

CAPÍTULO 3

OTROS SISTEMAS DE FLUJO

3.1.- Flujo laminar y turbulento en tuberías para fluidos no newtonianos

3.1.1.- Plástico de Bingham

Recordando su ecuación reológica:

$$\tau = \tau_C + \eta \cdot \frac{dv}{dn} \quad [1.4.5]$$

En que:

τ_C : esfuerzo de ruptura

η : viscosidad plástica

Flujo laminar en tubería circular

Usando la ecuación 2.1.24:

$$\frac{Q}{\pi \cdot R^3} = \frac{1}{\tau_0^3} \int_0^{\tau_0} \tau^2 \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau \quad [2.1.24]$$

se reemplaza la función inversa, que en este caso es:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dn} \right) &= 0 & \text{para } \tau < \tau_C \\ \left(\frac{dv}{dn} \right) &= \frac{1}{\tau} \cdot (\tau - \tau_C) & \text{para } \tau \geq \tau_C \end{aligned} \quad [3.1.1]$$

$$\frac{Q}{\pi \cdot R^3} = \frac{1}{\tau_0^3} \cdot \int_0^{\tau_C} \tau^2 \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau + \frac{1}{\tau_0^3} \cdot \int_{\tau_C}^{\tau_0} \tau^2 \cdot \frac{(\tau - \tau_C)}{\eta} \cdot d\tau \quad [3.1.2]$$

$$\frac{Q}{\pi \cdot R^3} = 0 + \frac{1}{\tau_0^3} \cdot \int_{\tau_C}^{\tau_0} \tau^2 \cdot \frac{(\tau - \tau_C)}{\eta} \cdot d\tau$$

El resultado de la integración es la ecuación de Buckingham

$$\frac{8 \cdot V}{D} = \frac{\tau_0}{\eta} \cdot \left[1 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{\tau_c}{\tau_0} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\tau_c}{\tau_0} \right)^4 \right] \quad [3.1.3]$$

Esta ecuación tiende a una asíntota cuando $\tau_0 \gg \tau_c$:

$$\frac{8 \cdot V}{D} \xrightarrow{\tau_0 \gg \tau_c} \frac{\tau_0}{\eta} \cdot \left[1 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{\tau_c}{\tau_0} \right) \right] \quad [3.1.4]$$

El pseudo-diagrama reológico se muestra en la Figura 3.1.1, la ecuación 3.1.3 en línea llena y la asíntota 3.1.4 en la línea de segmentos.

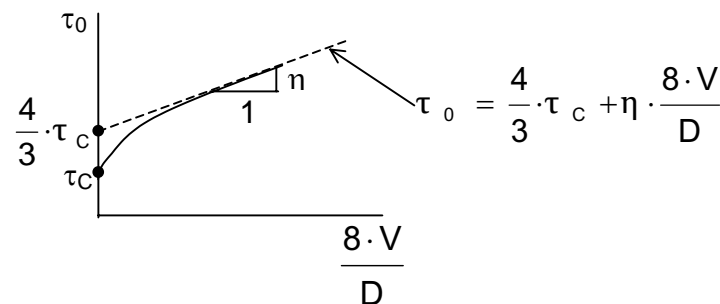


Figura 3.1.1. Pseudo-diagrama reológico para plástico de Bingham.

Para la medición de propiedades reológicas, se construye la asíntota con un número suficiente de puntos que definan una línea recta. Su pendiente es η y su intercepción en el origen determina $(4/3) \cdot \tau_c$.

Notar que, cuando τ_c tiende a cero, el plástico de Bingham tiende al comportamiento newtoniano.

Para la aplicación al diseño, conviene llevar la ecuación 3.1.3 a una forma adimensional. Se define un número de Reynolds efectivo en base a la viscosidad aparente para τ_0 tendiendo a infinito, que corresponde a η .

$$Re_{\infty} = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu_{ap,\infty}} = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\eta} \quad [3.1.5]$$

El otro adimensional es el número de Hedstrom He :

$$He = \frac{\tau_c \cdot \rho \cdot D^2}{\eta^2} \quad [3.1.6]$$

La ecuación de Buckingham 3.1.3 toma la forma:

$$\frac{1}{Re_{\infty}} = \frac{Cf}{16} - \frac{1}{6} \cdot \frac{He}{Re_{\infty}^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{He^4}{Cf^3 \cdot Re_{\infty}^8} \quad [3.1.7]$$

Donde Cf es el coeficiente de fricción de Fanning.

