



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

**ESTRUCTURA Y DINÁMICA DE
TASAS DE INTERÉS REALES EN
CHILE: INFORMACIÓN
CONTENIDA EN LOS PAGARÉS
REAJUSTABLES CON PAGOS EN
CUPONES DEL BANCO CENTRAL**

ALFONSO MOLINARE NAVARRETE

Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias de la
Ingeniería

Profesor Supervisor:

GONZALO CORTAZAR S.

Santiago de Chile, Mayo, 2002



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

ESTRUCTURA Y DINÁMICA DE TASAS DE INTERÉS REALES EN CHILE: INFORMACIÓN CONTENIDA EN LOS PAGARÉS REAJUSTABLES CON PAGOS EN CUPONES DEL BANCO CENTRAL

ALFONSO MOLINARE NAVARRETE

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

GONZALO CORTAZAR S.

JAIME MILIC B.

AXEL CHRISTENSEN DE LA C.

MARIO DURAN T.

Para completar las exigencias del grado de Magister en Ciencias de la
Ingeniería

Santiago de Chile, Mayo, 2002

A mis padres, por toda su entrega y
cariño.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Gonzalo Cortázar le agradezco sinceramente todo el apoyo, tiempo y consejo que me entregó durante mi estadía en el plan de Magíster. Trabajar junto a él fue una experiencia enriquecedora la que me ha entregado las herramientas necesarias para desenvolverme a futuro en el ámbito profesional.

Quisiera agradecer a Lorenzo Naranjo, quien siempre tuvo una respuesta a cualquier interrogante que surgiera y por su amistad durante todo el tiempo que duró este trabajo.

También quisiera agradecer a Alvaro Díaz del Banco Santiago que proporcionó información valiosa y contacto con el sector privado, los que fueron fundamentales para el desarrollo de esta tesis.

Agradezco al Fondecyt y al Fondef por el financiamiento de este trabajo, dentro de los proyectos #1990109 e I102400 respectivamente.

Finalmente quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres que me inculcaron los valores correctos y me dieron las oportunidades necesarias para mi desarrollo como persona. Siempre estaré en gratitud con ellos por su cariño y apoyo.

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA.....	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE DE TABLAS	viii
INDICE DE FIGURAS	xii
RESUMEN	xiv
ABSTRACT	xv
 I INTRODUCCIÓN.....	 1
 II EL MERCADO DE RENTA FIJA REAL EN CHILE Y PAGARÉS REAJUSTABLES CON PAGOS EN CUPONES	 5
2.1 Inflación y Tasas Reales.....	5
2.2 Emisores e Instrumentos de Renta Fija Real.....	6
2.3 Mercados	7
2.3.1 Mercado primario	7
2.3.2 Mercado secundario	8
2.3.3 Mercado primario vs. mercado secundario	10
2.4 Medios y Modalidades de Pago.....	11
2.5 Tasa Interbancaria y Tasa de Política Monetaria.....	12
2.6 Efectos de la Nominalización de la Tasa de Política Monetaria	13
2.7 Pagarés Reajustables del Banco Central de Chile con Pago en Cupones (PRC)	 14
2.7.1 Cálculo de la tabla de desarrollo de un PRC.....	15
2.7.2 Tasa interna de retorno (TIR) y valor presente.....	17
2.7.3 Cálculo del valor par y precio de un PRC.....	17
2.7 Liquidez de Bonos Reales de Largo Plazo del Banco Central	18
2.8 Otros Instrumentos que Aportan Información	23

2.8.1	Bonos de instituciones bancarias y empresas	23
2.8.2	Otros instrumentos de deuda libres de riesgo	24
III	MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS	26
3.1	Método de Nelson y Siegel.....	27
3.2	Método de Svensson.....	28
3.3	Métodos de Splines	30
3.3.1	Método de McCulloch.....	30
3.3.2	Smoothing Splines	31
3.4	Estudios Anteriores	34
3.5	Trabajos Anteriores Realizados en Chile	37
IV	ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS EN CHILE	39
4.1	Descripción de los Datos	39
4.2	Metodología de Estimación de la Estructura de Tasas de Interés.....	41
4.2.1	Restricción tasa de corto plazo.	43
4.2.2	Implementación métodos paramétricos.	43
4.2.3	Implementación de método de splines	43
4.2.4	Programación de Rutinas Computacionales.....	45
4.3	Resultados.....	45
4.3.1	Errores dentro de muestra.....	45
4.3.2	Errores fuera de muestra.....	48
4.3.3	Estructura de tasas cero cupón estimadas.....	50
4.3.4	Comparación con volatilidades empíricas	54
V	MODELOS DINÁMICOS.....	57
5.1	Relación de la Estructura de Tasas de Interés con su Dinámica	58
5.2	Construcción de un Modelo Estocástico de Tasas de Interés	60
5.2.1	Componente de tendencia	60
5.2.2	Componente de volatilidad.....	61
5.3	Desarrollo del Modelo de Vasicek	61
5.4	Modelos con Parámetros Independientes del Tiempo	64

