

## CAPÍTULO 3

### OTROS SISTEMAS DE FLUJO

#### 3.1.- Flujo laminar y turbulento en tuberías para fluidos no newtonianos

##### 3.1.1.- Plástico de Bingham

Recordando su ecuación reológica:

$$\tau = \tau_C + \eta \cdot \frac{dv}{dn} \quad [1.4.5]$$

En que:

$\tau_C$ : esfuerzo de ruptura  
 $\eta$ : viscosidad plástica

#### Flujo laminar en tubería circular

Usando la ecuación 2.1.24:

$$\frac{Q}{\pi \cdot R^3} = \frac{1}{\tau_0^3} \int_0^{\tau_0} \tau^2 \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau \quad [2.1.24]$$

se reemplaza la función inversa, que en este caso es:

$$\left( \frac{dv}{dn} \right) = 0 \quad \text{para } \tau < \tau_C$$
$$\left( \frac{dv}{dn} \right) = \frac{1}{\tau} \cdot (\tau - \tau_C) \quad \text{para } \tau \geq \tau_C \quad [3.1.1]$$

$$\frac{Q}{\pi \cdot R^3} = \frac{1}{\tau_0^3} \cdot \int_0^{\tau_C} \tau^2 \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau + \frac{1}{\tau_0^3} \cdot \int_{\tau_C}^{\tau_0} \tau^2 \cdot \frac{(\tau - \tau_C)}{\eta} \cdot d\tau \quad [3.1.2]$$

$$\frac{Q}{\pi \cdot R^3} = 0 + \frac{1}{\tau_0^3} \cdot \int_{\tau_C}^{\tau_0} \tau^2 \cdot \frac{(\tau - \tau_C)}{\eta} \cdot d\tau$$

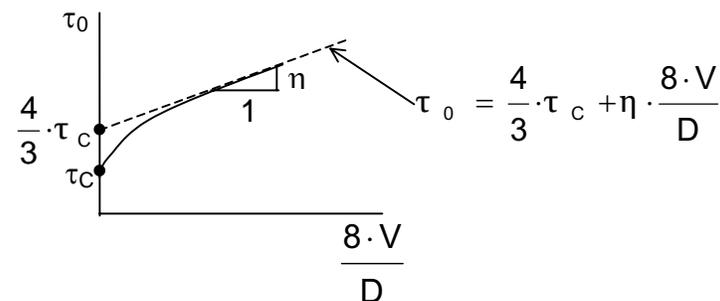
El resultado de la integración es la ecuación de Buckingham

$$\frac{8 \cdot V}{D} = \frac{\tau_0}{\eta} \cdot \left[ 1 - \frac{4}{3} \cdot \left( \frac{\tau_C}{\tau_0} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{\tau_C}{\tau_0} \right)^4 \right] \quad [3.1.3]$$

Esta ecuación tiende a una asíntota cuando  $\tau_0 \gg \tau_C$ :

$$\frac{8 \cdot V}{D} \xrightarrow{\tau_0 \gg \tau_C} \frac{\tau_0}{\eta} \cdot \left[ 1 - \frac{4}{3} \cdot \left( \frac{\tau_C}{\tau_0} \right) \right] \quad [3.1.4]$$

El pseudo-diagrama reológico se muestra en la Figura 3.1.1, la ecuación 3.1.3 en línea llena y la asíntota 3.1.4 en la línea de segmentos.



**Figura 3.1.1. Pseudo-diagrama reológico para plástico de Bingham.**

Para la medición de propiedades reológicas, se construye la asíntota con un número suficiente de puntos que definan una línea recta. Su pendiente es  $\eta$  y su intercepción en el origen determina  $(4/3) \cdot \tau_C$ .

Notar que, cuando  $\tau_C$  tiende a cero, el plástico de Bingham tiende al comportamiento newtoniano.

