

# Guía de Ejemplos Microeconomía Avanzada - 2005.

**Profesor:** Jorge Rivera.

**Ayudante:** Reinaldo Guerra

## 1. Equilibrio

**Ejemplo 1.1** Supongamos que en la economía hay  $m$  individuos cuyas preferencias son representadas por una función de utilidad  $u_i : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma (Coob - Douglas)

$$u_i(x_1, x_2, \dots, x_\ell) = \prod_{k=1}^{\ell} x_k^{\alpha_{ik}}$$

y cuyas dotaciones iniciales son  $\omega_i = (\omega_{ik})$ , con  $k = 1, 2, \dots, \ell$ . Dado un precio  $p = (p_1, p_2, \dots, p_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell$ , el problema que define la demanda de cada individuo  $i \in I$  es

$$\max \prod_{k=1}^{\ell} x_k^{\alpha_{ik}} \quad s.a \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k = \sum_{k=1}^{\ell} p_k \omega_{ik} = p \cdot \omega_i.$$

Supongamos  $p_1 = 1$  (numerario) y considerando que la maximización anterior es equivalente si tomamos logaritmo de la función objetivo, entonces el problema se puede re-escribir como

$$\max \alpha_{i1} \cdot \ln \left[ p \cdot \omega_i - \sum_{k=2}^{\ell} p_k x_k \right] + \sum_{k=2}^{\ell} \alpha_{ik} \ln(x_k).$$

Derivando c.r a  $x_k$ ,  $k \geq 2$ , se tiene que

$$\alpha_{i1} \cdot \frac{-p_k}{p \cdot \omega_i - \sum_{k=2}^{\ell} p_k x_k} + \frac{\alpha_{ik}}{x_k} = 0$$

esto para todo  $k = 2, 3, \dots, \ell$ ,  $i \in I$ . En otras palabras, se tiene que

$$-\alpha_{i1} p_k x_k + \alpha_{ik} p \cdot \omega_i - \alpha_{ik} \sum_{k \geq 2} p_k x_k = 0.$$

Note ahora que  $\sum_{k \geq 2} p_k x_k = p \cdot \omega_i - x_1$  y por lo tanto

$$-\alpha_{i1} p_k x_k + \alpha_{ik} p \cdot \omega_i - \alpha_{ik} [p \cdot \omega_i - x_1] = 0$$

de lo cual se tiene que

$$x_k = \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{i1} p_k} \cdot x_1.$$

Luego, del hecho que

$$x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots + p_\ell x_\ell = p \cdot \omega_i \Leftrightarrow x_1 + \frac{\alpha_{i2}}{\alpha_{i1}} \cdot x_1 + \dots + \frac{\alpha_{i\ell}}{\alpha_{i1}} \cdot x_1 = p \cdot \omega_i$$

es decir, dado el precio  $p \in \mathbb{R}_+^\ell$ , las demandas del individuo  $i \in I$  por el bien  $k = 1, 2, \dots, \ell$  son dadas por

$$d_{i1}(p) = \frac{\alpha_{i1}}{\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ik}} \cdot (p \cdot \omega_i), \quad d_{ik}(p) = \frac{\alpha_{ik}}{p_k \cdot \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ik}} \cdot (p \cdot \omega_i), \quad k \geq 2.$$

Note que en este caso las demandas son unívocas. Para terminar con el análisis, sólo resta determinar si existe un precio  $p^*$  que nos permita establecer la igualdad entre demanda y dotaciones iniciales de todos los bienes, es decir,  $p^*$  tal que

$$\sum_{i=1}^m d_{ik}(p^*) = \sum_{i=1}^m \omega_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, \ell$$

siendo  $d_{ik}(\cdot)$  la expresión anterior. Para esto, definamos

$$\beta_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ik}}, \quad \Omega_k = \sum_{i=1}^m \omega_{ik}, \quad i \in I, \quad k = 1, 2, \dots, \ell.$$

Luego, el sistema anterior se puede re-escribir como

$$\sum_{i=1}^m \beta_{i1} \cdot (p^* \cdot \omega_i) = \Omega_1; \quad \sum_{i=1}^m \beta_{ik} \cdot \frac{(p^* \cdot \omega_i)}{p_k^*} = \Omega_k, \quad k \geq 2.$$

En consecuencia, de la primera ecuación, se concluye que

$$p^* \cdot \sum_{i=1}^m \beta_{i1} \omega_i = \Omega_1 \Rightarrow p^* = \frac{\Omega_1 \cdot \sum_{i=1}^m \beta_{i1} \omega_i}{\left\| \sum_{i=1}^m \beta_{i1} \omega_i \right\|}.$$

**Ejemplo 1.2** Consideremos una economía con tres consumidores y dos bienes. Cada uno de ellos es caracterizado de la siguiente manera:

$$u_1(x, y) = xy, \quad u_2(x, y) = x^2y, \quad u_3(x, y) = xy^2$$

$$\omega_1 = (1, 2), \quad \omega_2 = (1, 1), \quad \omega_3 = (2, 3).$$

Note que las funciones de utilidad anteriores cumplen con todas las propiedades (**verificar como ejercicio**) que garantizan la existencia y unicidad de la demanda para  $p \gg 0$ . De hecho, dado  $p = (p_1, p_2) \gg 0$ , se puede probar que (Ejercicio)

$$d_1(p) = \left( \frac{p_1 + 2p_2}{2p_1}, \frac{p_1 + 2p_2}{2p_2} \right)$$

$$d_2(p) = \left( \frac{2p_1 + 2p_2}{3p_1}, \frac{p_1 + p_2}{3p_2} \right)$$

$$d_3(p) = \left( \frac{2p_1 + 3p_2}{3p_1}, \frac{4p_1 + 6p_2}{3p_2} \right)$$

Por lo tanto, con lo anterior se tiene que

$$z(p) = \left( \frac{11p_1 + 16p_2}{6p_1}, \frac{13p_1 + 20p_2}{6p_2} \right) - (4, 6)$$

y con ello, un precio de equilibrio es

$$z(p) = (0, 0) \Leftrightarrow p^* = \left( \frac{16}{29}, \frac{13}{29} \right).$$