La ecuación 3.1.7 se puede graficar como en la Figura 3.1.2. La línea llena corresponde al fluido newtoniano: en régimen laminar, es la recta:

$$Cf = \frac{16}{Re_{\infty}}, \text{ o } f = \frac{64}{Re_{\infty}} \quad 4 \cdot Cf = f \quad [3.1.8]$$

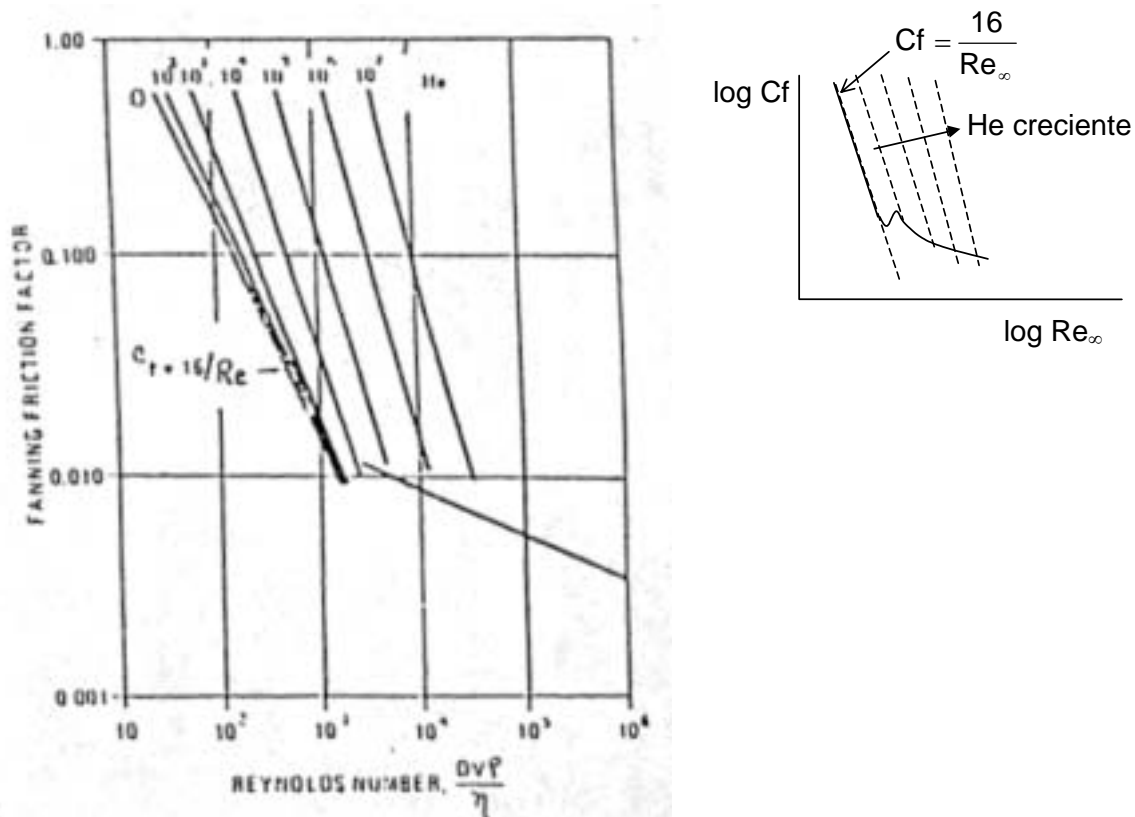


Figura 3.1.2. Gráfico de la ecuación de Buckingham adimensional.

En régimen turbulento, se muestra la curva para pared lisa. Las líneas de segmentos son curvas paramétricas para $Cf = Cf(Re_{\infty})$ con He como parámetro (régimen laminar). La transición a flujo turbulento ocurre cuando las curvas paramétricas cruzan la curva inferior para pared lisa.