Para la aplicación al diseño, conviene llevar la ecuación 3.1.3 a una forma adimensional. Se define un número de Reynolds efectivo en base a la viscosidad aparente para  $\tau_0$  tendiendo a infinito, que corresponde a  $\eta$ .

$$Re_{\infty} = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu_{ap,\infty}} = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\eta} \quad [3.1.5]$$

El otro adimensional es el número de Hedstrom He:

$$He = \frac{\tau_C \cdot \rho \cdot D^2}{\eta^2} \quad [3.1.6]$$

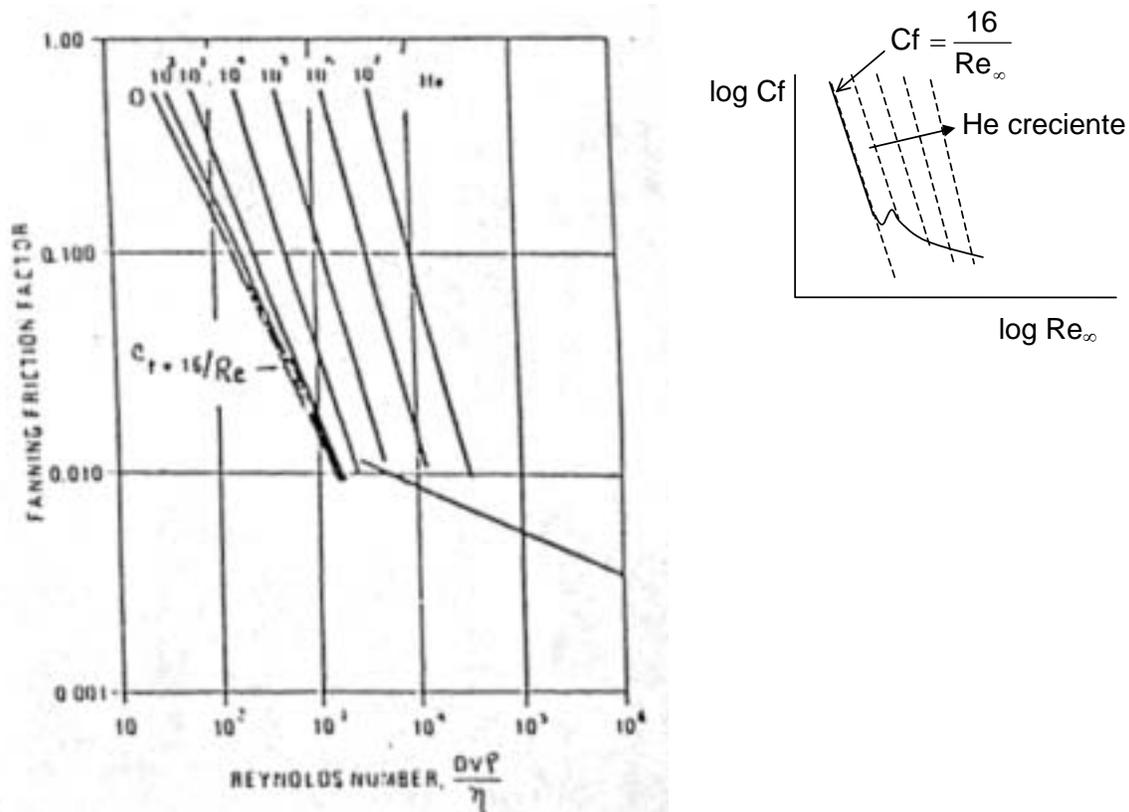
La ecuación de Buckingham 3.1.3 toma la forma:

$$\frac{1}{Re_\infty} = \frac{Cf}{16} - \frac{1}{6} \cdot \frac{He}{Re_\infty^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{He^4}{Cf^3 \cdot Re_\infty^8} \quad [3.1.7]$$

Donde Cf es el coeficiente de fricción de Fanning.

La ecuación 3.1.7 se puede graficar como en la Figura 3.1.2. La línea llena corresponde al fluido newtoniano: en régimen laminar, es la recta:

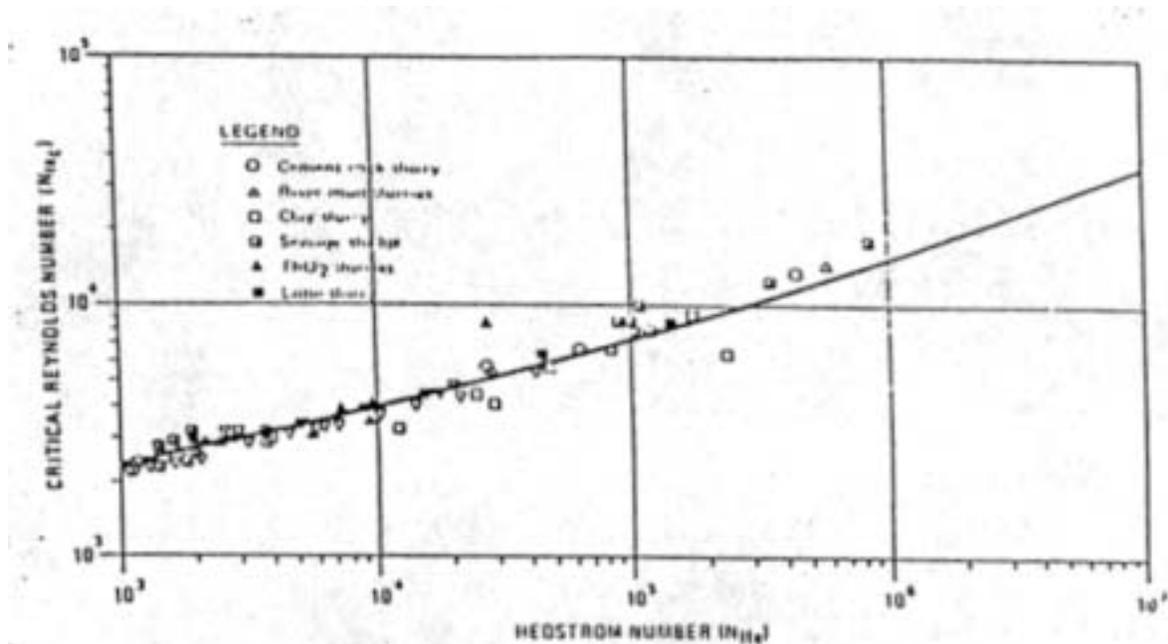
$$Cf = \frac{16}{Re_\infty}, \text{ o } f = \frac{64}{Re_\infty} \quad 4 \cdot Cf = f \quad [3.1.8]$$



**Figura 3.1.2. Gráfico de la ecuación de Buckingham adimensional.**

En régimen turbulento, se muestra la curva para pared lisa. Las líneas de segmentos son curvas paramétricas para  $Cf = Cf(Re_\infty)$  con He como parámetro (régimen laminar). La transición a flujo turbulento ocurre cuando las curvas paramétricas cruzan la curva inferior para pared lisa.

Datos empíricos para el número de Reynolds crítico (transición a turbulencia) se dan en otra figura como la siguiente:



**Figura 3.1.3. Número de Reynolds crítico en función del número de Hedstrom.**

Valores importantes:      He = 10<sup>3</sup>      →      Re = 2,3·10<sup>3</sup>  
    He = 10<sup>6</sup>      →      Re = 1,5·10<sup>4</sup>

El plástico de Bingham es más estable que el fluido newtoniano frente a la turbulencia.

Para flujo turbulento, se puede usar el gráfico de Moody sin gran error; en todo caso, el plástico de Bingham tiende a dar coeficientes de fricción menores que el fluido newtoniano (el error está del lado de la seguridad en el diseño).

### 3.1.2.- Fluido de ley potencial

Recordando su ecuación reológica:

$$\tau = K \cdot \left( \frac{dv}{dn} \right)^m \quad [1.4.6]$$

En que:

K: índice de consistencia

m: índice de comportamiento

Se tiene:

$$\left(\frac{dv}{dn}\right) = \left(\frac{\tau}{K}\right)^{1/m} \quad [3.1.9]$$

Reemplazando en la ecuación 2.1.24 e integrando, se llega a la siguiente ecuación para flujo laminar:

$$\tau_0 = K \cdot \left(\frac{3 \cdot m + 1}{4 \cdot m}\right)^m \cdot \left(\frac{8 \cdot V}{D}\right)^m \quad [3.1.10]$$

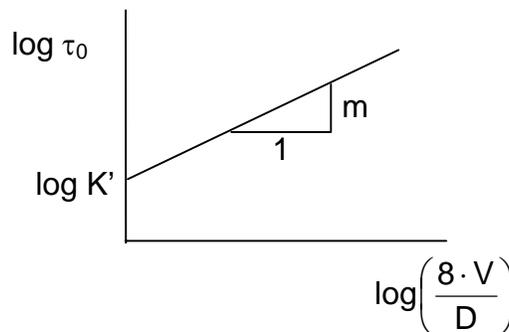
Definiendo  $K'$  como:

$$K' = K \cdot \left(\frac{3 \cdot m + 1}{4 \cdot m}\right)^m \quad [3.1.11]$$

Se obtiene el pseudo-diagrama reológico en la forma:

$$\tau_0 = K' \cdot \left(\frac{8 \cdot V}{D}\right)^m \quad [3.1.12]$$

En un gráfico logarítmico (Figura 3.1.4), los puntos experimentales en una medición reológica definen una línea recta, de pendiente  $m$ , con  $K'$  definido en el valor:  $\frac{8 \cdot V}{D} = 1$ , o sea,  $\log\left(\frac{8 \cdot V}{D}\right) = 0$