**Ejemplo 1.3** Suponga dada una economía de intercambio de  $2 \times 2$  (dos individuos, dos bienes). Las funciones de utilidad de cada consumidor son  $u_1(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$  y  $u_2(x, y) = x^\beta y^{1-\beta}$  y sus dotaciones  $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{12})$  y  $\omega_2 = (\omega_{21}, \omega_{22})$  respectivamente.

Una transferencia en esta economía consiste en el traspaso de riqueza entre individuos. Así, si el individuo 1 le transfiere  $R$  riqueza al individuo 2, a los precios  $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2$  las restricciones presupuestarias de ambos son

$$B_1(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1 x + p_2 y \leq p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} - R\}$$

$$B_2(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1 x + p_2 y \leq p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22} + R\}$$

respectivamente. En general,  $R$  puede ser positivo (1 le traspasa a 2) o negativo (a la inversa).

- (a) Dado el precio  $p = (p_1, p_2)$  y una transferencia  $R \in \mathbb{R}$ , determine las demandas de ambos individuos por ambos bienes. Denotemos las demandas por  $x_i(p, R)$  e  $y_i(p, R)$ , con  $i = 1, 2$ .

**Respuesta.** En este caso, al maximizar la utilidad para cada consumidor se tiene directamente que

$$x_1(p, R) = \frac{\alpha(p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} - R)}{p_1}, \quad y_1(p, R) = \frac{(1 - \alpha)(p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} - R)}{p_2}$$

$$x_2(p, R) = \frac{\beta(p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22} + R)}{p_1}, \quad y_2(p, R) = \frac{(1 - \beta)(p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22} + R)}{p_2}.$$

Definamos un equilibrio competitivo en esta economía como un vector de precios  $p^* = (p_1^*, p_2^*)$  y una transferencia  $R^*$  tal que la demanda agregada por cada bien, a los precios y transferencias indicadas, coincide con la cantidad total de ese bien en la economía.

- (b) Determine la condición de equilibrio para la economía y muestre que las ecuaciones para ambos bienes son linealmente dependientes.

**Respuesta.** La condición de equilibrio implica que

$$\frac{\alpha(p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} - R)}{p_1} + \frac{\beta(p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22} + R)}{p_1} = \omega_{11} + \omega_{21} \quad [1]$$

$$\frac{(1 - \alpha)(p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} - R)}{p_2} + \frac{(1 - \beta)(p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22} + R)}{p_2} = \omega_{12} + \omega_{22} \quad [2].$$

De la ecuación [1] sigue que

$$[1] \Leftrightarrow (\alpha - 1)p_1 \omega_{11} + \alpha p_2 \omega_{12} - \alpha R + (\beta - 1)p_1 \omega_{21} + \beta p_2 \omega_{22} + \beta R = 0$$

$$[2] \Leftrightarrow (1 - \alpha)p_1 \omega_{11} - \alpha p_2 \omega_{12} - (1 - \alpha)R + (1 - \beta)p_1 \omega_{21} - \beta p_2 \omega_{22} + (1 - \beta)R = 0,$$

es decir

$$[2] \Leftrightarrow (1 - \alpha)p_1 \omega_{11} - \alpha p_2 \omega_{12} + \alpha R + (1 - \beta)p_1 \omega_{21} - \beta p_2 \omega_{22} - \beta R = 0,$$

por lo que la ecuación [1] es menos la ecuación [2], y así disponemos entonces de sólo una ecuación, digamos la [1] para determinar el equilibrio.

De lo hecho en la parte (b) se puede asumir que  $p_1^* = 1$ , con lo cual queda indeterminado sólo el precio del segundo bien.

- (c) Muestre que bajo el supuesto  $p_1^* = 1$ , si ambos individuos son iguales entonces para cualquier nivel de transferencia  $R$  de tal forma que la riqueza total de cada individuo es positiva (**transferencia factible**), el precio de equilibrio de la economía con transferencias coincide con el precio de equilibrio que tendría la economía sin transferencias. Ocurre lo mismo con las demandas? Muestre además que para cada nivel de transferencia factible existe un único equilibrio en esta economía.

**Respuesta.** Por lo deducido anteriormente, podemos entonces asumir que en el equilibrio  $p_1^* = 1$ , con lo cual la ecuación queda como

$$(\alpha - 1)\omega_{11} + \alpha p_2 \omega_{12} - \alpha R + (\beta - 1)\omega_{21} + \beta p_2 \omega_{22} + \beta R = 0.$$

Bajo el supuesto anterior, si ambos individuos son iguales ( $\alpha = \beta$ ) la ecuación se convierte en

$$(\alpha - 1)\omega_{11} + \alpha p_2 \omega_{12} + (\alpha - 1)\omega_{21} + \beta p_2 \omega_{22} = 0$$

cuya solución es precisamente la que se tendría en situación sin transacciones. Notemos que en este caso, el precio de equilibrio no depende de  $R$ , razón por la cual se puede interpretar que el precio de equilibrio es el mismo con o sin transacciones. Obviamente las demandas se verán modificadas (ver ecuación de la demanda) y además es directo que para cualquier nivel de transferencias, dado  $p_1^* = 1$ , hay entonces un único precio  $p_2^*$  de equilibrio (resolver la ecuación de la parte (b) anterior).

