

## Respuesta: Tarea 1 Microeconomía Avanzada - 2005.

**Profesor:** Jorge Rivera.

**Ayudante:** Reinaldo Guerra

### Problema 1

Suponga dada una economía de intercambio de  $2 \times 2$  (dos individuos, dos bienes). Las funciones de utilidad de cada consumidor son  $u_1(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$  y  $u_2(x, y) = x^\beta y^{1-\beta}$  y sus dotaciones  $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{12})$  y  $\omega_2 = (\omega_{21}, \omega_{22})$  respectivamente.

Una transferencia en esta economía consiste en el traspaso de riqueza entre individuos. Así, si el individuo 1 le transfiere  $R$  riqueza al individuo 2, a los precios  $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2$  las restricciones presupuestarias de ambos son

$$B_1(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1 x + p_2 y \leq p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} - R\}$$

$$B_2(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1 x + p_2 y \leq p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22} + R\}$$

respectivamente. En general,  $R$  puede ser positivo (1 le traspasa a 2) o negativo (a la inversa).

- (a) Dado el precio  $p = (p_1, p_2)$  y una transferencia  $R \in \mathbb{R}$ , determine las demandas de ambos individuos por ambos bienes. Denotemos las demandas por  $x_i(p, R)$  e  $y_i(p, R)$ , con  $i = 1, 2$ .

**Respuesta.** En este caso, al maximizar la utilidad para cada consumidor se tiene directamente que

$$x_1(p, R) = \frac{\alpha(p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} - R)}{p_1}, \quad y_1(p, R) = \frac{(1 - \alpha)(p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} - R)}{p_2}$$

$$x_2(p, R) = \frac{\beta(p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22} + R)}{p_1}, \quad y_2(p, R) = \frac{(1 - \beta)(p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22} + R)}{p_2}.$$

Definamos un equilibrio competitivo en esta economía como un vector de precios  $p^* = (p_1^*, p_2^*)$  y una transferencia  $R^*$  tal que la demanda agregada por cada bien, a los precios y transferencias indicadas, coincide con la cantidad total de ese bien en la economía.

- (b) Determine la condición de equilibrio para la economía y muestre que las ecuaciones para ambos bienes son linealmente dependientes.

**Respuesta.** La condición de equilibrio implica que

$$\frac{\alpha(p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} - R)}{p_1} + \frac{\beta(p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22} + R)}{p_1} = \omega_{11} + \omega_{21} \quad [1]$$

$$\frac{(1 - \alpha)(p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} - R)}{p_2} + \frac{(1 - \beta)(p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22} + R)}{p_2} = \omega_{12} + \omega_{22} \quad [2].$$

De la ecuación [1] sigue que

$$[1] \Leftrightarrow (\alpha - 1)p_1 \omega_{11} + \alpha p_2 \omega_{12} - \alpha R + (\beta - 1)p_1 \omega_{21} + \beta p_2 \omega_{22} + \beta R = 0$$

$$[2] \Leftrightarrow (1 - \alpha)p_1 \omega_{11} - \alpha p_2 \omega_{12} - (1 - \alpha)R + (1 - \beta)p_1 \omega_{21} - \beta p_2 \omega_{22} + (1 - \beta)R = 0,$$

es decir

$$[2] \Leftrightarrow (1 - \alpha)p_1 \omega_{11} - \alpha p_2 \omega_{12} + \alpha R + (1 - \beta)p_1 \omega_{21} - \beta p_2 \omega_{22} - \beta R = 0,$$

por lo que la ecuación [1] es menos la ecuación [2], y así disponemos entonces de sólo una ecuación, digamos la [1] para determinar el equilibrio.

De lo hecho en la parte (b) se puede asumir que  $p_1^* = 1$ , con lo cual queda indeterminado sólo el precio del segundo bien.