**Figura 3.1.4. Diagrama pseudo-reológico para fluido de ley potencial.**

La transición a flujo turbulento se define con un número de Reynolds efectivo basado en la viscosidad aparente:

$$Re_{ef} = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu_{ap}} \quad [3.1.13]$$

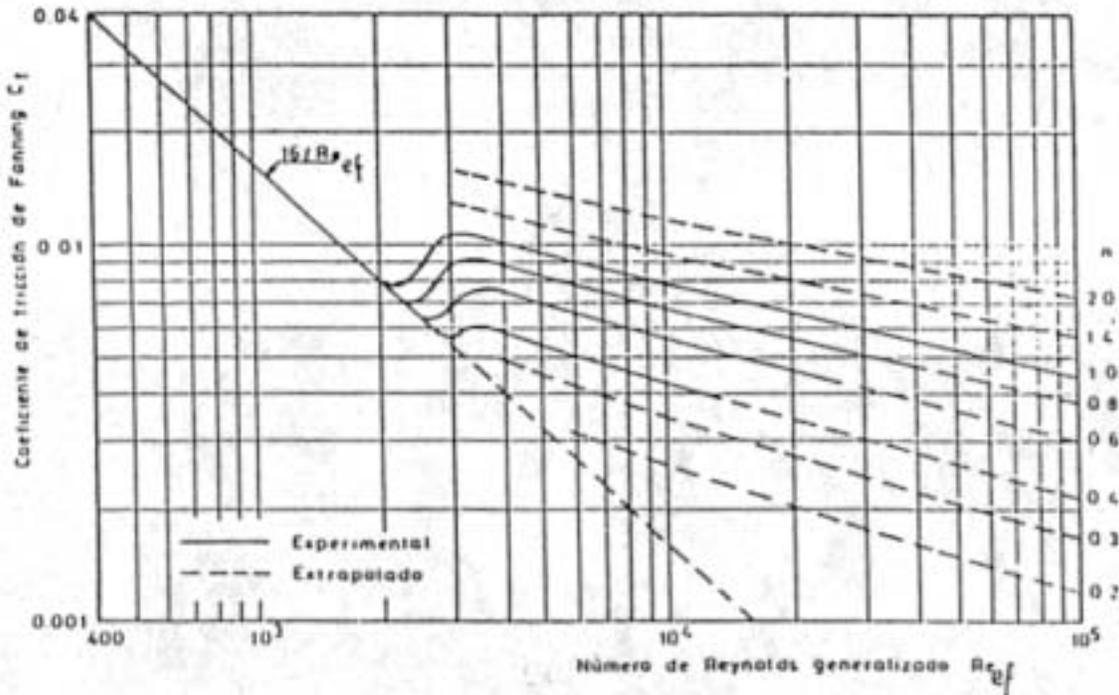
$$\mu_{ap} = \frac{\tau_0}{\left(\frac{8 \cdot V}{D}\right)} = K' \left(\frac{8 \cdot V}{D}\right)^{m-1} \quad [3.1.14]$$

Reemplazando 3.1.14 en 3.1.13:

$$Re_{ef} = \frac{\rho \cdot V^{2-m} \cdot D^m}{K' \cdot (8)^{m-1}} \quad [3.1.15]$$

Esta definición satisface  $f = \frac{64}{Re_{ef}}$  en flujo laminar y tiende a  $Re$  (newtoniano) cuando  $m$  tiende a 1.

La transición a flujo turbulento ocurre para  $Re_{ef} = 2 \cdot 10^3$ . En flujo turbulento, se obtienen coeficientes de fricción inferiores a los del gráfico de Moody. El gráfico de Dodge-Metzner muestra valores experimentales para tuberías lisas y algunas extrapolaciones.



**Figura 3.1.5. Gráfico de la fórmula de Dodge y Metzner para flujo en conductos (lisos), de fluido de ley potencial.**

## 3.2.- Medición de propiedades reológicas

### 3.2.1- Suspensiones sólido-líquido homogéneas

Si los sólidos son de tamaño pequeño o la viscosidad del líquido es alta, la tendencia de las partículas a sedimentar será baja y se podrá considerar la suspensión como estable, con las partículas distribuidas en forma homogénea.