Datos empíricos para el número de Reynolds crítico (transición a turbulencia) se dan en otra figura como la siguiente:

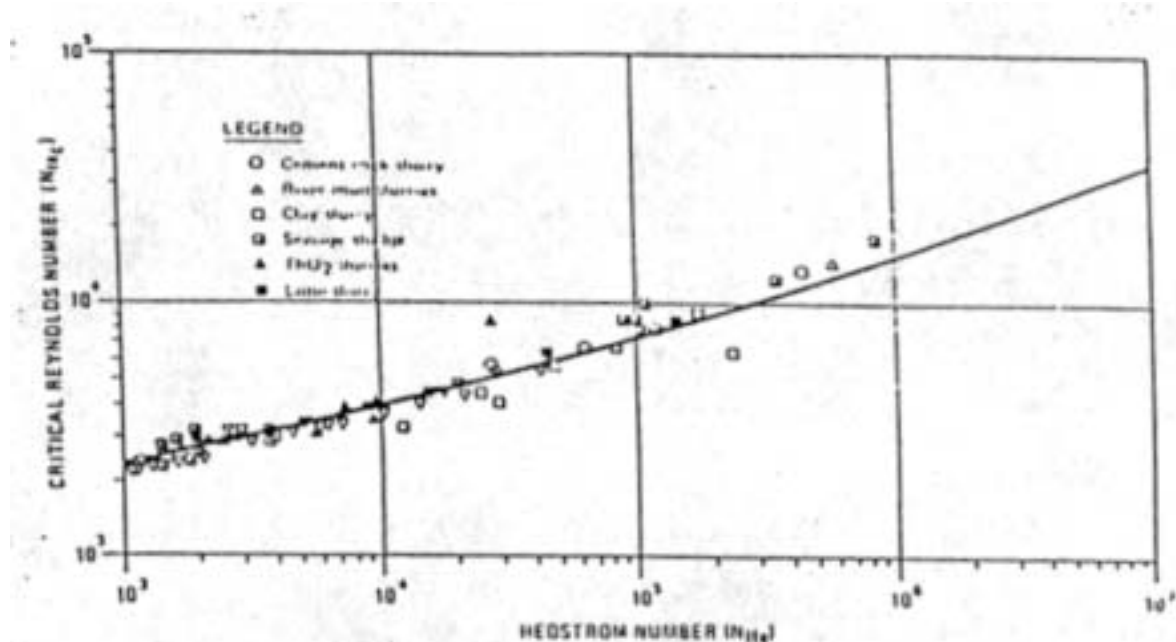


Figura 3.1.3. Número de Reynolds crítico en función del número de Hedstrom.

Valores importantes: $He = 10^3 \rightarrow Re = 2,3 \cdot 10^3$
 $He = 10^6 \rightarrow Re = 1,5 \cdot 10^4$

El plástico de Bingham es más estable que el fluido newtoniano frente a la turbulencia.

Para flujo turbulento, se puede usar el gráfico de Moody sin gran error; en todo caso, el plástico de Bingham tiende a dar coeficientes de fricción menores que el fluido newtoniano (el error está del lado de la seguridad en el diseño).

3.1.2.- Fluido de ley potencial

Recordando su ecuación reológica:

$$\tau = K \cdot \left(\frac{dv}{dn} \right)^m \quad [1.4.6]$$

En que:

K: índice de consistencia

m: índice de comportamiento

Se tiene:

$$\left(\frac{dv}{dn}\right) = \left(\frac{\tau}{K}\right)^{1/m} \quad [3.1.9]$$

Reemplazando en la ecuación 2.1.24 e integrando, se llega a la siguiente ecuación para flujo laminar:

$$\tau_0 = K \cdot \left(\frac{3 \cdot m + 1}{4 \cdot m}\right)^m \cdot \left(\frac{8 \cdot V}{D}\right)^m \quad [3.1.10]$$

Definiendo K' como:

$$K' = K \cdot \left(\frac{3 \cdot m + 1}{4 \cdot m}\right)^m \quad [3.1.11]$$

Se obtiene el pseudo-diagrama reológico en la forma:

$$\tau_0 = K' \cdot \left(\frac{8 \cdot V}{D}\right)^m \quad [3.1.12]$$

En un gráfico logarítmico (Figura 3.1.4), los puntos experimentales en una medición reológica definen una línea recta, de pendiente m , con K' definido en el valor: $\frac{8 \cdot V}{D} = 1$, o sea, $\log\left(\frac{8 \cdot V}{D}\right) = 0$

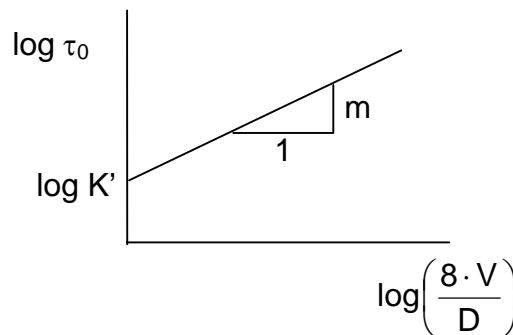


Figura 3.1.4. Diagrama pseudo-reológico para fluido de ley potencial.

