdot\theta\cdot F_A\right\}\cdot\left([O_2]_{saturacion}-[O_2]_{AC}\right)$$

Ahora es posible dejar en evidencia el término compuesto por la multiplicación del flujo por la concentración:

$$\frac{d[O_2]_{AC}}{dt}=\left\{(k_L a)_0+A\cdot\theta\cdot F_A\right\}\cdot[O_2]_{saturacion}-(k_L a)_0\cdot[O_2]_{AC}+A\cdot\theta\cdot F_A\cdot[O_2]_{AC}$$

que es el último término de la ecuación anterior. Se debe encontrar una expresión ahora para ese producto,en torno de un flujo y concentración de referencia; tal aproximación será:

$$A\cdot\theta\cdot F_A\cdot[O_2]_{AC}\simeq A\cdot\theta\cdot\left(F_A^R\cdot\left\{[O_2]_{AC}^R-[O_2]_{AC}\right\}+[O_2]_{AC}^R\cdot\left\{F_A^R-F_A\right\}\right)$$

La ecuación dinámica linealizada es ahora:

$$\frac{d[O_2]_{AC}}{dt}=(k_L a)_0\cdot[O_2]_{saturacion}+A\cdot\theta\cdot F_A\cdot[O_2]_{saturacion}-(k_L a)_0\cdot[O_2]_{AC}$$
$$+2\cdot A\cdot\theta\cdot F_A^R\cdot[O_2]_{AC}^R-A\cdot\theta\cdot[O_2]_{AC}^R\cdot F_A-A\cdot\theta\cdot F_A^R\cdot[O_2]_{AC}$$

Si se resta ahora el estado estacionario, para escribir el modelo dinámico en variables desviación:

$$\frac{d[O_2]_{AC}'}{dt}=A\cdot\theta\cdot\left\{[O_2]_{saturacion}-[O_2]_{AC}^R\right\}\cdot F_A'-\left\{(k_L a)_0-A\cdot\theta\cdot F_A^R\right\}\cdot[O_2]_{AC}'$$

es ahora posible escribir el modelo dinámico de entrada / salida:

$$\frac{d[O_2]_{AC}'}{dt}+\left\{(k_L a)_0-A\cdot\theta\cdot F_A^R\right\}\cdot[O_2]_{AC}'=A\cdot\theta\cdot\left\{[O_2]_{saturacion}-[O_2]_{AC}^R\right\}\cdot F_A'$$

Se puede definir ahora el tiempo de respuesta y la ganancia de estado estacionario clásicos, a fin de simplificar la notación del modelo:

$$\tau_P=\frac{1}{(k_L a)_0-A\cdot\theta\cdot F_A^R};\quad K_P=\frac{A\cdot\theta\cdot\left\{[O_2]_{saturacion}-[O_2]_{AC}^R\right\}}{(k_L a)_0-A\cdot\theta\cdot F_A^R}$$

El modelo dinámico y su transformada serán, entonces:

$$\frac{\tau_P\cdot d[O_2]_{AC}'}{dt}+[O_2]_{AC}'=K_P\cdot F_A';\quad(\tau_P\cdot s+1)\cdot\overline{[O_2]_{AC}'}=K_P\cdot\overline{F_A'}$$

de modo de la función de transferencia deseada es:

$$G_P(s)=\frac{\overline{[O_2]_{AC}'}}{\overline{F_A'}}=\frac{K_P}{\tau_P\cdot s+1}$$

Discuta qué perturbaciones afectan a este sistema.
La perturbación principal, como se ha establecido antes, será la temperatura del fluido al que se transfiere oxígeno. En menor grado, la presión parcial de oxígeno tendrá tanta imposrtancia como sea el cambio de presión del reactor, que si está abierto a la atmósfera, será perturbado por los cambios de presión amosférica.

Asigne y justifique un objetivo de control y discuta qué variables elegiría para un eventual lazo de control.
El objetivo de control será mantener la concentración especificada por la referencia de oxígeno disuelto en la fase acuosa. Este mismo lazo de control servo deberá ayudar en la compensación de perturbaciones (regulación) de modo que se usaría un control PI. Como de constumbre, se medirá la concentración de oxígeno en la fase acuosa (variable de salida) y se actuará sobre el flujo de aire (variable de entrada) cerrando un lazo feed-back.

3.- Considere un sistema de alto orden, compuesto por varios primeros orden en serie, no interactuantes: ¿Cómo es la función de transferencia para n sistemas?;
La función de transferencia de una serie de funciones de transferencia será el producto de las funciones porque si "a_1" es la entrada a un primer proceso de función de transferencia G_1 y "a_2" es la salida, entonces $a_2 = G_1 * a_1$; si ahora "a_2" es la entrada a una segunda función G_2 en serie, que produce la salida "a_3", entonces $a_3 = G_2 * a_2$; si se reemplaza "a_2" por su equivalente, entonces $a_3 = G_2 * G_1 * a_1$. Asi entonces: $G = \prod G_i$