5.5	Modelos con Parámetros Dependientes del Tiempo	65
5.6	Modelos Multifactoriales	67
5.7	Modelos Extendidos a Espacios de Dimensión Infinita.....	68
5.8	Modelación de Tasas de Interés en Chile: Revisión de la literatura	68
VI	ESTIMACIÓN DE UN MODELO DINÁMICO PARA EL MERCADO CHILENO.....	72
6.1	Metodología	72
6.2.1	Estimación de la variable de estado	75
6.3.2	Algoritmo de estimación.....	76
6.4	Resultados.....	77
6.4.1	Errores de ajuste.....	78
6.4.2	Comparación con volatilidades históricas	80
6.4.3	Estimación con panel de datos filtrados.....	83
6.4.4	Serie de la variable implícita estimada	86
VII	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FUTURAS	89
	BIBLIOGRAFIA.....	93
	A N E X O S	99
	ANEXO A: HISTORIA DE EMISIONES DE INSTRUMENTOS REALES DEL BANCO CENTRAL DE CHILE	100
	ANEXO B: EJEMPLO DE EFECTOS DE PAGO SOBRE UN BONO DE DESCUENTO.....	101
	ANEXO C: EJEMPLO DE TABLA DE DESARROLLO DE UN PRC.....	103
	ANEXO D: DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS	107
	ANEXO E: ERRORES DE ESTIMACIÓN ESTRUCTURA DE TASAS	112
E.1	Errores Método de Nelson y Siegel.....	112
E.2	Errores Método de Svensson.....	118
E.3	Errores Método de Splines	124

E.4 Errores Fuera de Muestra en TIR	130
ANEXO F: CURVAS CERO CUPÓN ESTIMADAS.....	133
ANEXO G: MATEMÁTICAS DE LA ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS.....	139
G.1 Bonos con Cupones.....	141
G.2 Duración	141
ANEXO H: RESUMEN RESULTADOS ESTIMACIÓN MODELO DE VASICEK.....	143
H.1 Errores estimación paneles de datos sin filtrar	143
H.2 Errores estimación paneles de datos filtrados	149
ANEXO I: RELACIÓN ENTRE VOLATILIDAD DE LOS RETORNO Y VOLATILIDAD DE LA TIR DE UN BONO CON CUPONES	155

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla II-1: Descripción de las variables de un nemotécnico de PRC.	15
Tabla II-2 Rotación de bonos reales de largo plazo	19
Tabla II-3: Probabilidad acumulada para el año 2001 de que ocurra una transacción en 1 día hábil y 5 días hábiles más para bonos PRC y CERO	22
Tabla III-1: Métodos de estimación de la estructura de tasas de interés empleados por bancos centrales de otros países	36
Tabla IV-1: Nodos método de splines.	44
Tabla IV-2: Parámetro de penalización por variabilidad.....	44
Tabla IV-3: Resumen de indicadores de errores de estimación de la estructura diaria de tasas de interés reales en Chile para el periodo 1997-2001.....	46
Tabla IV-5: Error absoluto promedio (MAE) para los bonos PRC fuera de muestra en las estimaciones diarias de la estructura de tasas de interés.	49
Tabla VI-1: Parámetros del modelo de Vasicek estimados.....	78
Tabla VI-2: Indicadores de error estimación modelo de Vasicek para los paneles P1, P2 y P3.....	79
Tabla VI-3: Parámetros del modelo de Vasicek estimados utilizando submuestra con paneles de datos filtrados.....	84
Tabla VI-4: Indicadores de error estimación modelo de Vasicek con paneles de datos filtrados P1F, P2F y P3F.....	84
Tabla A-1: Historia de emisiones de instrumentos reales del Banco Central de Chile	100

Tabla C-2: Tabla de desarrollo BC para bono PRC-4D0101	104
Tabla C-3: Tabla de desarrollo BCS para bono PRC-4D0101	105
Tabla D-1: Estadísticas de datos de PRC para el periodo 1997-2001	107
Tabla D-2: TIR de PRC promedio por año	108
Tabla D-3: Precio de PRC promedio por año	109
Tabla D-4: Desviación estándar de las TIR de PRC por año	110
Tabla D-5: Desviación estándar del precio de PRC por año	111
Tabla E-1: Error en TIR promedio método de Nelson y Siegel.	112
Tabla E-2: Error en precio promedio método de Nelson y Siegel.	113
Tabla E-3: Error absoluto promedio (MAE) en TIR método de Nelson y Siegel.	114
Tabla E-4: Error absoluto promedio (MAE) en precio método de Nelson y Siegel.	115
Tabla E-5: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en TIR método de Nelson y Siegel.	116
Tabla E-6: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en precio método de Nelson y Siegel.	117
Tabla E-7: Error promedio en TIR método de Svensson.	118
Tabla E-8: Error promedio en precio método de Svensson.	119
Tabla E-9: Error absoluto promedio (MAE) en TIR método de Svensson.	120
Tabla E-10: Error absoluto promedio (MAE) en precio método de Svensson.	121
Tabla E-11: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en TIR método de Svensson.	122