**Ejemplo 1.4** Considere dos economías de intercambio conformadas por  $m$  individuos (indexados por  $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ ) y dos bienes ( $\ell = 2$ ). Para ambas economías, las funciones de utilidad de un individuo  $i \in I$  son dadas por

$$u_i(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_i} x_2^{1-\alpha_i}.$$

Para la primera economía (llamada **la original**), las dotaciones iniciales del individuo  $i \in I$  son dadas por  $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2}) \in \mathbb{R}_{++}^2$ . La dotación total de bien uno es  $\omega_1$  y aquella de bien dos  $\omega_2$ ;  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  es el vector de dotaciones totales. Por otro lado, para la segunda economía (llamada **la final**), las dotaciones iniciales son una reasignación de las originales, de tal manera que para el individuo  $i \in I$  son dadas por

$$\bar{\omega}_i = \lambda \omega_i + (1 - \lambda) \rho_i \omega = (\bar{\omega}_{i1}, \bar{\omega}_{i2}),$$

siendo  $\lambda \in [0, 1]$  y  $\rho_i \in ]0, 1[$  **parámetros dados** tal que

$$\sum_{i \in I} \rho_i = 1.$$

Escogiendo el **bien uno como numerario**, se pide entonces lo siguiente.

- (a) Muestre que  $\bar{\omega}_i$ ,  $i \in I$ , es una reasignación de los recursos iniciales.

**Respuesta.** Para ello basta sumar las dotaciones:

$$\sum_{i \in I} \bar{\omega}_i = \sum_{i \in I} [\lambda \omega_i + (1 - \lambda) \rho_i \omega] = \lambda \omega + (1 - \lambda) \omega \sum_{i \in I} \rho_i = \omega.$$

- (b) Muestre que el precio de equilibrio para la economía original es  $(1, \mathbf{p})$  tal que

$$\mathbf{p} = \frac{\sum_{i \in I} (1 - \alpha_i) \omega_{i1}}{\sum_{i \in I} \alpha_i \omega_{i2}}$$

Determine además el precio de equilibrio de la economía final.

**Respuesta.** Para una función de utilidad como la indicada, la demanda del individuo  $i \in I$  por el bien 1, con dotaciones  $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2})$  es

$$x_{i1} = \alpha_i(\omega_{i1} + p\omega_{i2}).$$

Por lo tanto, la condición de equilibrio implica que

$$\sum_{i \in I} [\alpha_i(\omega_{i1} + \mathbf{p}\omega_{i2})] = \sum_{i \in I} \omega_{i1} \Rightarrow \mathbf{p} = \frac{\sum_{i \in I} (1 - \alpha_i)\omega_{i1}}{\sum_{i \in I} \alpha_i\omega_{i2}}.$$

Para la economía final, el resultado es análogo, reemplazando  $\omega_{ij}$  por  $\bar{\omega}_{ij}$ . Así, el precio de equilibrio es

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\sum_{i \in I} (1 - \alpha_i)\bar{\omega}_{i1}}{\sum_{i \in I} \alpha_i\bar{\omega}_{i2}},$$

donde

$$\bar{\omega}_{ij} = \lambda\omega_{ij} + (1 - \lambda)\rho_i\omega_j, \quad i \in I, \quad j = 1, 2.$$

- (c) Muestre que cuando  $\alpha_i = \alpha_j (= \alpha)$  para cada  $i, j$ , entonces los precios determinados en la parte anterior son coincidentes e iguales a  $(1, \mathbf{p}^*)$  con

$$\mathbf{p}^* = \frac{(1 - \alpha)\omega_1}{\alpha\omega_2}.$$

**Respuesta.** Si  $\alpha_i = \alpha_j (= \alpha)$ , entonces se tiene que

$$\mathbf{p} = \frac{\sum_{i \in I} (1 - \alpha_i)\omega_{i1}}{\sum_{i \in I} \alpha_i\omega_{i2}} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Análogamente,

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\sum_{i \in I} (1 - \alpha_i)\bar{\omega}_{i1}}{\sum_{i \in I} \alpha_i\bar{\omega}_{i2}} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i1}}{\sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i2}} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

ya que las dotaciones  $\bar{\omega}_i$  son factibles y luego, por componentes, suman  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2$ . Con esto entonces  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} (= \mathbf{p}^*)$ .

Ahora bien, **bajo el supuesto que todos los individuos tienen la misma función de utilidad** (con parámetro  $\alpha$ ), denotemos entonces los ingresos de equilibrio por  $r_i$  y  $\bar{r}_i$  respectivamente, es decir,

$$r_i = \omega_{i1} + \mathbf{p}^* \omega_{i2}, \quad \bar{r}_i = \bar{\omega}_{i1} + \mathbf{p}^* \bar{\omega}_{i2}.$$

Finalmente, denote por  $R$  y  $\bar{R}$  el ingreso (riqueza) total para ambas economías, es decir,  $R = \sum_{i \in I} r_i$ ,  $\bar{R} = \sum_{i \in I} \bar{r}_i$ .