La transición a flujo turbulento se define con un número de Reynolds efectivo basado en la viscosidad aparente:

$$Re_{ef} = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu_{ap}} \quad [3.1.13]$$

$$\mu_{ap} = \frac{\tau_0}{\left(\frac{8 \cdot V}{D}\right)} = K' \left(\frac{8 \cdot V}{D}\right)^{m-1} \quad [3.1.14]$$

Reemplazando 3.1.14 en 3.1.13:

$$Re_{ef} = \frac{\rho \cdot V^{2-m} \cdot D^m}{K' (8)^{m-1}} \quad [3.1.15]$$

Esta definición satisface $f = \frac{64}{Re_{ef}}$ en flujo laminar y tiende a Re (newtoniano) cuando m tiende a 1.

La transición a flujo turbulento ocurre para $Re_{ef} = 2 \cdot 10^3$. En flujo turbulento, se obtienen coeficientes de fricción inferiores a los del gráfico de Moody. El gráfico de Dodge-Metzner muestra valores experimentales para tuberías lisas y algunas extrapolaciones.

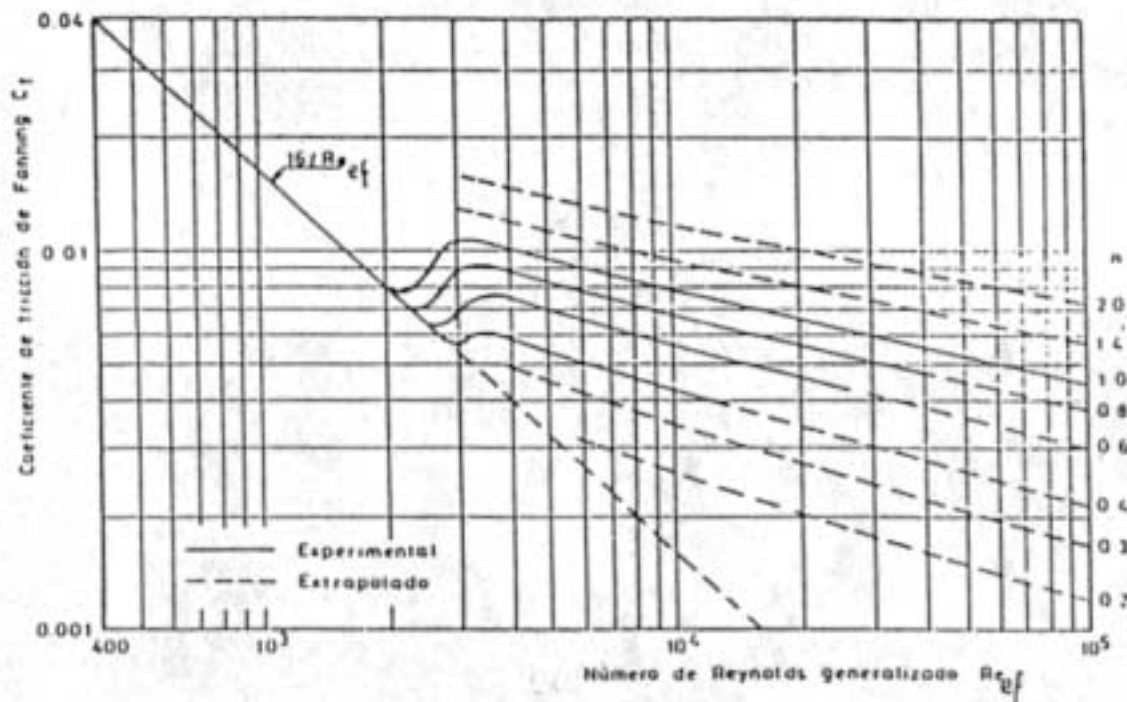


Figura 3.1.5. Gráfico de la fórmula de Dodge y Metzner para flujo en conductos (lisos), de fluido de ley potencial.