- (c) Muestre que bajo el supuesto  $p_1^* = 1$ , si ambos individuos son iguales entonces para cualquier nivel de transferencia  $R$  de tal forma que la riqueza total de cada individuo es positiva (**transferencia factible**), el precio de equilibrio de la economía con transferencias coincide con el precio de equilibrio que tendría la economía sin transferencias. Ocurre lo mismo con las demandas? Muestre además que para cada nivel de transferencia factible existe un único equilibrio en esta economía.

**Respuesta.** Por lo deducido anteriormente, podemos entonces asumir que en el equilibrio  $p_1^* = 1$ , con lo cual la ecuación queda como

$$(\alpha - 1)\omega_{11} + \alpha p_2 \omega_{12} - \alpha R + (\beta - 1)\omega_{21} + \beta p_2 \omega_{22} + \beta R = 0.$$

Bajo el supuesto anterior, si ambos individuos son iguales ( $\alpha = \beta$ ) la ecuación se convierte en

$$(\alpha - 1)\omega_{11} + \alpha p_2 \omega_{12} + (\alpha - 1)\omega_{21} + \beta p_2 \omega_{22} = 0$$

cuya solución es precisamente la que se tendría en situación sin transacciones. Notemos que en este caso, el precio de equilibrio no depende de  $R$ , razón por la cual se puede interpretar que el precio de equilibrio es el mismo con o sin transacciones. Obviamente las demandas se verán modificadas (ver ecuación de la demanda) y además es directo que para cualquier nivel de transferencias, dado  $p_1^* = 1$ , hay entonces un único precio  $p_2^*$  de equilibrio (resolver la ecuación de la parte (b) anterior).

## Problema 2

- a.- Dada una economía con dos bienes y tres consumidores definida como

$$u_1(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad u_2(x, y) = \min\{x, y\}, \quad u_3(x, y) = ye^x$$

$$\omega_1 = (1, 2), \quad \omega_2 = (3, 4), \quad \omega_3 = (1, 1),$$

determine la función exceso de demanda y el precio de equilibrio si existe.

- b.- Determine, si existe, el equilibrio en una economía con dos bienes y dos agentes, donde las utilidades son lineales y las dotaciones iniciales estrictamente positivas.

## Problema 3

Suponga que en la economía hay dos grupos de individuos, conformados por  $m$  y  $n$  agentes respectivamente. Los del primer grupo tienen funciones de utilidad  $u_1(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$  y dotaciones iniciales  $(\omega_1, 0)$  y aquellos del segundo grupo  $u_2(x, y) = x^\beta y^{1-\beta}$  y dotaciones iniciales  $(0, \omega_2)$ . Determine, si existe, un equilibrio en esta economía.

**Respuesta.** Si el precio de equilibrio es de la forma  $(1, p)$ , entonces la demanda de un individuo tipo uno por el bien uno es

$$x_{11}(p) = \alpha \omega_1$$

mientras que aquella del tipo dos es

$$x_{21}(p) = \beta \cdot [p \omega_2].$$

Luego, la demanda agregada es

$$X_1(p) = m(\alpha \omega_1) + n(\beta \cdot [p \omega_2]).$$

Por lo tanto, la condición de equilibrio implica que

$$m(\alpha\omega_1) + n(\beta \cdot p \omega_2) = m\omega_1 \quad \Rightarrow \quad p^* = \frac{m(1-\alpha)\omega_1}{n\beta\omega_2}.$$

#### Problema 4

Suponga que en la economía hay dos tipos de individuos, cuyas cantidades son  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente, siendo sus funciones de utilidad dadas por  $u_1(x, y) = 1/2 \ln(x) + 1/3 \ln(y)$  y  $u_2(x, y) = 2x + y$  respectivamente. Las dotaciones iniciales de los “tipo un” son  $(1, 1)$  y  $(12, 12) \in \mathbb{R}^2$  para los “tipo dos”. Determine, si existe, el precio de equilibrio en esta economía. Determine además como varía el precio de equilibrio si el número de individuos tipo uno se incrementa.