(d) Muestre que bajo el supuesto de **individuos idénticos** anterior, se tiene que

$$R = \bar{R}$$

y además

$$\frac{\bar{r}_i}{\bar{R}} = \lambda \frac{r_i}{R} + (1 - \lambda)\rho_i.$$

**Respuesta.** Notemos que

$$R = \sum_{i \in I} [\omega_{i1} + \mathbf{p}^* \omega_{i2}] = \omega_1 + \mathbf{p}^* \omega_2.$$

Por otro lado,

$$\bar{R} = \sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i1} + \mathbf{p}^* \bar{\omega}_{i2} = \sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i1} + \mathbf{p}^* \sum_{i \in I} \bar{\omega}_{i2} = \omega_1 + \mathbf{p}^* \omega_2,$$

con lo cual  $R = \bar{R}$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{r}_i}{\bar{R}} &= \frac{\bar{\omega}_{i1} + \mathbf{p}^* \bar{\omega}_{i2}}{R} = \frac{\lambda \omega_{i1} + (1 - \lambda)\rho_i \omega_1 + \mathbf{p}^* \lambda \omega_{i2} + (1 - \lambda)\rho_i \omega_2}{R} = \\ &= \frac{\lambda \omega_{i1} + \lambda \mathbf{p}^* \omega_{i2}}{R} + \frac{(1 - \lambda)\rho_i (\omega_1 + \mathbf{p}^* \omega_2)}{R} = \frac{r_i}{R} + (1 - \lambda)\rho_i. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.5** Suponga dada una economía de intercambio con  $m$  individuos, indexados por  $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ , cuyas funciones de utilidad y dotaciones iniciales son  $u_i : \mathbb{R}_+^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\omega_i \in \mathbb{R}_+^\ell$  respectivamente. La cantidad de bienes en la economía es  $\ell$  y  $\omega$  es la cantidad total de recursos iniciales. En todo lo que sigue, asuma que las funciones de utilidad son las usuales, es decir, crecientes por componentes, diferenciables y estrictamente cóncavas.

Para efectos de generar transferencias, vamos a considerar la existencia de un planificador central que decide sobre lo que llamaremos **derechos de consumo** y sobre una **regla de precios** que se impondrá exógenamente en la economía. Los **derechos de consumo** son una cantidad real  $r_i \in \mathbb{R}_+$  asignada a cada individuo. Denotemos por  $R$  la suma de todos los derechos asignados, e.d.,  $R = \sum_i r_i$ .

En este modelo, si el **precio de los bienes** es  $p \in \Delta_\ell$ , el **precio de los derechos** es  $q \in \mathbb{R}_+$  y  $s \in \mathbb{R}_+^\ell$  denota una **tasa de transformación de bienes en derechos** (todos valores por determinar), entonces **ASUMA** que el problema del consumidor es

$$\max_x u_i(x_i) \quad \text{s.a.} \quad (p + qs) \cdot x_i = p \cdot \omega_i + qr_i. \quad (1)$$

Encontrar equilibrios en esta economía corresponde a **determinar los precios**  $p$ ,  $q$  y  $s$  que hacen que las demandas correspondientes sean factibles, es decir,

si  $x_i(p, q, s, \omega_i)$  es una solución al problema (3), entonces diremos que  $p^*$ ,  $q^*$  y  $s^*$  son **precios de equilibrio** si

$$\sum_{i \in I} x_i(p^*, q^*, s^*, \omega_i) = \omega.$$

Finalmente, **y muy importante**, note que la cantidad de incógnitas del problema de equilibrio es  $2 \cdot \ell + 1$  ( $\ell$  por el lado de  $p$ ,  $\ell$  por  $s$  y una por  $q$ ), mientras que la cantidad de ecuaciones

que definen el equilibrio son  $\ell$  (dadas por suma de demandas igual a dotaciones totales). De esta manera, el problema anterior presenta una indeterminación fundamental. A partir de lo anterior, con el fin de evitar la multiplicidad de equilibrios, se introduce lo que llamaremos una **regla de precios** en la economía que, como se ha indicado, es una herramienta adicional que posee un planificador central para reasignar recursos. La regla más simple que podemos imaginar es la que llamaremos **regla lineal**, dada por la siguiente relación entre los precios

$$s = \frac{1}{q}Ap,$$

siendo  $A \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$  una matriz real de  $\ell$  por  $\ell$ . Más aun, **asumiremos** que  $A$  es una matriz diagonal de la forma

$$A = \sigma[I],$$

donde  $\sigma > 0$  es un **escalar prefijado** e  $[I]$  la matriz identidad.

- (a) Muestre que bajo la regla de precios anterior (lineal-diagonal), si  $p$ ,  $s$  y  $q$  son precios de equilibrio, entonces necesariamente se debe cumplir que

$$q = \frac{\sigma}{R} p \cdot \omega,$$

y con ello concluya que, sin pérdida de generalidad, el problema del individuo se puede re-escribir como

$$\max u_i(x_i) \quad s.a \quad p \cdot x_i = p \cdot \left[ \frac{\omega_i}{1+\sigma} + \left( \frac{\sigma}{1+\sigma} \right) \frac{r_i}{R} \omega \right]. \quad (2)$$

**Ind.:** usar la regla de precios para eliminar  $s$  y luego sumar las restricciones presupuestarias para obtener  $q$ . El problema (2) es directo usando el  $q$  ya obtenido.

**Respuesta.** De la regla de precios,

$$qs = \sigma p,$$

con lo cual, asumiendo que los precios son de equilibrio, sigue que

$$(p + \sigma p) \cdot x_i^* = p \cdot \omega_i + q r_i \Rightarrow (1 + \sigma)p\omega = p \cdot \omega + qR.$$

De esta manera,

$$q = \frac{\sigma}{R} p \cdot \omega.$$

Volviendo entonces al problema del consumidor, reemplazando  $q$  por lo anterior y considerando la regla de precios, se tiene que la restricción presupuestaria es

$$(1 + \sigma)p \cdot x_i = p \cdot \omega_i + \frac{\sigma r_i}{R} p \cdot \omega,$$

es decir,

$$p \cdot x_i = p \cdot \left[ \frac{\omega_i}{1+\sigma} + \left( \frac{\sigma}{1+\sigma} \right) \frac{r_i}{R} \omega \right],$$

cuestión que define el problema del consumidor según lo indicado.