En este caso, la suspensión pasa a comportarse como un pseudo-líquido, que tiene sus propiedades reológicas específicas, distintas de las del líquido y los sólidos por separado.

Definiciones y nomenclatura para suspensiones:

Subíndices: ( )<sub>s</sub> sólidos; ( )<sub>f</sub> fluido; ( )<sub>m</sub> mezcla

$$s = \frac{\rho_s}{\rho_{H_2O}} \quad \text{gravedad específica} \quad [3.2.1]$$

$$s_f = \frac{\rho_s}{\rho_f} \quad \text{densidad específica} \quad [3.2.2]$$

$\rho_m$  : densidad media de la mezcla

$$C_V = \frac{V_s}{V_m} \quad \text{fracción volumétrica de sólido} \quad [3.2.3]$$

$$C_W = \frac{W_s}{W_m} \quad \text{fracción másica de sólidos} \quad [3.2.4]$$

Ecuaciones de conversión:

$$\rho_m = \frac{s_f \cdot \rho_f}{C_W + s_f \cdot (1 - C_W)} = \rho_f \cdot [1 + (s_f - 1) \cdot C_V] = \rho_f \cdot (1 - C_V) + \rho_s \cdot C_V \quad [3.2.5]$$

$$C_V = \frac{C_W}{C_W + s_f \cdot (1 - C_W)} \quad [3.2.6]$$

$$C_W = \frac{s_f \cdot C_V}{1 + (s_f - 1) \cdot C_V} \quad [3.2.7]$$

Cuando la sedimentación es significativa, la suspensión se hace heterogénea y no puede tratarse como un pseudo-líquido.

## Viscosidad de suspensiones

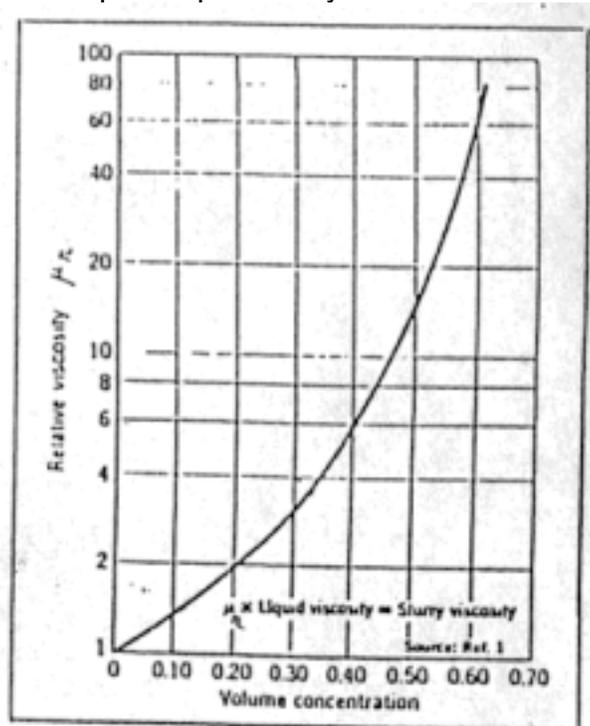
Para comportamiento newtoniano, se puede predecir la viscosidad de una suspensión diluida por la ecuación de Einstein:

$$\mu_r = \frac{\mu_m}{\mu_f} = 1 + 2,5 \cdot C_V \quad [3.2.8]$$

$\mu_r$  es la viscosidad relativa. La ecuación de Einstein no tiene mucha utilidad por su restricción a concentraciones demasiado bajas. Pero sirve de apoyo para extenderla empíricamente a concentraciones altas. Una de estas extensiones es la fórmula de Thomas:

$$\mu_r = \frac{\mu_m}{\mu_f} = 1 + 2,5 \cdot C_V + 10,05 \cdot C_V^2 + 0,00273 \cdot \exp(16,6 \cdot C_V) \quad [3.2.9]$$

Esta ecuación se ha graficado para facilitar su aplicación. Dependiendo de la forma de las partículas, las mayores concentraciones  $C_V$  son del orden de 50%; más allá, es una masa compacta que no fluye.



**Figura 3.2.1. Viscosidad de suspensiones en función de la concentración volumétrica.**

No se puede saber a priori si una suspensión tendrá comportamiento newtoniano o no newtoniano. Debe recurrirse a la experiencia.