#### Problema 5

Determine, si existe, el precio de equilibrio y las asignaciones de equilibrio de una economía donde  $u_1(x, y) = [x^a + \mu y^a]^{1/a}$  y  $u_2(x, y) = [x^b + \rho y^b]^{1/b}$ , siendo las dotaciones iniciales  $\omega_1 = (0, R) \in \mathbb{R}^2$  y  $\omega_2 = (R, 0) \in \mathbb{R}^2$ .

**Respuesta.** Cuando la función de utilidad es una CES, la condición necesaria de optimalidad (relación marginal de sustitución igual a cociente de precios) que permite determinar la demanda es (esto para individuo uno y precio de la forma  $(1, p)$ )

$$\frac{x_1^{a-1}}{\mu y_1^{a-1}} = \frac{1}{p},$$

con lo cual

$$y_1 = \left(\frac{p}{\mu}\right)^{\frac{1}{a-1}} x_1.$$

Por lo tanto, la demanda del individuo uno por el bien uno viene de

$$x_1 + p y_1 = 0 + p R \quad \Rightarrow \quad x_1 + p \left(\frac{p}{\mu}\right)^{\frac{1}{a-1}} x_1 = p R \quad \Rightarrow \quad x_1(p) = \frac{p R}{1 + p \left(\frac{p}{\mu}\right)^{\frac{1}{a-1}}}$$

Análogamente para el individuo dos se tiene que

$$x_2(p) = \frac{R}{1 + p \left(\frac{p}{\rho}\right)^{\frac{1}{b-1}}}.$$

Por lo tanto, la condición de equilibrio implica que

$$\frac{p R}{1 + p \left(\frac{p}{\mu}\right)^{\frac{1}{a-1}}} + \frac{R}{1 + p \left(\frac{p}{\rho}\right)^{\frac{1}{b-1}}} = R.$$

Para determinar si existe el precio de equilibrio debemos entonces tener garantías que la ecuación anterior tiene solución positiva. Note que dicha relación se puede re-escribir como

$$\frac{p}{1 + p^{\frac{a}{a-1}} \delta_1} + \frac{1}{1 + p^{\frac{b}{b-1}} \delta_2} = 1,$$

con  $\delta_1 = \mu^{\frac{1}{1-a}}$ ,  $\delta_2 = \rho^{\frac{1}{1-b}}$ . A partir de lo anterior, no es entonces claro que la ecuación anterior tenga solución, razón por la cual no habría garantía de existencia de equilibrio. Sin embargo, dado que las funciones de utilidad cumplen con todas las hipótesis requeridas y además las dotaciones totales son positivas, debe entonces existir un precio de equilibrio en esta economía, es decir, una solución a la ecuación anterior. Queda propuesto determinar dicho precio cuando  $a = b$ .

**Problema 6**

Considere una economía de intercambio con dos bienes y dos consumidores. Las dotaciones iniciales son  $\omega_1 = (10, 2)$  para el individuo uno y  $\omega_2 = (2, 10)$  para el individuo dos. Las funciones de utilidad de ambos son idénticas, dadas por  $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ , con  $0 < \alpha < 1$ .

- (a) Determine el precio de equilibrio en esta economía. Muestre además que las **asignaciones de equilibrio** son  $x_{11}^* = x_{12}^* = \alpha 10 + (1 - \alpha) 2$  y  $x_{21}^* = x_{22}^* = \alpha 2 + (1 - \alpha) 10$ .

Cómo explica Ud. que aun cuando las funciones de utilidad son idénticas, se produce intercambio en esta economía?