Denotemos entonces

$$\tilde{\omega}_i = \frac{\omega_i}{1+\sigma} + \left( \frac{\sigma}{1+\sigma} \right) \frac{r_i}{R} \omega.$$

- (b) Muestre que  $\{\tilde{\omega}_i\}_{i \in I}$  es una **reasignación factible** de los recursos iniciales, es decir, muestre que

$$\sum_{i \in I} \tilde{\omega}_i = \omega.$$

Muestre además que si  $\omega \in \mathbb{R}_{++}^\ell$  y  $r_i > 0$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\tilde{\omega}_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ .

**Respuesta.** Que  $\tilde{\omega}_i$  es una reasignación de los recursos iniciales es directo de la suma

$$\sum_{i \in I} \tilde{\omega}_i = \sum_{i \in I} \left[ \frac{\omega_i}{1+\sigma} + \left( \frac{\sigma}{1+\sigma} \right) \frac{r_i}{R} \omega \right] = \frac{1}{1+\sigma} \omega + \frac{\sigma}{1+\sigma} \left( \frac{\sum_{i \in I} r_i}{R} \right) \omega = \omega.$$

Por otro lado, si  $\omega >> 0$  y  $r_i > 0$ , entonces  $\tilde{\omega}_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$  ya que al menos el término de la derecha que define dicho valor es estrictamente positivo.

- (c) Usando resultados conocidos, **concluya** que si  $\omega \in \mathbb{R}_{++}^\ell$  y  $r_i > 0, \forall i \in I$ , entonces necesariamente ha de existir un equilibrio de Walras en la economía cuyas dotaciones iniciales son dadas por  $\tilde{\omega}_i, i \in I$ . Denote el precio de equilibrio anterior por  $\tilde{p}$  y las respectivas asignaciones por  $\tilde{x}_i, i \in I$ .

**Respuesta.** Dadas las hipótesis indicadas, sabemos que para cada  $i \in I, \tilde{\omega}_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ , lo que junto a los supuestos hechos sobre la función de utilidad, garantizan la existencia de equilibrio para esta economía. Sea  $\tilde{p}$  dicho precio de equilibrio y  $\tilde{x}_i$  las correspondientes asignaciones de equilibrio.

- (d) Dado el equilibrio anterior, determine entonces el equilibrio en la economía original, es decir, determine  $p^*, q^*, s^*$  y las respectivas asignaciones de equilibrio  $x_i^*$ .

**Ind.:** use todas las relaciones ya establecidas y la regla de precios para deducir la existencia de los precios de equilibrio para la economía original.

**Respuesta.** Determinemos  $q^*$  de la relación demostrada en la parte (a):

$$q^* = \frac{\sigma}{R} \tilde{p} \cdot \omega.$$

Con  $q^*$  y  $\tilde{p}$ , podemos entonces determinar  $s^*$  usando la regla de precios:

$$s^* = \frac{\sigma}{q^*} \tilde{p}.$$

Finalmente,  $p^* = \tilde{p}$  y  $x_i^* = \tilde{x}_i$  cierran el problema de determinar el equilibrio en la economía original.

## 2. Optimalidad

**Ejemplo 2.1** Supongamos que las funciones de utilidad de dos individuos son  $u_1(x, y) = xy$  y  $u_2(x, y) = x^2y$ . Las dotaciones iniciales serán  $\omega_1 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  y  $\omega_2 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ . Luego, la dotación total es  $\omega = (3, 2)$ . Para encontrar el (los) óptimos de Pareto, debemos encontrar todos aquellos puntos de la caja de Edgeworth donde el gradiente de las utilidades es l.d. Para efectos del cálculo, note que las variables deben ser expresadas en el mismo sistema coordenado. Así, si  $(x, y)$  denota una canasta para el individuo 1 entonces,  $(3-x, 2-y)$  denota aquella correspondiente para el individuo 2. Luego, un óptimo de Pareto ha de satisfacer la siguiente condición:



$$\nabla u_1(x, y) = \lambda \nabla u_2(3 - x, 2 - y)$$

es decir<sup>1</sup>,

$$(y, x) = -\lambda(2(3 - x)(2 - y), (3 - x)^2)$$

de lo cual se tiene que

$$\frac{y}{x} = \frac{2(2 - y)}{3 - x}$$

es decir,

$$y = \frac{4x}{x + 3}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Esta última relación define la curva de contrato en la caja de Edgeworth de la economía. Esta curva de contrato está expresada en el sistema coordenado del primer individuo. Por ejemplo,  $x_1^* = (2, \frac{4 \cdot 2}{2+3}) = (2, \frac{8}{5})$  y  $x_2^* = (3 - 2, 2 - \frac{8}{5}) = (1, \frac{2}{5})$  es un óptimo de Pareto para la economía.