Tabla E-12: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en precio método de Svensson.	123
Tabla E-13: Error promedio en TIR método de Splines.	124
Tabla E-14: Error promedio en precio método de Splines.	125
Tabla E-15: Error absoluto promedio (MAE) en TIR método de Splines.	126
Tabla E-16: Tabla E.17: Error absoluto promedio (MAE) en precio método de Splines.	127
Tabla E-18: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en TIR método de Splines. .	128
Tabla E-19: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en precio método de Splines.	129
Tabla E-20: Error absoluto promedio (MAE) fuera de muestra en TIR Nelson y Siegel.	130
Tabla E-21: Error absoluto promedio (MAE) fuera de muestra en TIR Svensson. ..	131
Tabla E-22: Error absoluto promedio (MAE) fuera de muestra en TIR Splines.	132
Tabla F-1: Curvas cero cupón promedio por año Nelson y Siegel.	133
Tabla F-2: Desviación estándar curvas cero cupón por año Nelson y Siegel.	134
Tabla F-3: Curvas cero cupón promedio por año Svensson.	135
Tabla F-4: Desviación estándar curvas cero cupón por año Svensson.	136
Tabla F-5: Curvas cero cupón promedio por año Splines.	137
Tabla F-6: Desviación estándar curvas cero cupón por año Splines.	138
Tabla H-1: Error promedio en TIR por panel de datos modelo de Vasicek.	143
Tabla H-2: Error promedio en precio por panel de datos modelo de Vasicek.	144

Tabla H-3: Error absoluto promedio (MAE) en TIR por panel de datos modelo de Vasicek.....	145
Tabla H-4: Error absoluto promedio (MAE) en precio por panel de datos modelo de Vasicek.....	146
Tabla H-5: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en TIR por panel de datos modelo de Vasicek.....	147
Tabla H-6: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en precio por panel de datos modelo de Vasicek.....	148
Tabla H-7: Error promedio en TIR por panel de datos filtrados modelo de Vasicek.....	149
Tabla H-8: Error promedio en precio por panel de datos filtrados modelo de Vasicek.....	150
Tabla H-9: Error absoluto promedio (MAE) en TIR por panel de datos filtrados modelo de Vasicek.....	151
Tabla H-10: Error absoluto promedio (MAE) en precio por panel de datos filtrados modelo de Vasicek.....	152
Tabla H-11: Raíz del error cuadrático promedio (RMSE) en TIR por panel de datos filtrados modelo de Vasicek.....	153
Tabla H-12: Raíz del error cuadrático promedio (RMSE) en precio por panel de datos filtrados modelo de Vasicek.....	154

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 2-1: Comparación tasas (TIR) de transacciones de PRC en la Bolsa de Comercio de Santiago versus licitaciones del Banco Central para diciembre del 2001.....	10
Figura 2-2: Tasa interbancaria real en función del cambio mensual de IPC.....	14
Figura 2-3: Presencia bursátil de bonos PRC por plazo.....	20
Figura 2-4: Presencia bursátil de bonos CERO por plazo.....	21
Figura 3-1: Ilustración de construcción de una curva con secciones B-splines a, b, c y d.	32
Figura 4-1: TIR de los PRC promedio por año y promedio total de la muestra para el periodo 1997-2001.....	40
Figura 4-2: Desviación estándar de las TIR de PRC por año y de la muestra total para el periodo 1997-2001	41
Figura 4-3: Error absoluto promedio (MAE) para los métodos de Nelson y Siegel, Svensson y Splines en estimaciones diarias 1997-2001.	47
Figura 4-4: Error promedio para los métodos de Nelson y Siegel, Svensson y Splines en estimaciones diarias 1997-2001.	48
Figura 4-6: Error absoluto promedio para los instrumentos fuera de muestra métodos de Nelson y Siegel, Svensson y Splines 1997-2001.....	50
Figura 4-7: Promedio curvas cero cupón diarias para el año 2001.....	51
Figura 4-8: Promedio anual de curvas cero cupón diarias para el método de Svensson.	52