¿Es estable el sistema?;
La función G será de orden "n" cuando el proceso consiste de "n" primero ordenes conectados en serie. Entonces

$$G_n(s) = \prod G_i(s)\, dado\, G_i(s) = \frac{K_i(s)}{\tau_i(s)+1} \Rightarrow G_n(s) = \frac{\prod K_i}{(\tau_1 \cdot s+1)\cdot(\tau_2 \cdot s+1)\cdots(\tau_n \cdot s+1)}$$

de modo que el polinomio característico es:

$$(\tau_1 \cdot s+1)\cdot(\tau_2 \cdot s+1)\cdots(\tau_n \cdot s+1) = 0\,;\, es\ decir\ los\ n\ polos\ son\ -\frac{1}{\tau_i} cada\ uno$$

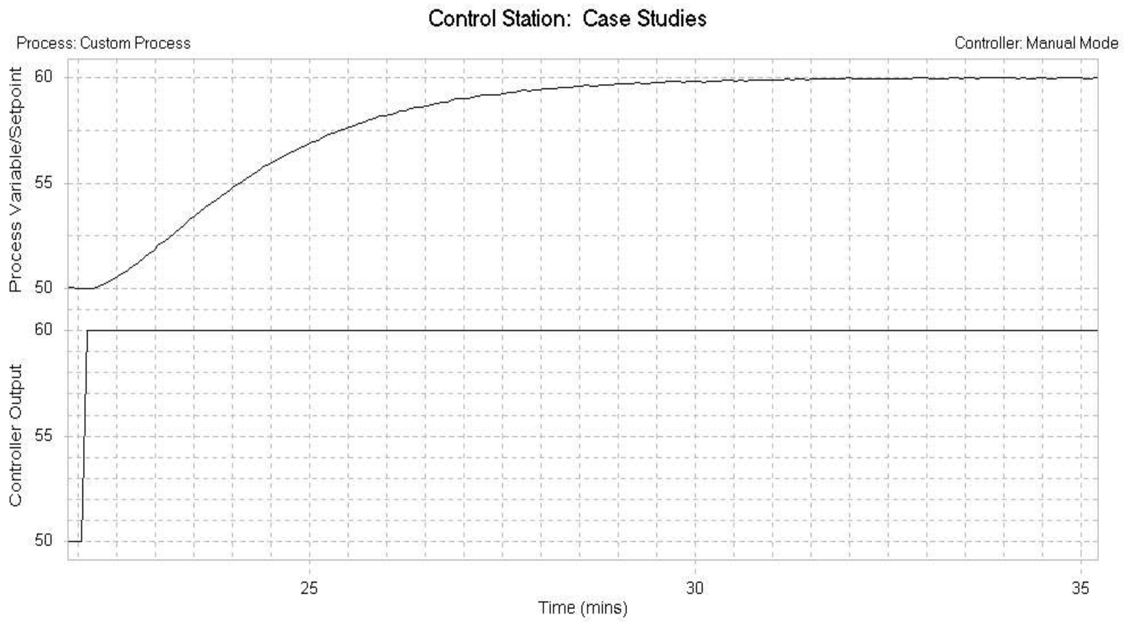
Si cada uno de los sistemas de primer orden en la serie es estable, entonces cada primer orden tiene un polo real negativo, por ende estable. Si cada polo es menor que cero, el proceso de orden "n" es estable.

¿Bajo qué condiciones puede oscilar el sistema?;
De acuerdo al análisis recien expuesto, el sistem compuesto por una serie de primeros ordenes, NO puede oscilar porque no hay polos complejos.

La respuesta de la serie de n sistemas ¿responde más rápido o mas lento que los sistemas originales?
El tiempo de respuesta equivalente del sistema de alto orden es el producto de los tiempos de respuesta de cada sistema en la serie (por ejemplo, para segundo orden, el tiempo de respuesta es la raíz del producto de los dos tiempos de respuesta) de modo que el sistema es mas lento que cualquiera de los sistemas en la serie.

Comente otras características sobresalientes del sistema en serie.
Los sistemas compuestos por una conexión en serie de sistemas de primer orden será siempre sobre amortiguada o de amortiguación crítica pero no pueden nunca oscilar. En cambio, si un proceso en una serie es de alto orden intrínseco y puede responder oscilatoriamente, sus polos con parte imaginaria lo serán también del sistema en serie, de modo que habrá respuesta oscilatoria de toda la serie. Los polos de cada sistema en una serie son polos de la conexión en serie; así, las características dinámicas de los sistemas en serie provienen de la respuesta dinámica de cada sub sistema.

4.



Un proceso, en lazo abierto, respondió según se especifica en la gráfica superior. Se estableció un escalón en la señal de control (entrada del actuador final) y se registró la medición de la respuesta. Proponga un modelo para el proceso.
El modelo propuesto debe ser un primer orden con retardo, pues no hay información suficiente para saber si corresponde, en realidad, a un sistema de un orden alto.
Dado que un escalón de amplitud 10 generó una respuesta de amplitud 10, la ganacia es unitaria, es decir, $K_P = 1$.
Cada subdivisión del eje tiempo es de media unidad; como la respuesta se retrasó media división, el retardo es de 0,25 unidades de tiempo.
En un tiempo de respuesta, la salida habrá avanzado 6,32 de las 10 unidades, es decir, llegará a 56,32. Este valor se alcanza en el tiempo 24,75, para una respuesta que comenzó a las 22,25 unidades (es decir, comenzó después del retardo); el tiempo de respuesta es, por lo tanto, de 2,5 unidades de tiempo. Finalmente, el modelo propuesto es:

$$G_P(s) = \exp\frac{(-0{,}25\cdot s)}{2{,}5\times s+1}$$