3.2.- Medición de propiedades reológicas

3.2.1- Suspensiones sólido-líquido homogéneas

Si los sólidos son de tamaño pequeño o la viscosidad del líquido es alta, la tendencia de las partículas a sedimentar será baja y se podrá considerar la suspensión como estable, con las partículas distribuidas en forma homogénea.

En este caso, la suspensión pasa a comportarse como un pseudo-líquido, que tiene sus propiedades reológicas específicas, distintas de las del líquido y los sólidos por separado.

Definiciones y nomenclatura para suspensiones:

Subíndices: ()_s sólidos; ()_f fluido; ()_m mezcla

$$s = \frac{\rho_s}{\rho_{H_2O}} \quad \text{gravedad específica} \quad [3.2.1]$$

$$s_f = \frac{\rho_s}{\rho_f} \quad \text{densidad específica} \quad [3.2.2]$$

ρ_m : densidad media de la mezcla

$$C_V = \frac{\forall_s}{\forall_m} \quad \text{fracción volumétrica de sólido} \quad [3.2.3]$$

$$C_W = \frac{W_s}{W_m} \quad \text{fracción másica de sólidos} \quad [3.2.4]$$

Ecuaciones de conversión:

$$\rho_m = \frac{s_f \cdot \rho_f}{C_W + s_f \cdot (1 - C_W)} = \rho_f \cdot [1 + (s_f - 1) \cdot C_V] = \rho_f \cdot (1 - C_V) + \rho_s \cdot C_V \quad [3.2.5]$$

$$C_V = \frac{C_W}{C_W + s_f \cdot (1 - C_W)} \quad [3.2.6]$$

$$C_W = \frac{s_f \cdot C_V}{1 + (s_f - 1) \cdot C_V} \quad [3.2.7]$$

Cuando la sedimentación es significativa, la suspensión se hace heterogénea y no puede tratarse como un pseudo-líquido.

Viscosidad de suspensiones

Para comportamiento newtoniano, se puede predecir la viscosidad de una suspensión diluida por la ecuación de Einstein:

$$\mu_r = \frac{\mu_m}{\mu_f} = 1 + 2,5 \cdot C_V \quad [3.2.8]$$

μ_r es la viscosidad relativa. La ecuación de Einstein no tiene mucha utilidad por su restricción a concentraciones demasiado bajas. Pero sirve de apoyo para extenderla empíricamente a concentraciones altas. Una de estas extensiones es la fórmula de Thomas:

$$\mu_r = \frac{\mu_m}{\mu_f} = 1 + 2,5 \cdot C_V + 10,05 \cdot C_V^2 + 0,00273 \cdot \exp(16,6 \cdot C_V) \quad [3.2.9]$$

Esta ecuación se ha graficado para facilitar su aplicación. Dependiendo de la forma de las partículas, las mayores concentraciones C_V son del orden de 50%; más allá, es una masa compacta que no fluye.

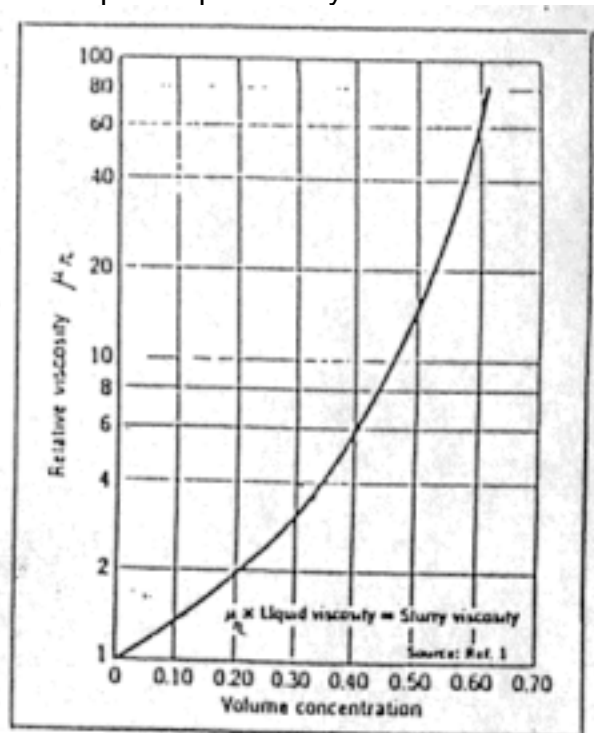


Figura 3.2.1. Viscosidad de suspensiones en función de la concentración volumétrica.