Figura 4-9: Curva cero cupón promedio con banda de una desviación estándar año 2001 estimada mediante método de Svensson	53
Figura 4-10: Curva cero cupón promedio con banda de una desviación estándar año 1998 estimada mediante método de Svensson.....	54
Figura 4-11: Comparación de la volatilidad de las TIR estimadas con el método de Svensson con la volatilidad de TIR histórica de bonos PRC por plazo (1997-2001).....	55
Figura 6-1: Diagrama de flujo del algoritmo de estimación del modelo de Vasicek...	77
Figura 6-2: Error absoluto promedio (MAE) en TIR de la estimación del modelo de Vasicek para cada panel de datos.	80
Figura 6-3: Volatilidad de los cambios en la TIR de los PRC para los paneles P1, P2 y P3.....	81
Figura 6-4: Volatilidad de los cambios en la TIR de los PRC histórica y del modelo de Vasicek para el panel P1.	82
Figura 6-5: Volatilidad de los cambios en la TIR de los PRC histórica y del modelo de Vasicek para el panel P3.	83
Figura 6-6: Volatilidad de los cambios en la TIR de los PRC histórica y del modelo de Vasicek para el panel P1F con panel de datos completos.	85
Figura 6-7: Volatilidad de los cambios en la TIR de los PRC histórica y del modelo de Vasicek para el panel P3F con panel de datos completos.	86
Figura 6-8: Serie de la tasa instantánea obtenida con panel de datos filtrado (P1F) y total (P1) y la tasa de política monetaria del Banco Central de Chile.	87

RESUMEN

Uno de los principales beneficios que provee el mercado de capitales es que presenta una serie de indicadores que sirven como fuente de información financiera para la toma de decisiones en proyectos e inversiones. Dentro de los indicadores fundamentales se encuentra la estructura de tasas de interés, la cual relaciona las tasas de interés con sus plazos y resume las expectativas de los agentes sobre la evolución futura de éstas. En mercados como el chileno esta estructura no se observa directamente y debe ser obtenida de las transacciones de instrumentos de deuda.

Esta tesis presenta dos enfoques distintos para la extracción de la información de tasas de interés reales del mercado de renta fija chileno utilizando las tasas de los bonos PRC, principal instrumento de deuda de largo plazo de Banco Central de Chile.

El primero considera aplicar métodos estáticos que extraen la estructura de tasas cero cupón de bonos con cupones. Se implementan los métodos de Nelson y Siegel (1987), de splines formulado por Fisher, Nychka y Zervos (1994), y de Svensson (1994) llegando a la conclusión que este último presenta la mejor alternativa por su capacidad de ajuste a los precios y estabilidad.

Como segundo enfoque se estudia el comportamiento dinámico con el modelo de Vasicek (1977), el cual permite que las tasas reviertan a una media de largo plazo. Se demuestra que este modelo logra replicar las volatilidades de los PRC de largo plazo. Este resultado es fundamental en la valorización de instrumentos que dependen de la dinámica de estos bonos, como opciones, y la generación de distribuciones de probabilidad que permiten hacer gestión del riesgo de las tasas reales de largo plazo.

ABSTRACT

One of the most important benefits of capital markets is that they provide information, in the form of several indicators, for decision making and investment. Of these indicators, the term structure of interest rates, which is the relationship between interest rates and their maturity, incorporates the expectations of agents on future rates. In the Chilean market this information is not directly observable and has to be extracted from bond transactions.

This thesis presents two approaches to the extraction of information of real interest rates in the Chilean market using rates from PRC bonds, which are the principal long run liabilities of the Chilean Central Bank.

The first approach implements static term structure modeling using coupon bonds. Nelson y Siegel (1987), Fisher, Nychka y Zervos (1994) splines and Svensson (1994) methodologies are applied concluding that the last one is the best alternative for its performance in pricing and stability.

As a second approach we study the dynamics of interest rates with Vasicek (1977) model, which incorporates mean reversion. It is shown that this model replicates long run PRC bonds volatilities. This is fundamental for valuing instruments that depend on the dynamics of these bonds, like options, and the generation of distributions for risk management of real interest rates.

I INTRODUCCIÓN

El mercado de capitales cumple con un conjunto de funciones que son primordiales en la economía. Éste permite alterar la estructura intertemporal de los flujos monetarios de los agentes y realizar transferencias de riesgos entre éstos, permitiendo asumir o traspasar riesgos específicos según las necesidades propias de cada agente. Pero una de las funciones principales del mercado de capitales es que sirve como fuente de información para la toma de decisiones financieras, tanto para el mercado financiero como el real. El mercado de capitales transmite información sobre los costos de capital y los riesgos implícitos en la economía identificando qué proyectos deben ser realizados ante las condiciones actuales.

Pero la información que transmiten los mercados de capitales no siempre es directamente observable. Los precios contienen información que debe ser extraída de alguna forma eficiente y creíble. La teoría financiera moderna extrae de la manera más eficiente esta información haciéndola explícita y directamente aplicable en la toma de decisiones.