**Respuesta.** Dada una función de utilidad  $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$  y dadas dotaciones cualquiera  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para los bienes uno y dos respectivamente, el problema del consumidor es

$$\max x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad \text{s.a. } x_1 + p x_2 = \omega_1 + p \omega_2.$$

Las condiciones de optimalidad implican que

$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha}} = \frac{1}{p} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{x_1}{p}. \quad (1)$$

con lo cual, al reemplazar en la restricción presupuestaria, queda que

$$x_1 + p \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{x_1}{p} = \omega_1 + p \omega_2 \Rightarrow x_1(p) = \alpha[\omega_1 + p \cdot \omega_2].$$

Así, reemplazando las respectivas dotaciones iniciales, las demandas por bien uno de cada individuo son  $x_{11}(p) = \alpha[10 + 2 \cdot p]$  y  $x_{21}(p) = \alpha[2 + 10 \cdot p]$ . La condición de equilibrio es entonces

$$\alpha[10 + 2 \cdot p] + \alpha[2 + 10 \cdot p] = 12 \Rightarrow p^* = \frac{1-\alpha}{\alpha},$$

con lo cual, las demandas por bien uno y dos de cada individuo son iguales: reemplazar el precio  $p^*$  anterior en la Ecuación 2 para concluir que  $x_{11}(p^*) = x_{12}(p^*)$  y que  $x_{21}(p^*) = x_{22}(p^*)$ . Más aun, al hacer la sustitución correspondiente se tiene que la demanda por cada bien es dada por lo indicado en el enunciado:

$$x_{11}(p^*) = \alpha \left[ 10 + \frac{1-\alpha}{\alpha} 2 \right] = \alpha \cdot 10 + (1-\alpha) \cdot 2 = x_{12}(p^*).$$

Análogo con individuo dos. Por qué intercambian los individuos a pesar de ser iguales en preferencias? Básicamente por que el individuo uno desea parte del bien dos que posee el segundo y este a su vez desea parte del bien uno que posee el primero. etc...

- (b) Determine el **ingreso en el equilibrio** de cada individuo y muestre que el *individuo uno* es más rico que el *individuo dos* siempre y cuando  $\alpha > 1/2$ .

**Respuesta.** Dado el precio de equilibrio  $p^*$  como antes, el “ingreso” de los individuos uno y dos es

$$I_1^* = 10 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 2 \quad I_2^* = 2 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 10$$

respectivamente. Por lo tanto, el individuo uno “es más rico” que el dos siempre y cuando

$$10 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 2 > 2 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 10 \Rightarrow 8 > \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) 8 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} < 1$$

lo que se tiene si  $\alpha < 1/2$  como se ha indicado. La “razón económica” de lo anterior es que si  $\alpha < 1/2$ , ambos individuos prefieren más el bien dos que el uno (esto por que  $1 - \alpha > \alpha$ ).

### Problema 7

Suponga dadas las siguientes funciones:

$$z_1(p_1, p_2) = \frac{p_1 + 2p_2}{2p_1} - 1, \quad z_2(p_1, p_2) = \frac{p_1 + 2p_2}{2p_2} - 2.$$

Verifique que estas funciones cumplen con todas las propiedades de las funciones exceso de demanda. Calcule, si existe, el equilibrio competitivo en la economía donde las funciones de exceso de demanda son las anteriores.

**Respuesta.** Es directo verificar que la función exceso de demanda definida a partir de lo anterior cumple con todas las propiedades dadas por la Proposición 2.8 del apunte de curso. Para determinar el precio de equilibrio, basta con igualar ambas componentes a cero.

### Pregunta 8.

Comente las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta.

- (a) Si un individuo provoca una externalidad muy negativa en la economía, lo socialmente óptimo es propender a que dicha externalidad sea anulada, ya sea por un mecanismo de mercado (Coase) o por intervención directa de un planificador (Pigou).

**Respuesta.** No necesariamente el óptimo social ocurre cuando la externalidad es nula, pues socialmente el individuo que la provoca tiene un peso positivo en cualquier función de utilidad social.

- (b) Si precisamente un posible óptimo de Pareto de la economía es aquel donde todos los recursos son de propiedad de una única persona, cómo se explica entonces que exista un precio tal que dicha asignación sea un equilibrio de Walras.