**Ejemplo 2.2** Siguiendo con el Ejemplo 2.1, dadas  $u_1(x, y) = xy$  y  $u_2(x, y) = x^2y$ , y dotaciones iniciales  $\omega_1 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  y  $\omega_2 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ , la curva de contrato está dada por la relación

$$y = \frac{4x}{x + 3}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Calculemos ahora el núcleo. Para ello debemos calcular las curvas de indiferencia que pasan por los puntos de dotación inicial dados anteriormente. Para el primer individuo, dicha curva está definida por todos aquellos puntos de la caja de Edgeworth tal que

$$x \cdot y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Luego,

$$y = \frac{3}{4x}.$$

Con esto, la curva de indiferencia corta a la curva de contrato en el punto donde se satisfacen las ecuaciones:

$$y = \frac{4x}{x + 3} \quad y = \frac{3}{4x} \Leftrightarrow 16x^2 - 3x - 9 = 0$$

cuyas soluciones son

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 576}}{2 \cdot 16} = \frac{3 \pm \sqrt{585}}{32}.$$

Puesto que  $0 \leq x \leq 3$ , la solución que nos sirve es la positiva, es decir,

$$x_a = \frac{3 + \sqrt{585}}{32}.$$

En forma análoga para el segundo individuo, la curva de indiferencia (expresada en coordenadas del primer individuo) corresponde al conjunto de puntos que cumple con

$$(3 - x)^2 \cdot (2 - y) = \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{27}{8}$$

---

<sup>1</sup>Calcular las derivadas parciales de  $u_1$  y  $u_2$  c.r a sus variables y evaluar en el punto indicado anteriormente, es decir,  $(x, y)$  para 1 y  $(3 - x, 2 - y)$  para 2.

de lo cual se tiene que la intersección con la curva de contrato está dada por aquel punto que resuelve la siguiente ecuación<sup>2</sup>

$$(3-x)^2 \cdot \left(2 - \frac{4x}{x+3}\right) = \frac{27}{8}.$$

Queda propuesto continuar con el problema e ilustrar geoméricamente la situación.

**Ejemplo 2.3** Considere una economía de intercambio con dos bienes y dos consumidores. Las dotaciones iniciales son  $\omega_1 = (10, 2)$  para el individuo uno y  $\omega_2 = (2, 10)$  para el individuo dos. Las funciones de utilidad de ambos son idénticas, dadas por  $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ , con  $0 < \alpha < 1$ .

(a) Muestre que el precio de equilibrio en esta economía es

$$(1, p^*) \in \mathbb{R}^2 \mid p^* = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Muestre además que las **asignaciones de equilibrio** son

$$\text{Individuo uno : } x_{11}^* = x_{12}^* = \alpha 10 + (1-\alpha)2$$

$$\text{Individuo dos : } x_{21}^* = x_{22}^* = \alpha 2 + (1-\alpha)10.$$

Cómo explica Ud. que aun cuando las funciones de utilidad son idénticas, se produce intercambio en esta economía?

**Respuesta.** Dada una función de utilidad  $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$  y dadas dotaciones cualquiera  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para los bienes uno y dos respectivamente, el problema del consumidor es

$$\max x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad \text{s.a. } x_1 + p x_2 = \omega_1 + p \omega_2.$$

Las condiciones de optimalidad implican que

$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha}} = \frac{1}{p} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{x_1}{p}. \quad (3)$$

con lo cual, al reemplazar en la restricción presupuestaria, queda que

$$x_1 + p \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{x_1}{p} = \omega_1 + p \omega_2 \Rightarrow x_1(p) = \alpha[\omega_1 + p \cdot \omega_2].$$

Así, reemplazando las respectivas dotaciones iniciales, las demandas por bien uno de cada individuo son  $x_{11}(p) = \alpha[10 + 2 \cdot p]$  y  $x_{21}(p) = \alpha[2 + 10 \cdot p]$ . La condición de equilibrio es entonces

$$\alpha[10 + 2 \cdot p] + \alpha[2 + 10 \cdot p] = 12 \Rightarrow p^* = \frac{1-\alpha}{\alpha},$$

con lo cual, las demandas por bien uno y dos de cada individuo son iguales: reemplazar el precio  $p^*$  anterior en la Ecuación 3 para concluir que  $x_{11}(p^*) = x_{12}(p^*)$  y que  $x_{21}(p^*) = x_{22}(p^*)$ . Más aun, al hacer la sustitución correspondiente se tiene que la demanda por cada bien es dada por lo indicado en el enunciado:

---

<sup>2</sup>Recordar que  $y = \frac{4x}{x+3}$ .

$$x_{11}(p^*) = \alpha \left[ 10 + \frac{1-\alpha}{\alpha} 2 \right] = \alpha \cdot 10 + (1-\alpha) \cdot 2 = x_{12}(p^*).$$

Análogo con individuo dos. Por qué intercambian los individuos a pesar de ser iguales en preferencias? Básicamente por que el individuo uno desea parte del bien dos que posee el segundo y este a su vez desea parte del bien uno que posee el primero. etc...

- (b) Determine el **ingreso en el equilibrio** de cada individuo y muestre que el *individuo uno* es más rico que el *individuo dos* siempre y cuando  $\alpha > 1/2$ . Cómo explicaría “económicamente” este resultado?

**Respuesta.** Dado el precio de equilibrio  $p^*$  como antes, el “ingreso” de los individuos uno y dos es

$$I_1^* = 10 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 2 \quad I_2^* = 2 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 10$$

respectivamente. Por lo tanto, el individuo uno “es más rico” que el dos siempre y cuando

$$10 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 2 > 2 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 10 \Rightarrow 8 > \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) 8 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} < 1$$

lo que se tiene si  $\alpha < 1/2$  como se ha indicado. La “razón económica” de lo anterior es que si  $\alpha < 1/2$ , ambos individuos prefieren más el bien dos que el uno (esto por que  $1-\alpha > \alpha$ ).

- (c) Dibuje la caja de Edgeworth de la economía y dibuje en ella las dotaciones iniciales de ambos individuos.

Respuesta. Directo: es un cuadrado de lado 12, donde las dotaciones de ambos individuos quedan determinadas por el punto de coordenadas (10, 2).