En otros mercados más completos existe mucha información que ya es explícita y puede ser usada directamente en la evaluación y gestión de proyectos reales. En mercados con liquidez limitada como el chileno los métodos financieros que permiten extraer esta información pasan a ser fundamentales.

Este estudio se enfoca en extraer información de los precios de un tipo de instrumento del mercado de renta fija chileno y procesarla de manera de tener indicadores que puedan ser utilizados como herramientas de apoyo a la toma de decisiones financieras.

Un indicador fundamental es la estructura de tasas de interés que corresponde al conjunto de tasas de interés a distintos plazos para un momento dado del tiempo. Ésta tiene importantes aplicaciones en finanzas y economía que van desde la determinación de variables macroeconómicas hasta la valorización de activos. Es en la estructura de tasas que se resumen las expectativas del mercado sobre la evolución futura de las tasas de interés.

Una estructura de tasas de interés siempre está asociada a un tipo de instrumento de deuda, como por ejemplo una curva de tasas cero cupón de bonos de descuento, una curva de tasas internas de retorno (TIR) de bonos con cupones, o en la forma de una curva de tasas forward deducida de las curvas anteriores o de otros instrumentos de mercado.

Normalmente la forma más útil de expresar la estructura de tasas de interés es en la forma de una curva cero cupón. El contar con una curva cero cupón es fundamental como herramienta de valorización de instrumentos y como indicador de las expectativas del mercado. El principal problema que se debe enfrentar en Chile es que esta estructura de tasas de interés no se observa directamente de los precios de mercado sino que debe ser deducida de la información que proveen los precios de instrumentos relativamente complejos.

La literatura y la práctica financiera han demostrado que el inferir una estructura de tasas de interés de instrumentos de mercado, ya sea en forma de una curva de descuento, de una curva de tasas cero cupón o de una curva forward presenta ciertos problemas metodológicos. Interrogantes como qué datos se deben utilizar, con qué frecuencia actualizarlos, qué método de interpolación usar o qué metodología de estimación estadística se debe aplicar no tienen respuesta estandarizada. Todo dependerá de las características del mercado en el cual se esté aplicando el método.

Diversos trabajos han tratado el tema comparando métodos bajo distintos prismas. Bliss (1996), Bolder y Stréliski (1999), Anderson y Sleath (2001), entre otros han comparado diversas metodologías para ciertos mercados en particular como EEUU, Canadá y Gran Bretaña. Estos mercados se caracterizan por ser líquidos y profundos, existiendo precios diarios a firme para instrumentos con vencimientos únicos a todos los plazos.

Pero no sólo es importante conocer la estructura de tasas de interés para un momento dado del tiempo. Cómo ésta evoluciona día a día es fundamental para identificar los riesgos que afectan a todos los activos que dependen de ella. Los modelos dinámicos de tasas de interés simulan el comportamiento de las tasas de interés en el tiempo. Estos modelos se basan en procesos estocásticos que primero

fueron utilizados en finanzas para describir el comportamiento de acciones y valorar derivados sobre estos instrumentos como en el trabajo seminal de Black y Scholes (1973). La complejidad de la dinámica de la estructura de tasas ha generado una creciente literatura que presenta una gran gama de modelos que se basan en dinámicas estocásticas pero que cuentan con distintos supuestos y especificaciones. Estos modelos pueden ser de equilibrio general como en Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985) o ajustarse perfectamente a la estructura de tasas de interés del día como en Hull y White (1990) y Black y Karasinski (1991).

Los modelos dinámicos deducen estructuras de tasas de interés para cada día y además permiten simular el comportamiento futuro de las tasas de interés mientras que los métodos estáticos sólo extraen la información para un momento dado. Por otra parte, los modelos estáticos se ajustan mejor a los precios observados de mercado que los modelos dinámicos, al tener menores limitaciones en cuanto a su forma funcional.

El objetivo principal de esta tesis es utilizar los precios de mercado de Pagarés Reajustables con Cupones (PRC) emitidos por el Banco Central de Chile para inferir de éstos la estructura de tasas de interés reales en la forma de una curva cero cupón y modelar la dinámica implícita en ellos.

Se describirán las características específicas de los bonos PRC, cómo se calculan sus flujos de pago y cuáles son las convenciones de mercado para valorizarlos. También se caracterizará el mercado chileno de renta fija identificando emisores, instrumentos denominados en unidades de fomento, sus convenciones y medios de pago.

Como primer objetivo específico se busca comparar distintos métodos de estimación de la estructura de tasas de interés para el mercado chileno, midiendo su desempeño en ajuste y estabilidad para un periodo determinado.

Para esto se implementan los métodos paramétricos de Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994) y el método no paramétrico basado en splines cúbicos de Fisher, Nychka y Zervos (1994) con la extensión de Waggoner (1997). Se utilizan los

precios diarios de bonos PRC para el periodo comprendido entre enero de 1997 y diciembre del 2001, transados en la Bolsa de Comercio de Santiago.