### 3.3.- Flujos isentrópicos

Recordando la ecuación 1.5.26, de balance de energía para fluido compresible:

$$\left(i + \frac{v^2}{2}\right)_{S_s} - \left(i + \frac{v^2}{2}\right)_{S_e} = \frac{\Delta C}{Q_m \cdot \Delta t} - \frac{\Delta W_E}{Q_m \cdot \Delta t} \quad [1.5.26]$$

Conviene introducir como velocidad de referencia la velocidad del sonido  $c$ , definida como la velocidad de propagación de una pequeña onda de presión en forma isentrópica.

Para gases ideales se demuestra que:  $c = \sqrt{k \cdot R \cdot T}$  [3.3.1]

Se define el número de Mach  $M$  por:  $M = \frac{v}{c}$  [3.3.2]

Por tanto:

$M < 1$  significa  $v < c$ , flujo subsónico o subcrítico

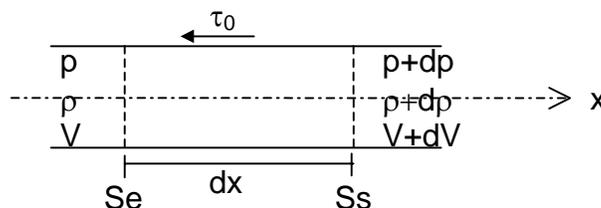
$M > 1$ , significa  $v > c$ , flujo supersónico o supercrítico

$M = 1$  corresponde a la transición o crisis (la "barrera del sonido")

### 3.4.- Flujo compresible isotérmico con fricción

Si la densidad de un gas varía en forma significativa, no puede haber flujo con velocidad constante. Se considera aquí un flujo en conducto uniforme ( $D$  constante) y estacionario ( $Q_m = \rho \cdot V \cdot S = \text{constante}$ ), pero con variación de la velocidad. La ecuación de cantidad de movimiento es:

$$\sum_{SM} \vec{F} = Q_m \cdot (\vec{V}_s - \vec{V}_e) \quad [1.5.28]$$



**Figura 3.4.1. Diagrama esquemático del volumen de control sobre el cual se deben efectuar los balances de mas y cantidad de movimiento.**

Proyectando sobre el eje x:

$$\sum F_x = p \cdot S - (p + dp) \cdot S - \tau_0 \cdot P \cdot dx \quad [3.4.1]$$

$$\sum F_x = \rho \cdot V \cdot S \cdot (V + dV - V) \quad [3.4.2]$$

Para sección circular, se reduce a :

$$dp + 4 \cdot \tau_0 \cdot \frac{dx}{D} + \rho \cdot V \cdot dV = 0 \quad [3.4.3]$$

De  $Q_m = \rho \cdot V \cdot S = \text{constante}$ , con  $S = \text{constante}$ , se tiene:  $\rho \cdot V = \text{constante}$ . Con  $T = \text{constante}$ , se tiene  $\mu$  constante. Por tanto:

$$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} = \text{constante} \quad [3.4.4]$$

Podemos suponer entonces que el coeficiente de fricción es constante:

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \cdot f \cdot \rho \cdot V^2 \quad [3.4.5]$$

Reemplazando 3.3.2, 3.4.5 en 3.4.3 y usando la condición:  $p = \rho \cdot R \cdot T$  o  $p/\rho = \text{constante}$ , por tanto:

$$\frac{dp}{\rho} = -\frac{dV}{V} = \frac{dp}{\rho} \quad [3.4.6]$$

Se obtiene:

$$\frac{dp}{\rho} = -\frac{f}{2} \cdot \frac{dx}{D} \cdot \frac{k \cdot M^2}{1 - k \cdot M^2} \quad [3.4.7]$$

Esta ecuación muestra que el flujo isotérmico tiende a una singularidad cuando  $1 - k \cdot M^2 = 0$ , en la cual  $dp$  tiende a infinito. Se entiende que al acercarse a esta condición el flujo no puede seguir siendo isotérmico. Por tanto, la hipótesis de flujo isotérmico lleva implícita la restricción de que la longitud  $L$  del conducto sea  $\ll L_{\text{max}}$ , en que  $L_{\text{max}}$  está dado por  $1 - k \cdot M^2 = 0$ . Con esta salvedad, se integra 3.4.7 obteniéndose:

$$\frac{pe^2 - ps^2}{pe^2} = k \cdot Me^2 \cdot \left[ 2 \cdot \ln \frac{pe}{ps} + f \cdot \frac{L}{D} \right] \quad [3.4.8]$$

$$\text{En que: } k \cdot \text{Me}^2 = \frac{Qm^2}{\rho_e \cdot \rho_e \cdot S^2} \quad [3.4.9]$$

El coeficiente de fricción  $f$  se obtiene del gráfico de Moody. Para conductos largos, el término logarítmico tiende a ser despreciable frente al término en  $f$  y puede suprimirse para facilitar los cálculos. Esta posibilidad debe verificarse con los datos del problema.