No se puede saber a priori si una suspensión tendrá comportamiento newtoniano o no newtoniano. Debe recurrirse a la experiencia.

3.3.- Flujos isentrópicos

Recordando la ecuación 1.5.26, de balance de energía para fluido compresible:

$$\left(i + \frac{v^2}{2}\right)_{Ss} - \left(i + \frac{v^2}{2}\right)_{Se} = \frac{\Delta C}{Qm \cdot \Delta t} - \frac{\Delta W_E}{Qm \cdot \Delta t} \quad [1.5.26]$$

Conviene introducir como velocidad de referencia la velocidad del sonido c , definida como la velocidad de propagación de una pequeña onda de presión en forma isentrópica.

Para gases ideales se demuestra que: $c = \sqrt{k \cdot R \cdot T}$ [3.3.1]

Se define el número de Mach M por: $M = \frac{v}{c}$ [3.3.2]

Por tanto:

$M < 1$ significa $v < c$, flujo subsónico o subcrítico

$M > 1$, significa $v > c$, flujo supersónico o supercrítico

$M = 1$ corresponde a la transición o crisis (la "barrera del sonido")

3.4.- Flujo compresible isotérmico con fricción

Si la densidad de un gas varía en forma significativa, no puede haber flujo con velocidad constante. Se considera aquí un flujo en conducto uniforme (D constante) y estacionario ($Qm = \rho \cdot V \cdot S = \text{constante}$), pero con variación de la velocidad. La ecuación de cantidad de movimiento es:

$$\sum_{SM} \vec{F} = Qm \cdot (\vec{V}_s - \vec{V}_e) \quad [1.5.28]$$

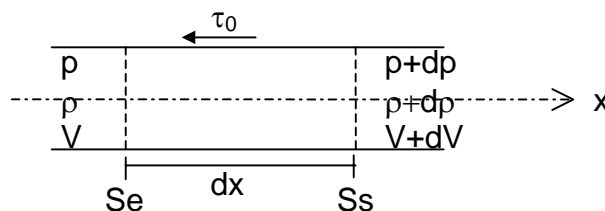


Figura 3.4.1. Diagrama esquemático del volumen de control sobre el cual se deben efectuar los balances de mas y cantidad de movimiento.

Proyectando sobre el eje x:

$$\sum F_x = p \cdot S - (p + dp) \cdot S - \tau_0 \cdot P \cdot dx \quad [3.4.1]$$

$$\sum F_x = \rho \cdot V \cdot S \cdot (V + dV - V) \quad [3.4.2]$$

Para sección circular, se reduce a :

$$dp + 4 \cdot \tau_0 \cdot \frac{dx}{D} + \rho \cdot V \cdot dV = 0 \quad [3.4.3]$$

De $Q_m = \rho \cdot V \cdot S = \text{constante}$, con $S = \text{constante}$, se tiene: $\rho \cdot V = \text{constante}$. Con $T = \text{constante}$, se tiene μ constante. Por tanto:

$$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} = \text{constante} \quad [3.4.4]$$

Podemos suponer entonces que el coeficiente de fricción es constante:

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \cdot f \cdot \rho \cdot V^2 \quad [3.4.5]$$

Reemplazando 3.3.2, 3.4.5 en 3.4.3 y usando la condición: $p = \rho \cdot R \cdot T$ o $p/\rho = \text{constante}$, por tanto:

$$\frac{dp}{\rho} = -\frac{dV}{V} = \frac{dp}{p} \quad [3.4.6]$$

Se obtiene:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{2} \cdot \frac{dx}{D} \cdot \frac{k \cdot M^2}{1 - k \cdot M^2} \quad [3.4.7]$$

Esta ecuación muestra que el flujo isotérmico tiende a una singularidad cuando $1 - k \cdot M^2 = 0$, en la cual dp tiende a infinito. Se entiende que al acercarse a esta condición el flujo no puede seguir siendo isotérmico. Por tanto, la hipótesis de flujo isotérmico lleva implícita la restricción de que la longitud L del conducto sea $\ll L_{\max}$, en que L_{\max} está dado por $1 - k \cdot M^2 = 0$. Con esta salvedad, se integra 3.4.7 obteniéndose:

$$\frac{p_e^2 - p_s^2}{p_e^2} = k \cdot Me^2 \cdot \left[2 \cdot \ln \frac{p_e}{p_s} + f \cdot \frac{L}{D} \right] \quad [3.4.8]$$

$$\text{En que: } k \cdot \text{Me}^2 = \frac{Qm^2}{\rho_e \cdot \rho_e \cdot S^2} \quad [3.4.9]$$

El coeficiente de fricción f se obtiene del gráfico de Moody. Para conductos largos, el término logarítmico tiende a ser despreciable frente al término en f y puede suprimirse para facilitar los cálculos. Esta posibilidad debe verificarse con los datos del problema.