El segundo objetivo específico es estudiar el comportamiento dinámico de las tasas de interés reales en Chile utilizando un modelo reconocido por tener una especificación que concuerda con el comportamiento empírico de las tasas de interés en mercados desarrollados.

Se implementa el modelo de un factor de riesgo propuesto por Vasicek (1977) el cual incorpora reversión de las tasas de interés a una media de largo plazo. Este modelo se calibra utilizando datos de bonos PRC para todos los plazos siguiendo las metodologías de calibración de modelos de commodities con datos de panel como en Cortazar y Schwartz (2002), Riera (1999) y Reyes (2000), e incorporando métodos de extracción de variables latentes de bonos con cupones como en Lund (1997).

Finalmente, se hace un análisis de los resultados tanto de la estimación de la estructura como de la dinámica de las tasas de interés relacionándolos entre sí e identificando las ventajas relativas de ambos enfoques.

Esta tesis se divide de la siguiente forma: en el Capítulo II se hace una introducción general al mercado chileno de renta fija real y se describen las características de los bonos PRC en cuanto a su construcción, liquidez y convenciones de mercado para valorizarlos. En el Capítulo III se hace una descripción de los métodos de estimación de la estructura de tasas de interés encontrados en la literatura y se describen además los trabajos realizados en Chile sobre el tema. El Capítulo IV presenta una descripción estadística de los datos utilizados, la metodología y los resultados de la estimación de la estructura de tasas de interés. El Capítulo V presenta el marco teórico de los modelos dinámicos de tasas de interés describiendo en detalle el modelo propuesto para el mercado chileno junto con una revisión de los trabajos realizados en Chile sobre el tema. La metodología de calibración y los resultados del modelo de Vasicek se presentan en el Capítulo VI. El Capítulo VII concluye y entrega recomendaciones futuras.

II EL MERCADO DE RENTA FIJA REAL EN CHILE Y PAGARÉS REAJUSTABLES CON PAGOS EN CUPONES

Los principales instrumentos de deuda de largo plazo del mercado chileno son los Pagarés Reajustables con Pagos en Cupones (PRC) emitidos por el Banco Central de Chile. Las tasas de interés de estos instrumentos contienen la información sobre las tasas reales de mediano y largo plazo que finalmente resumen las expectativas de los agentes sobre la economía chilena.

La estructura de pago de los bonos PRC no se asimila a la estructura de bonos del mercado de EEUU que pagan semestralmente intereses sobre un capital para luego pagar el capital completo al vencimiento¹. Todos los cupones de un bono PRC son iguales y cada uno está conformado por una parte de intereses y una de amortización que son variables a lo largo de la vida del bono. Por otra parte, esta estructura particular de los PRC ha sido utilizada por el resto del mercado en el diseño de instrumentos incorporándose en bonos de largo plazo de empresas e instituciones financieras. La compleja estructura de los bonos PRC hace necesario definir claramente cómo se determinan sus flujos y cuáles son las prácticas de mercado para valorizarlos.

Antes de describir en detalle los bonos PRC se describirá el contexto de mercado en los cuales éstos están insertos, como el sistema de reajustabilidad chileno, los mercados en los cuales se transan y el nivel de liquidez que presentan.

2.1 Inflación y Tasas Reales

En Chile la inflación se mide de acuerdo a la variación mensual del Índice de Precios al Consumidor (IPC). El IPC se define a partir de los precios de una canasta de productos ponderados de acuerdo a la influencia que tienen en el consumo. Este indicador se calcula para cada mes de manera de reflejar los cambios en el nivel de precios de la economía.

¹ Estos bonos son conocidos como bonos *bullet*.

Como parte del sistema de reajustabilidad chileno se definió la Unidad de Fomento¹ (UF) que se ajusta de acuerdo con la variación del IPC. Todas las transacciones en esta unidad mantienen por lo tanto su valor en términos reales o por sobre la inflación.

En Chile todos los instrumentos de deuda de largo plazo, y una parte de los de corto plazo están denominados en UF, a diferencia de otros países en que la mayoría de los bonos a largo plazo son nominales y los bonos indexados a la inflación representan sólo una pequeña parte del mercado de renta fija.

Como los flujos de caja están expresados sobre la UF los intereses que pagan los instrumentos de deuda de largo plazo son reales. Esto implica que la estructura de tasas de interés reales está implícita en los instrumentos denominados en esta unidad.

2.2 Emisores e Instrumentos de Renta Fija Real

Los emisores del mercado de renta fija real se pueden dividir en cuatro grupos; el Estado de Chile, el Banco Central de Chile (BC), las empresas y las instituciones bancarias y financieras.