**Respuesta.** Esto es falso, ya que para aplicar el argumento del Segundo Teorema de Bienestar se requiere que el óptimo de Pareto a descentralizar sea tal que todos los individuos tengan asignación positiva.

- (c) Un mecanismo alternativo para alcanzar óptimos de Pareto deseables es simplemente por medio de la fijación de los precios en vez de utilizar transferencias de bienes.

**Respuesta.** Esto en general no es posible, ya que solo modificando precios puede ocurrir que las demandas no sean compatibles con las dotaciones de los individuos.

- (d) Aun cuando el núcleo sea vacío, de todas formas puede existir equilibrio en la economía, pues el núcleo se refiere a “coaliciones” mientras que el equilibrio a “decisiones individuales”.

**Respuesta.** Falso, ya que si el núcleo es vacío, no puede haber equilibrio en la economía dado que este es precisamente un elemento del núcleo.

### Pregunta 9.

Considere dos economías de intercambio conformadas por  $m$  individuos (indexados por  $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ ) y dos bienes ( $\ell = 2$ ). Para ambas economías, las funciones de utilidad de un individuo  $i \in I$  son dadas por

$$u_i(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_i} x_2^{1-\alpha_i}.$$

Para la primera economía (llamada **la original**), las dotaciones iniciales del individuo  $i \in I$  son dadas por  $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2}) \in \mathbb{R}_{++}^2$ . La dotación total de bien uno es  $\omega_1$  y aquella de bien dos  $\omega_2$ ;  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  es el vector de dotaciones totales. Por otro lado, para la segunda economía (llamada **la final**), las dotaciones iniciales son una reasignación de las originales, de tal manera que para el individuo  $i \in I$  son dadas por

$$\bar{\omega}_i = \lambda\omega_i + (1 - \lambda)\rho_i\omega = (\bar{\omega}_{i1}, \bar{\omega}_{i2}),$$

siendo  $\lambda \in [0, 1]$  y  $\rho_i \in ]0, 1[$  **parámetros dados** tal que

$$\sum_{i \in I} \rho_i = 1.$$

Escogiendo el **bien uno como numerario**, se pide entonces lo siguiente.

- (a) Muestre que  $\bar{\omega}_i$ ,  $i \in I$ , es una reasignación de los recursos iniciales.

**Respuesta.** Para ello basta sumar las dotaciones:

$$\sum_{i \in I} \bar{\omega}_i = \sum_{i \in I} [\lambda\omega_i + (1 - \lambda)\rho_i\omega] = \lambda\omega + (1 - \lambda)\omega \sum_{i \in I} \rho_i = \omega.$$

- (b) Muestre que el precio de equilibrio para la economía original es  $(1, \mathbf{p})$  tal que

$$\mathbf{p} = \frac{\sum_{i \in I} (1 - \alpha_i)\omega_{i1}}{\sum_{i \in I} \alpha_i\omega_{i2}}$$

Determine además el precio de equilibrio de la economía final.

**Respuesta.** Para una función de utilidad como la indicada, la demanda del individuo  $i \in I$  por el bien 1, con dotaciones  $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2})$  es

$$x_{i1} = \alpha_i(\omega_{i1} + p\omega_{i2}).$$

Por lo tanto, la condición de equilibrio implica que

$$\sum_{i \in I} [\alpha_i(\omega_{i1} + \mathbf{p}\omega_{i2})] = \sum_{i \in I} \omega_{i1} \Rightarrow \mathbf{p} = \frac{\sum_{i \in I} (1 - \alpha_i)\omega_{i1}}{\sum_{i \in I} \alpha_i\omega_{i2}}.$$

Para la economía final, el resultado es análogo, reemplazando  $\omega_{ij}$  por  $\bar{\omega}_{ij}$ . Así, el precio de equilibrio es