- (d) Determine la curva de contrato de la economía y muestre que ella es precisamente la diagonal de la caja de Edgeworth.

**Respuesta.** Una forma para determinar la curva de contrato consiste en resolver el siguiente problema de optimización ( $\lambda > 0$  arbitrario):

$$\text{máx } x_{11}^\alpha x_{21}^{1-\alpha} + \lambda x_{21}^\alpha x_{22}^{1-\alpha} \quad \text{s.a. } x_{11} + x_{21} = 12, \quad x_{12} + x_{22} = 12,$$

lo que deriva en

$$\text{máx}_{x_{11}, x_{12}} \quad x_{11}^\alpha x_{21}^{1-\alpha} + \lambda [12 - x_{11}]^\alpha [12 - x_{12}]^{1-\alpha}.$$

Derivando e igualando a cero se tiene que (llamemos  $x = x_{11}$ ,  $y = x_{12}$ )

$$\text{c.r a } x \quad \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} + \lambda [\alpha \cdot (-1) \cdot [12 - x]^{\alpha-1} [12 - y]^{1-\alpha}] = 0$$

$$\text{c.r a } y \quad (1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha} + \lambda [(1-\alpha) \cdot (-1) \cdot [12 - x]^\alpha [12 - y]^{-\alpha}] = 0$$

con lo cual,

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha}} = \frac{\lambda [\alpha \cdot [12 - x]^{\alpha-1} [12 - y]^{1-\alpha}]}{\lambda [(1-\alpha) \cdot [12 - x]^\alpha [12 - y]^{-\alpha}]}$$

lo que finalmente implica que

$$\frac{y}{x} = \frac{12-y}{12-x} \Rightarrow 12y - xy = 12x - xy \Rightarrow x = y.$$

Por lo tanto, la curva de contrato son todos aquellos puntos de la caja de Edgeworth que cumplen con lo anterior, es decir, la diagonal de la caja.

- (e) Muestre que la asignación  $(x_{11}, x_{12}) = (3, 3)$  y  $(x_{21}, x_{22}) = (9, 9)$  es un óptimo de Pareto de la economía y determine el precio que la descentraliza.

**Respuesta.** El punto  $(3, 3)$  para el individuo uno (y por ende  $(9, 9)$  para el dos) es un óptimo de Pareto, ya que está en la curva de contrato (cumple con la condición de la parte anterior). El precio que descentraliza dicha asignación es el precio de equilibrio que ya encontramos.

**Ejemplo 2.4** Sigamos con el **ejemplo anterior**. Como sabemos, la curva de contrato está conformada por la diagonal de la caja de Edgeworth respectiva. Para determinar el precio que descentraliza un determinado óptimo de Pareto, recordemos que la condición que cumple cualquier punto de la curva de contrato es que las curvas de indiferencia son tangentes entre sí en dicho punto, razón por la cual la recta presupuestaria que pase por dicho óptimo de Pareto es tangente a la curva de indiferencia. Esto equivale a decir que el gradiente de la función de utilidad debe ser paralelo al vector ortogonal de la recta presupuestaria, es decir, que **el gradiente de la función de utilidad de cada individuo en el punto óptimo de Pareto es paralelo al precio que descentraliza**. Por lo tanto, normalizando el gradiente de la función de utilidad de modo que la primera componente sea uno, se tiene que la segunda componente del precio que descentraliza es simplemente el cociente de las derivadas parciales de la función de utilidad en el óptimo de Pareto, es decir, la relación marginal de sustitución en dicho punto. En el ejemplo anterior, la función de utilidad del individuo uno es  $u_1(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ , por lo que el gradiente es

$$\nabla u_1(x, y) = (\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}, (1-\alpha)x^\alpha y^{-\alpha})^t \in \mathbb{R}^2,$$

con lo que el vector gradiente normalizado es<sup>3</sup>

$$\left(1, \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{y}{x}\right)^t \in \mathbb{R}^2.$$

Para terminar, el valor anterior debe ser evaluado en el óptimo de Pareto que deseamos descentralizar. En este caso, los óptimos de Pareto son tal que  $x = y$  (diagonal), razón por la cual el precio que descentraliza es

$$\bar{p} = \left(1, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^t \in \mathbb{R}^2,$$

que en este ejemplo **no depende del Pareto considerado**: el precio que descentraliza todos los óptimos de Pareto es el mismo (**que de hecho es el precio de equilibrio**).

Consideremos entonces el problema de reasignar recursos en la economía con el fin de, por ejemplo, que los ingresos de los individuos en el equilibrio estén en razón de uno a  $\rho > 0$ . Esto se traduce entonces en encontrar un óptimo de Pareto de la forma  $(\bar{x}, \bar{x})$  (todos los óptimos de Pareto están en la diagonal!) tal que  $\bar{p} \cdot (\bar{x}, \bar{x})$  (ingreso del individuo uno) dividido por  $\bar{p} \cdot (12 - \bar{x}, 12 - \bar{x})$  (ingreso del individuo dos)<sup>4</sup> sea igual a  $\rho$ , es decir,

$$\frac{\bar{x} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \bar{x}}{(12 - \bar{x}) + \frac{1-\alpha}{\alpha} (12 - \bar{x})} = \frac{\bar{x}}{12 - \bar{x}} = \rho \Rightarrow \bar{x} = \frac{12\rho}{1 + \rho}.$$

<sup>3</sup>Debemos hacer aparecer un uno en la primera componente, lo que se logra dividiendo por la derivada parcial c.r a  $x$ .

<sup>4</sup>Recordar que si el individuo uno tiene  $\bar{x}$  del bien uno, el tipo dos tiene  $12 - \bar{x}$ ; análogo con bien dos.