El Estado de Chile ha emitido instrumentos reales de forma intermitente a lo largo de su historia. Dentro de los instrumentos de los últimos 30 años se puede mencionar los bonos CORA, Bonos de Reconocimiento y los Pagarés Reajustables de la Tesorería General de la República.

¹ El valor de la UF entre el día 10 de un mes y el día 9 del siguiente se calcula en base a la variación del IPC del mes anterior:

$$UF_t = UF_9 (1 + \Delta_{\%} IPC)^{t/n}$$

donde n es el número de días del mes.

El Banco Central de Chile emite actualmente Pagarés Reajustables con Cupones (PRC) y Pagarés Reajustables del Banco Central (PRBC). Los plazos a los cuales se emiten estas obligaciones, las frecuencias de las licitaciones y los cupos asignados en cada una han variado durante el tiempo de acuerdo a las políticas de emisión del BC¹.

Una última categoría de instrumentos del BC son los bonos CERO. Estos bonos no se emiten directamente ya que corresponden a la sustitución de los cupones de los bonos PRC por bonos cero cupón o de descuento. Éstos se pueden agrupar por vencimiento sin importar de que bono PRC procedan.

Las instituciones bancarias y financieras emiten bonos reales de corto plazo como Pagarés Bancarios, y de largo plazo como Bonos Bancarios, Letras de Crédito y Bonos Subordinados.

Finalmente, el mercado de renta fija real de las empresas incluye los Bonos o Debenture de largo plazo y Efectos de Comercio de corto plazo.

2.3 Mercados

En Chile el mercado de renta fija de bonos emitidos por el Banco Central (BC) se divide en un mercado primario de licitaciones del BC, y uno secundario donde se realizan todas las transacciones entre agentes privados. Estos mercados se diferencian tanto en frecuencia, montos y convenciones para valorar ciertos instrumentos. Es necesario identificar claramente cuáles son estas diferencias para así utilizar los datos de forma correcta y sin distorsiones.

2.3.1 Mercado primario

El mercado primario de instrumentos de renta fija corresponde a las licitaciones de venta y de compra de bonos que hace el BC en las cuales pueden

¹ En el Anexo A se presenta los plazos emitidos para estos instrumentos en los últimos 10 años.

participar tanto instituciones bancarias, sociedades financieras, administradoras de fondos de pensiones, administradoras de fondos mutuos y compañías de seguros¹. Las licitaciones son competitivas entregando el ofertante el monto que desea adjudicarse y la tasa de interés o descuento sobre el precio. El modo de licitación es del tipo holandés: se ordenan las licitaciones de mejor a peor oferta y se establece una tasa de corte en función de la oferta menos atractiva que complete el monto a licitar. El resto de los participantes que se les ha sido adjudicada la licitación pueden utilizar la tasa de corte para calcular el precio a pagar o ser pagado por el Banco Central².

Las licitaciones de venta se realizan actualmente de forma electrónica por el sistema de operaciones de mercado abierto (SOMA), establecido desde noviembre del 2001, y que permite dos tipos de licitaciones: tradicional e interactiva. En la licitación tradicional el participante hace una oferta la cual es válida hasta el final de la licitación. En la licitación interactiva el participante tiene la opción de modificar su oferta según los resultados parciales que se entregan en línea.

Otra componente del mercado primario son las licitaciones de compra por ventanilla. Este tipo de licitaciones son con pacto de retroventa, en que el BC tiene la obligación de revender el bono a un monto especificado en una fecha establecida³. Sólo pueden participar instituciones bancarias y sociedades financieras en estas operaciones.

2.3.2 Mercado secundario

El mercado secundario de renta fija corresponde a toda transacción de bonos emitidos tanto por el Banco Central como por privados realizadas en bolsa -

¹ Capítulo IV.B.6.2 Compendio de Normas Financieras Banco Central de Chile.

² Capítulos IV.B.8.4, IV.B.7.1, IV.C.1 Compendio de Normas Financieras Banco Central de Chile.

³ Capítulos IV.B.8.5 y IV.B.8.6 Compendio de Normas Financieras Banco Central de Chile.

Bolsa de Comercio de Santiago y Bolsa Electrónica- y en el mercado OTC¹ entre agentes privados. En este último mercado existen tanto transacciones de venta definitiva como transacciones de venta con pacto de retrocompra entre las empresas facultadas a operar en el mercado primario y personas jurídicas o naturales cualesquiera.

El mercado secundario de instrumentos de renta fija se divide en el mercado de intermediación financiera que comprende los bonos de descuento² de corto plazo³ tanto reales como nominales, y el mercado de renta fija que incluye bonos de largo plazo denominados en UF. Esta división del mercado de renta fija se hace debido a los distintos propósitos de los instrumentos como necesidades de financiamiento de corto y largo plazo del sistema financiero y de las empresas.