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\sum_{i \in I} (1 - \alpha_i)\bar{\omega}_{i1}}{\sum_{i \in I} \alpha_i\bar{\omega}_{i2}},$$

donde

$$\bar{\omega}_{ij} = \lambda\omega_{ij} + (1 - \lambda)\rho_i\omega_j, \quad i \in I, \quad j = 1, 2.$$

- (c) Muestre que cuando  $\alpha_i = \alpha_j (= \alpha)$  para cada  $i, j$ , entonces los precios determinados en la parte anterior son coincidentes e iguales a  $(1, \mathbf{p}^*)$  con

$$\mathbf{p}^* = \frac{(1 - \alpha)\omega_1}{\alpha\omega_2}.$$

**Respuesta.** Si  $\alpha_i = \alpha_j (= \alpha)$ , entonces se tiene que

$$\mathbf{p} = \frac{\sum_{i \in I} (1 - \alpha_i) \omega_{i1}}{\sum_{i \in I} \alpha_i \omega_{i2}} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Análogamente,

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\sum_{i \in I} (1 - \alpha_i) \bar{\omega}_{i1}}{\sum_{i \in I} \alpha_i \bar{\omega}_{i2}} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i1}}{\sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i2}} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

ya que las dotaciones  $\bar{\omega}_i$  son factibles y luego, por componentes, suman  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2$ . Con esto entonces  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$  ( $= \mathbf{p}^*$ ).

Ahora bien, **bajo el supuesto que todos los individuos tienen la misma función de utilidad** (con parámetro  $\alpha$ ), denotemos entonces los ingresos de equilibrio por  $r_i$  y  $\bar{r}_i$  respectivamente, es decir,

$$r_i = \omega_{i1} + \mathbf{p}^* \omega_{i2}, \quad \bar{r}_i = \bar{\omega}_{i1} + \mathbf{p}^* \bar{\omega}_{i2}.$$

Finalmente, denote por  $R$  y  $\bar{R}$  el ingreso (riqueza) total para ambas economías, es decir,  $R = \sum_{i \in I} r_i$ ,  $\bar{R} = \sum_{i \in I} \bar{r}_i$ .

(d) Muestre que bajo el supuesto de **individuos idénticos** anterior, se tiene que

$$R = \bar{R}$$

y además

$$\frac{\bar{r}_i}{\bar{R}} = \lambda \frac{r_i}{R} + (1 - \lambda) \rho_i.$$

**Respuesta.** Notemos que

$$R = \sum_{i \in I} [\omega_{i1} + \mathbf{p}^* \omega_{i2}] = \omega_1 + \mathbf{p}^* \omega_2.$$

Por otro lado,

$$\bar{R} = \sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i1} + \mathbf{p}^* \sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i2} = \sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i1} + \mathbf{p}^* \sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i2} = \omega_1 + \mathbf{p}^* \omega_2,$$

con lo cual  $R = \bar{R}$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{r}_i}{\bar{R}} &= \frac{\bar{\omega}_{i1} + \mathbf{p}^* \bar{\omega}_{i2}}{\bar{R}} = \frac{\lambda \omega_{i1} + (1 - \lambda) \rho_i \omega_1 + \mathbf{p}^* \lambda \omega_{i2} + (1 - \lambda) \rho_i \omega_2}{R} = \\ &= \frac{\lambda \omega_{i1} + \lambda \mathbf{p}^* \omega_{i2}}{R} + \frac{(1 - \lambda) \rho_i (\omega_1 + \mathbf{p}^* \omega_2)}{R} = \frac{r_i}{R} + (1 - \lambda) \rho_i. \end{aligned}$$

**NOTA:** sólo como un comentario, con lo anterior entonces podemos concluir que con una adecuada elección de los parámetros  $\lambda$  y  $\rho_i$ ,  $i \in I$ , se puede implementar una “política” de reasignación de ingresos entre las personas.  $\square$

### Pregunta 10.

Suponga dada una economía de intercambio con  $m$  individuos, indexados por  $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ , cuyas funciones de utilidad y dotaciones iniciales son  $u_i : \mathbb{R}_+^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\omega_i \in \mathbb{R}_+^\ell$  respectivamente. La cantidad de bienes en la economía es  $\ell$  y  $\omega$  es la cantidad total de recursos iniciales. En todo lo que sigue, asuma que las funciones de utilidad son las usuales, es decir, crecientes por componentes, diferenciables y estrictamente cóncavas.