3.5.- Flujo a través de medios permeables.

El fluido se desplaza a través de la matriz de poros intersticiales de un medio granular.

Casos naturales: agua subterránea
 Yacimientos de petróleo y gas natural

Casos industriales: filtración
 Torres rellenas o empacadas (operaciones de absorción, catálisis, etc.)
 Secado de granos

Ecuación de Darcy (usada principalmente en los casos naturales)

$$u_s = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{d(p + \gamma h)}{dx} \quad [3.5.1]$$

En que u_s es la velocidad superficial (más propiamente, es el flujo por unidad de área), definida por:

$$u_s = \frac{Q}{S} \quad [3.5.2]$$

Y S es el área total del medio y no el área abierta al paso del fluido.

k es el coeficiente de permeabilidad, que caracteriza al medio (coeficiente empírico)

Modelo para medios particulados

En los casos industriales, interesa la pérdida de carga a partir de las características de la partícula.

$$\epsilon = \text{porosidad} = \frac{\text{volumen de huecos}}{\text{volumen total}} \quad [3.5.3]$$

V = velocidad efectiva del fluido en los intersticios.

Como $Q = u_s \cdot S = V \cdot Sh$, en que Sh es el área de huecos en una sección transversal, con $Sh = S \cdot \epsilon$, se obtiene: $u_s = V \cdot \epsilon$.

Se modela al medio como un haz de conductos en paralelo, cada conducto de longitud L_e , sección S_e , perímetro P_e . Estando en paralelo, la pérdida de carga es la misma para todos los conductos:

$$\Delta(p + \gamma h) = C_f \cdot \frac{L_e}{R_h} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \quad [3.5.4]$$

$$R_h = \frac{S_e}{P_e} \quad [3.5.5]$$

Se estima un R_h promedio como: $\overline{\frac{S_e}{P_e}}$ en que la barra indica promedio espacial

para toda la columna. De hecho, la integral de S_e produce el volumen de huecos y la integral de P_e produce el área superficial de partículas. Para partículas esféricas de diámetro d , y englobando C_f más los factores numéricos y la razón (L_e/L) en que L es la longitud del medio, en un solo coeficiente f_{mp} , se obtiene:

$$\Delta(p + \gamma h) = f \cdot \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^3} \cdot \frac{L}{d} \cdot \rho \cdot u_s^2 \quad [3.5.6]$$

En que f_{mp} es función de un Re definido en términos del radio hidráulico R_h (y de la forma de las partículas):

$$Re = \frac{1}{1 - \epsilon} \cdot \frac{d \cdot u_s}{\nu} \quad [3.5.7]$$

La ecuación empírica de Ergun es:

$$f = \frac{150}{Re} + 1,75 \quad [3.5.8]$$

O, explícitamente:

$$\Delta(p + \gamma h) = \left(\frac{150}{Re} + 1,75 \right) \cdot \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^3} \cdot \frac{L}{d} \cdot \rho \cdot u_s^2 \quad [3.5.9]$$

Asíntotas:

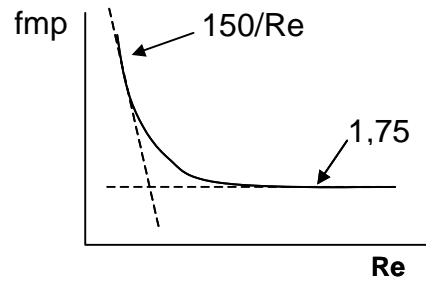


Figura 3.5.1. Gráfico esquemático de la ecuación empírica de Ergun. Ver Figura 3.5.2 con la ecuación de Ergun graficada.

Para $Re < 10$,

$$f = \frac{150}{Re}; \quad \Delta(p + \gamma h) = 150 \cdot \frac{(1 - \epsilon)^2}{\epsilon^3} \cdot \frac{\mu \cdot L \cdot u_s}{d^2} \quad [3.5.10]$$

llamada ecuación de Blake-Kozeny.