En resumen, para cumplir con el objetivo de equidad indicado, se debe entonces alcanzar el óptimo de Pareto

$$\bar{x}_1 = \left( \frac{12\rho}{1+\rho}, \frac{12\rho}{1+\rho} \right), \quad \bar{x}_2 = \left( 12 - \frac{12\rho}{1+\rho}, 12 - \frac{12\rho}{1+\rho} \right),$$

el que es descentralizado por el precio de equilibrio  $p^*$  ya encontrado. Ahora, para “implementar” el Pareto anterior, la idea es determinar una transferencia de tal forma que las dotaciones finales yaczan en la recta presupuestaria definida por el precio  $p^*$  y que pasa por el Pareto anterior. La ecuación de esta recta es

$$x + \frac{1-\alpha}{\alpha}y = \frac{12\rho}{1+\rho} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{12\rho}{1+\rho} = \frac{12\rho}{\alpha(1+\rho)}.$$

Por lo tanto, si la transferencia del individuo uno es  $T_1 = (T_{11}, T_{12})$ , la dotación de bienes del individuo uno ex post la transferencia es  $10 - T_{11}$  del bien uno y  $2 - T_{12}$  del bien dos. Luego, para que la dotación final seté en la recta presupuestaria anterior se debe cumplir que

$$10 - T_{11} + \frac{1-\alpha}{\alpha}(2 - T_{12}) = \frac{12\rho}{1+\rho} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{12\rho}{1+\rho}.$$

Por ejemplo, si  $T_{12}^* = 1$  queda entonces que

$$10 - T_{11} + \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{12\rho}{\alpha(1+\rho)} \quad T_{11}^* = 10 + \frac{1-\alpha}{\alpha} - \frac{12\rho}{\alpha(1+\rho)}$$

Con esto, y a modo de resumen, una forma de para lograr el objetivo de redistribución de ingreso solicitado, consiste en que al individuo uno le quitemos  $T_{11}^*$  del bien uno y  $T_{12}^* = 1$  del bien dos, y que esto sea entregado al individuo dos. Note finalmente que existen muchas opciones de hacer los traspasos con el fin de cumplir con el objetivo social indicado.  $\square$

### 3. Comentarios en general

Conteste lo siguiente, justificando detalladamente su respuesta.

- (a) Por qué una asignación igualitaria de dotaciones iniciales no necesariamente conforma un óptimo de Pareto en una economía de intercambio?

**Respuesta.** Basicamente por que las funciones de los individuos son diferentes, y con ello las tasas marginales de sustitución. Por lo tanto, al evaluar el cociente de utilidades indirectas en el mismo punto (asignación igualitaria), no necesariamente se obtendrá el mismo resultado para todos los individuos.

- (b) Si existen múltiples equilibrios en una economía, cuál de ellos se observará en la práctica?

**Respuesta.** No es claro a priori cual de ellos será observado, pues cualquiera de ellos podría darse en la economía. De no existir una condición adicional en el modelo, hay una indeterminación.

- (c) Perfectamente puede existir equilibrio de Walras en una economía donde una de las firmas presenta retornos crecientes a escala.

**Respuesta.** No puede haber equilibrio competitivo, pues la oferta de la firma a cualquier precio positivo es infinita, con lo cual la firma nunca podría maximizar beneficio a ningún precio positivo.

- (d) Si las preferencias de los individuos no son monótonas o localmente no saciadas, entonces de haber equilibrio de Walras, este no necesariamente será óptimo de Pareto.

**Respuesta.** Verdadero, el equilibrio podría no ser Pareto, ya que, por ejemplo, podrían *sobrar* bienes de consumo en la economía, sobre los cuales nadie se interesa.

- (e) Por Segundo Teorema de Bienestar, aun cuando todos los individuos tengan dotaciones iniciales positivas, es perfectamente posible que exista un equilibrio de Walras donde sólo un individuo consume todas las dotaciones de la economía.

**Respuesta.** Esto no puede ser, ya que este equilibrio no sería individualmente racional: si no consume su utilidad es cero, que es menor que aquella que obtendría consumiendo su dotación inicial.

- (f) Si un individuo provoca una externalidad muy negativa en la economía, lo socialmente óptimo es propender a que dicha externalidad sea anulada, ya sea por un mecanismo de mercado (Coase) o por intervención directa de un planificador (Pigou).

**Respuesta.** No necesariamente el óptimo social ocurre cuando la externalidad es nula, pues socialmente el individuo que la provoca tiene un peso positivo en cualquier función de utilidad social.

- (g) Si precisamente un posible óptimo de Pareto de la economía es aquel donde todos los recursos son de propiedad de una única persona, cómo se explica entonces que exista un precio tal que dicha asignación sea un equilibrio de Walras.

**Respuesta.** Esto es falso, ya que para aplicar el argumento del Segundo Teorema de Bienestar se requiere que el óptimo de Pareto a descentralizar sea tal que todos los individuos tengan asignación positiva.

- (h) Un mecanismo alternativo para alcanzar óptimos de Pareto deseables es simplemente por medio de la fijación de los precios en vez de utilizar transferencias de bienes.

**Respuesta.** Esto en general no es posible, ya que solo modificando precios puede ocurrir que las demandas no sean compatibles con las dotaciones de los individuos.

- (i) Aun cuando el núcleo sea vacío, de todas formas puede existir equilibrio en la economía, pues el núcleo se refiere a “coaliciones” mientras que el equilibrio a “decisiones individuales”.

**Respuesta.** Falso, ya que si el núcleo es vacío, no puede haber equilibrio en la economía dado que este es precisamente un elemento del núcleo.