Para efectos de generar transferencias, vamos a considerar la existencia de un planificador central que decide sobre lo que llamaremos **derechos de consumo** y sobre una **regla de precios** que se impondrá exógenamente en la economía. Los **derechos de consumo** son una cantidad real  $r_i \in \mathbb{R}_+$  asignada a cada individuo. Denotemos por  $R$  la suma de todos los derechos asignados, e.d.,  $R = \sum_i r_i$ .

En este modelo, si el **precio de los bienes** es  $p \in \Delta_\ell$ , el **precio de los derechos** es  $q \in \mathbb{R}_+$  y  $s \in \mathbb{R}_+^\ell$  denota una **tasa de transformación de bienes en derechos** (todos valores por determinar), entonces **ASUMA** que el problema del consumidor es

$$\max_x u_i(x_i) \quad \text{s.a.} \quad (p + qs) \cdot x_i = p \cdot \omega_i + qr_i. \quad (2)$$

Encontrar equilibrios en esta economía corresponde a **determinar los precios**  $p$ ,  $q$  y  $s$  que hacen que las demandas correspondientes sean factibles, es decir,

si  $x_i(p, q, s, \omega_i)$  es una solución al problema (2), entonces diremos que  $p^*$ ,  $q^*$  y  $s^*$  son **precios de equilibrio** si

$$\sum_{i \in I} x_i(p^*, q^*, s^*, \omega_i) = \omega.$$

Finalmente, **y muy importante**, note que la cantidad de incógnitas del problema de equilibrio es  $2 \cdot \ell + 1$  ( $\ell$  por el lado de  $p$ ,  $\ell$  por  $s$  y una por  $q$ ), mientras que la cantidad de ecuaciones que definen el equilibrio son  $\ell$  (dadas por suma de demandas igual a dotaciones totales). De esta manera, el problema anterior presenta una indeterminación fundamental. A partir de lo anterior, con el fin de evitar la multiplicidad de equilibrios, se introduce lo que llamaremos una **regla de precios** en la economía que, como se ha indicado, es una herramienta adicional que posee un planificador central para reasignar recursos. La regla más simple que podemos imaginar es la que llamaremos **regla lineal**, dada por la siguiente relación entre los precios

$$s = \frac{1}{q} Ap,$$

siendo  $A \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$  una matriz real de  $\ell$  por  $\ell$ . Más aun, **asumiremos** que  $A$  es una matriz diagonal de la forma

$$A = \sigma[I],$$

donde  $\sigma > 0$  es un **escalar prefijado** e  $[I]$  la matriz identidad.

- (a) Muestre que bajo la regla de precios anterior (lineal-diagonal), si  $p$ ,  $s$  y  $q$  son precios de equilibrio, entonces necesariamente se debe cumplir que

$$q = \frac{\sigma}{R} p \cdot \omega,$$

y con ello concluya que, sin pérdida de generalidad, el problema del individuo se puede re-escribir como



$$\text{máx } u_i(x_i) \quad \text{s.a.} \quad p \cdot x_i = p \cdot \left[ \frac{\omega_i}{1+\sigma} + \left( \frac{\sigma}{1+\sigma} \right) \frac{r_i}{R} \omega \right]. \quad (3)$$

**Ind.:** usar la regla de precios para eliminar  $s$  y luego sumar las restricciones presupuestarias para obtener  $q$ . El problema (2) es directo usando el  $q$  ya obtenido.