### 3.5.- Flujo a través de medios permeables.

El fluido se desplaza a través de la matriz de poros intersticiales de un medio granular.

Casos naturales: agua subterránea  
Yacimientos de petróleo y gas natural

Casos industriales: filtración  
Torres rellenas o empacadas (operaciones de absorción, catálisis, etc.)  
Secado de granos

Ecuación de Darcy (usada principalmente en los casos naturales)

$$u_s = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{d(p + \gamma h)}{dx} \quad [3.5.1]$$

En que  $u_s$  es la velocidad superficial (más propiamente, es el flujo por unidad de área), definida por:

$$u_s = \frac{Q}{S} \quad [3.5.2]$$

$S$  es el área total del medio y no el área abierta al paso del fluido.

$k$  es el coeficiente de permeabilidad, que caracteriza al medio (coeficiente empírico)

### Modelo para medios particulados

En los casos industriales, interesa la pérdida de carga a partir de las características de la partícula.

$$\epsilon = \text{porosidad} = \frac{\text{volumen de huecos}}{\text{volumen total}} \quad [3.5.3]$$

$V$  = velocidad efectiva del fluido en los intersticios.

Como  $Q = u_s \cdot S = V \cdot Sh$ , en que  $Sh$  es el área de huecos en una sección transversal, con  $Sh = S \cdot \epsilon$ , se obtiene:  $u_s = V \cdot \epsilon$ .

Se modela al medio como un haz de conductos en paralelo, cada conducto de longitud  $L_e$ , sección  $S_e$ , perímetro  $P_e$ . Estando en paralelo, la pérdida de carga es la misma para todos los conductos:

$$\Delta(p + \gamma h) = C_f \cdot \frac{L_e}{R_h} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \quad [3.5.4]$$

$$R_h = \frac{S_e}{P_e} \quad [3.5.5]$$

Se estima un  $R_h$  promedio como:  $\overline{\frac{S_e}{P_e}}$  en que la barra indica promedio espacial

para toda la columna. De hecho, la integral de  $S_e$  produce el volumen de huecos y la integral de  $P_e$  produce el área superficial de partículas. Para partículas esféricas de diámetro  $d$ , y englobando  $C_f$  más los factores numéricos y la razón ( $L_e/L$ ) en que  $L$  es la longitud del medio, en un solo coeficiente  $f_{mp}$ , se obtiene:

$$\Delta(p + \gamma h) = f \cdot \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^3} \cdot \frac{L}{d} \cdot \rho \cdot u_s^2 \quad [3.5.6]$$

En que  $f_{mp}$  es función de un  $Re$  definido en términos del radio hidráulico  $R_h$  (y de la forma de las partículas):

$$Re = \frac{1}{1 - \epsilon} \cdot \frac{d \cdot u_s}{\nu} \quad [3.5.7]$$

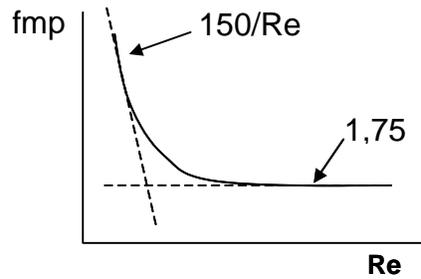
La ecuación empírica de Ergun es:

$$f = \frac{150}{Re} + 1,75 \quad [3.5.8]$$

O, explícitamente:

$$\Delta(p + \gamma h) = \left( \frac{150}{Re} + 1,75 \right) \cdot \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^3} \cdot \frac{L}{d} \cdot \rho \cdot u_s^2 \quad [3.5.9]$$

Asíntotas:



**Figura 3.5.1. Gráfico esquemático de la ecuación empírica de Ergun. Ver Figura 3.5.2 con la ecuación de Ergun graficada.**