Para $Re > 1000$,

$$f = 1,75 \quad \Delta(p + \gamma h) = 1,75 \cdot \frac{(1 - \epsilon)^2}{\epsilon^3} \cdot \frac{L}{d} \cdot \rho \cdot u_s^2 \quad [3.5.11]$$

llamada ecuación de Burke-Plummer.

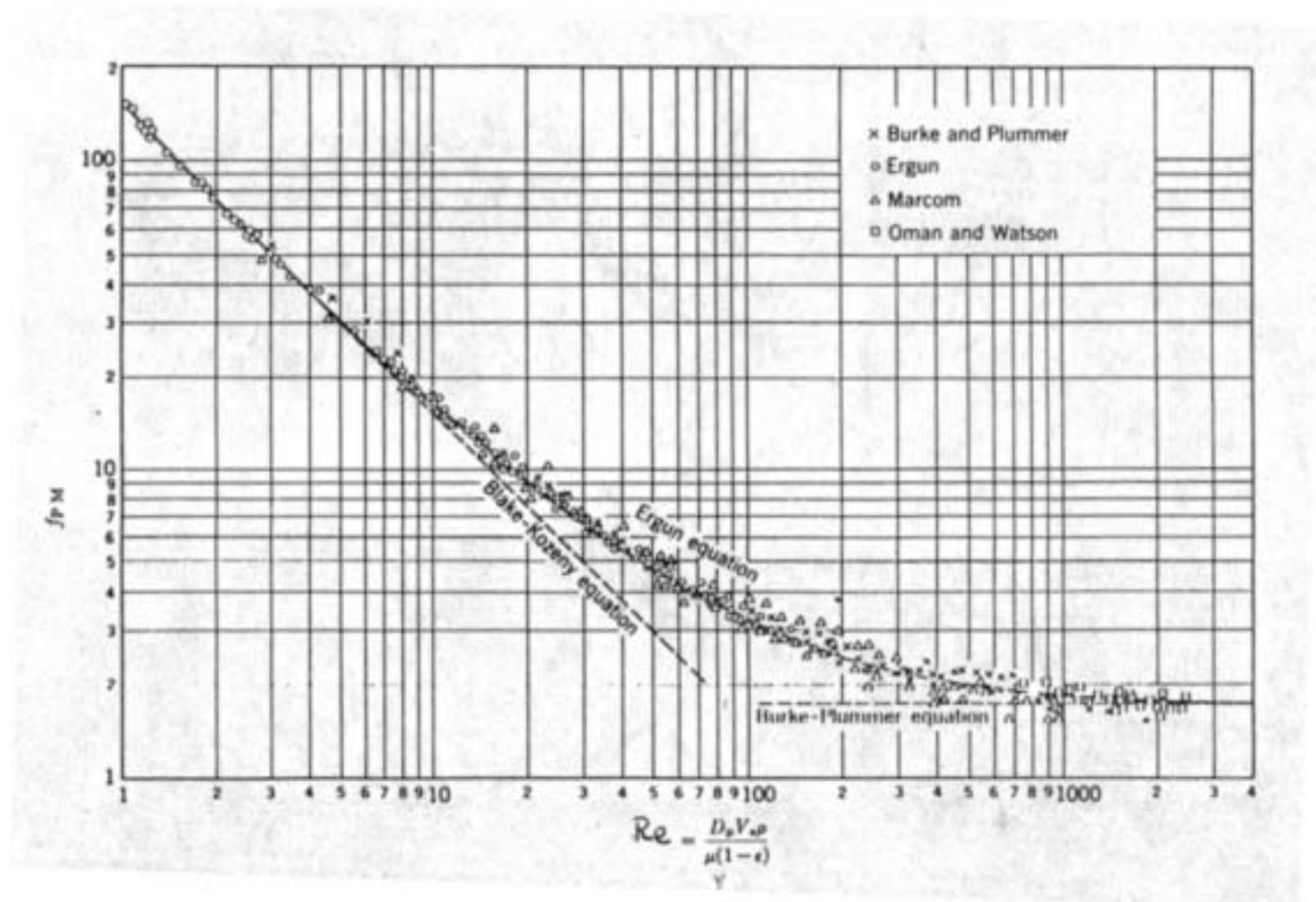


Figura 3.5.2. Ecuación de Ergun graficada mostrando sus dos asíntotas: ec. De Blake-Kozeny y ec. De Burke-Plummer.