**Respuesta.** De la regla de precios,

$$qs = \sigma p,$$

con lo cual, asumiendo que los precios son de equilibrio, sigue que

$$(p + \sigma p) \cdot x_i^* = p \cdot \omega_i + q r_i \Rightarrow (1 + \sigma)p\omega = p \cdot \omega + qR.$$

De esta manera,

$$q = \frac{\sigma}{R} p \cdot \omega.$$

Volviendo entonces al problema del consumidor, reemplazando  $q$  por lo anterior y considerando la regla de precios, se tiene que la restricción presupuestaria es

$$(1 + \sigma)p \cdot x_i = p \cdot \omega_i + \frac{\sigma r_i}{R} p \cdot \omega,$$

es decir,

$$p \cdot x_i = p \cdot \left[ \frac{\omega_i}{1+\sigma} + \left( \frac{\sigma}{1+\sigma} \right) \frac{r_i}{R} \omega \right],$$

cuestión que define el problema del consumidor según lo indicado.

Denotemos entonces

$$\tilde{\omega}_i = \frac{\omega_i}{1+\sigma} + \left( \frac{\sigma}{1+\sigma} \right) \frac{r_i}{R} \omega.$$

(b) Muestre que  $\{\tilde{\omega}_i\}_{i \in I}$  es una **reasignación factible** de los recursos iniciales, es decir, muestre que

$$\sum_{i \in I} \tilde{\omega}_i = \omega.$$

Muestre además que si  $\omega \in \mathbb{R}_{++}^\ell$  y  $r_i > 0$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\tilde{\omega}_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ .

**Respuesta.** Que  $\tilde{\omega}_i$  es una reasignación de los recursos iniciales es directo de la suma

$$\sum_{i \in I} \tilde{\omega}_i = \sum_{i \in I} \left[ \frac{\omega_i}{1+\sigma} + \left( \frac{\sigma}{1+\sigma} \right) \frac{r_i}{R} \omega \right] = \frac{1}{1+\sigma} \omega + \frac{\sigma}{1+\sigma} \left( \frac{\sum_{i \in I} r_i}{R} \right) \omega = \omega.$$

Por otro lado, si  $\omega \gg 0$  y  $r_i > 0$ , entonces  $\tilde{\omega}_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$  ya que al menos el término de la derecha que define dicho valor es estrictamente positivo.

(c) Usando resultados conocidos, **concluya** que si  $\omega \in \mathbb{R}_{++}^\ell$  y  $r_i > 0, \forall i \in I$ , entonces necesariamente ha de existir un equilibrio de Walras en la economía cuyas dotaciones iniciales son dadas por  $\tilde{\omega}_i, i \in I$ . Denote el precio de equilibrio anterior por  $\tilde{p}$  y las respectivas asignaciones por  $\tilde{x}_i, i \in I$ .

**Respuesta.** Dadas las hipótesis indicadas, sabemos que para cada  $i \in I, \tilde{\omega}_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ , lo que junto a los supuestos hechos sobre la función de utilidad, garantizan la existencia de equilibrio para esta economía. Sea  $\tilde{p}$  dicho precio de equilibrio y  $\tilde{x}_i$  las correspondientes asignaciones de equilibrio.

- (d) Dado el equilibrio anterior, determine entonces el equilibrio en la economía original, es decir, determine  $p^*, q^*, s^*$  y las respectivas asignaciones de equilibrio  $x_i^*$ .

**Ind.:** use todas las relaciones ya establecidas y la regla de precios para deducir la existencia de los precios de equilibrio para la economía original .

**Respuesta.** Determinemos  $q^*$  de la relación demostrada en la parte (a):

$$q^* = \frac{\sigma}{R} \tilde{p} \cdot \omega.$$

Con  $q^*$  y  $\tilde{p}$ , podemos entonces determinar  $s^*$  usando la regla de precios:

$$s^* = \frac{\sigma}{q^*} \tilde{p}.$$

Finalmente,  $p^* = \tilde{p}$  y  $x_i^* = \tilde{x}_i$  cierran el problema de determinar el equilibrio en la economía original.