Para  $Re < 10$ ,

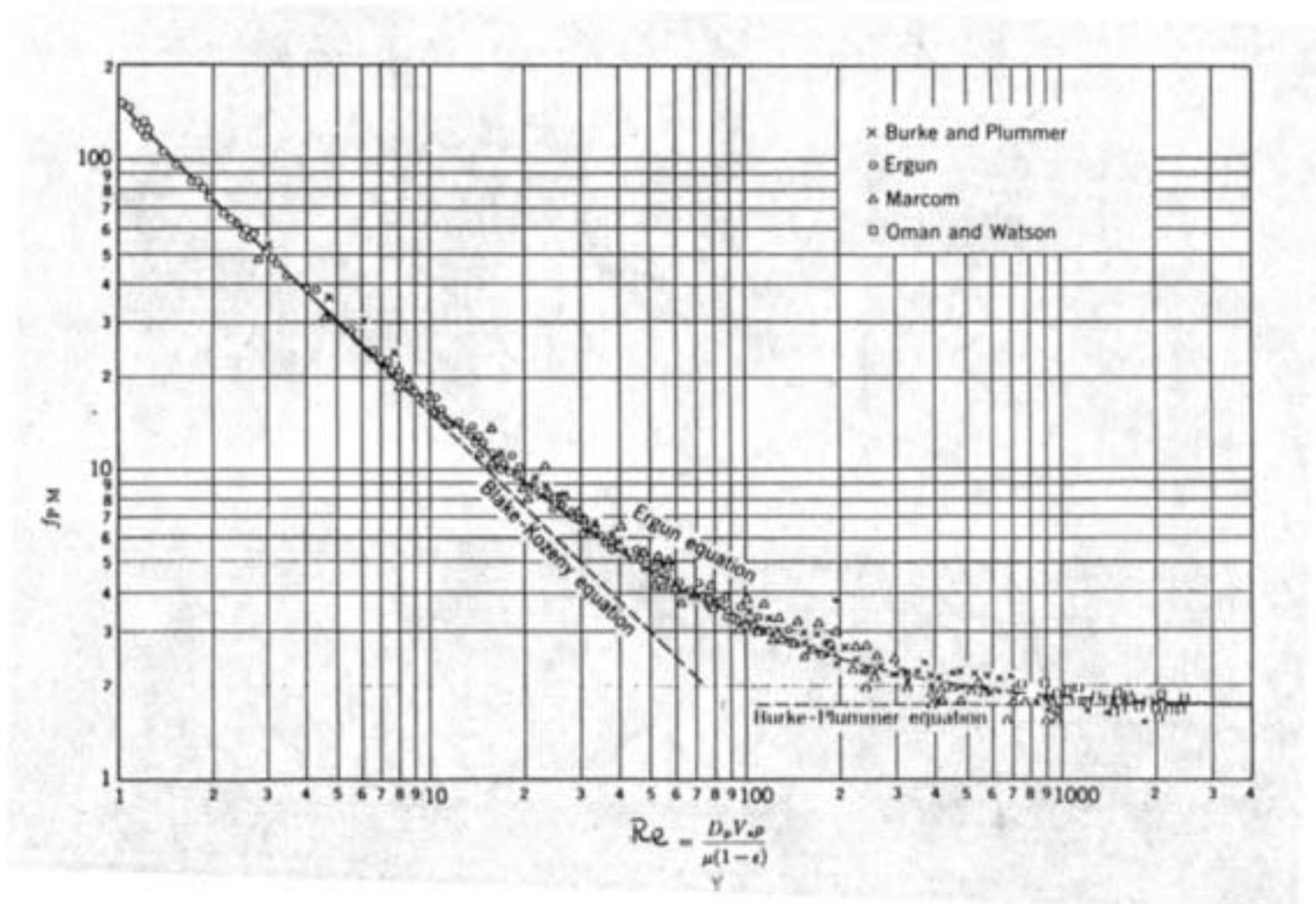
$$f = \frac{150}{Re}; \quad \Delta(p + \gamma h) = 150 \cdot \frac{(1 - \epsilon)^2}{\epsilon^3} \cdot \frac{\mu \cdot L \cdot u_s}{d^2} \quad [3.5.10]$$

llamada ecuación de Blake-Kozeny.

Para  $Re > 1000$ ,

$$f = 1,75 \quad \Delta(p + \gamma h) = 1,75 \cdot \frac{(1 - \epsilon)^2}{\epsilon^3} \cdot \frac{L}{d} \cdot \rho \cdot u_s^2 \quad [3.5.11]$$

llamada ecuación de Burke-Plummer.



**Figura 3.5.2. Ecuación de Ergun graficada mostrando sus dos asíntotas: ec. De Blake-Kozeny y ec. De Burke-Plummer.**