En la Bolsa de Comercio de Santiago la modalidad de transacción funciona en forma de 7 remates que se realizan cada media hora desde las 10:30 con una duración de 10 minutos cada uno. Se realiza además un octavo remate a las 16:15. El vendedor coloca una tasa de interés máxima a la cual está dispuesto a vender y las ofertas pueden ser iguales o menores a esta tasa.

La Bolsa Electrónica de Chile cuenta con un sistema de rueda que funciona de forma continua existiendo precios de compra y venta para cada categoría de bonos.

El mercado OTC opera vía telefónica transando en su mayoría compras y ventas con pacto. Este mercado fue bastante dinámico en todos los plazos hasta la crisis de liquidez del año 1998.

¹ *Over the Counter*. Corresponden a las transacciones fuera de bolsa.

² Un bono de descuento es un instrumento de deuda que paga sólo el principal al vencimiento.

³ El grueso del mercado tiene vencimientos a menos de un año pero se pueden encontrar emisiones hasta 3 años.

2.3.3 Mercado primario vs. mercado secundario

La principal ventaja del mercado secundario sobre el primario es la frecuencia en que se puede obtener información de las tasas de los instrumentos. El mercado secundario refleja el movimiento día a día de las tasas de interés de los instrumentos obteniéndose información importante sobre las expectativas económicas y los precios de mercado de los activos. El mercado secundario además sigue fielmente al mercado primario como se puede apreciar en el siguiente gráfico que muestra las transacciones en la Bolsa de Comercio de Santiago (BCS) versus la tasa promedio de licitaciones en diciembre del 2001 las cuales corresponden a PRC de 8 y 20 años.

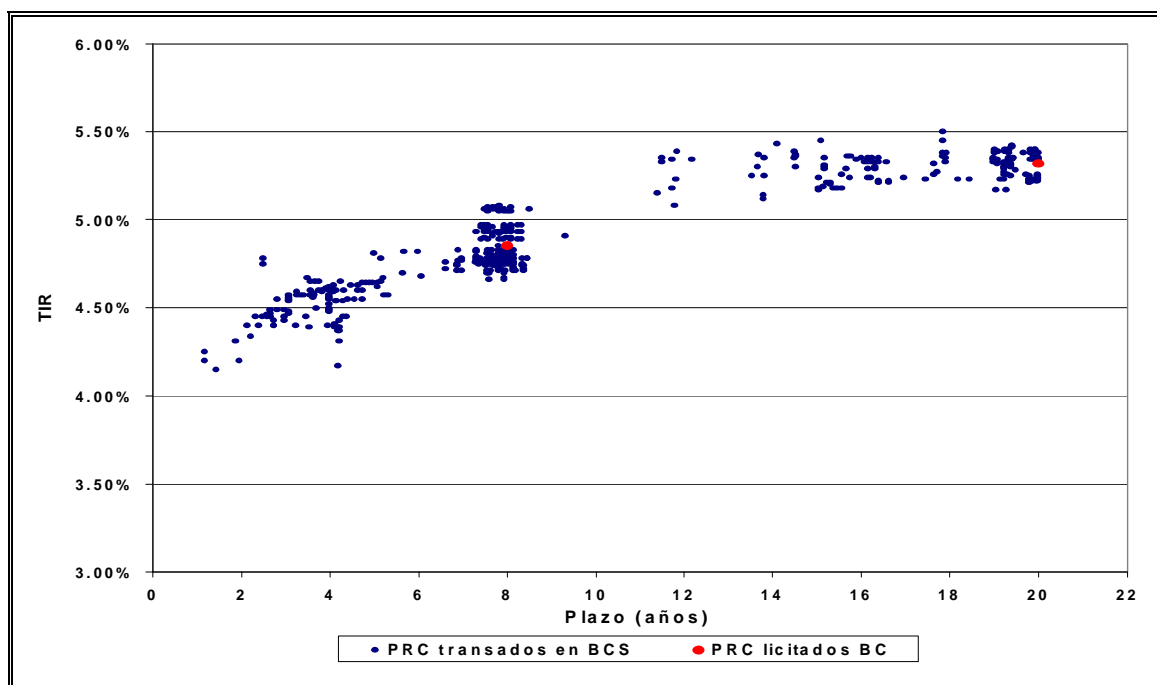


Figura 2-1: Comparación tasas (TIR) de transacciones de PRC en la Bolsa de Comercio de Santiago versus licitaciones del Banco Central para diciembre del 2001.

Para un análisis diario de la dinámica de las tasas de interés se requiere de una fuente de información que refleje el nivel de éstas cada día. Por esto se elige

como fuente de información las transacciones hechas en la Bolsa de Comercio de Santiago.

2.4 Medios y Modalidades de Pago

En Chile el medio de pago común para las transacciones realizadas en los mercados de renta fija es el vale vista. Este documento paga los fondos el día hábil siguiente al cual es emitido.

En el caso del pago de flujos de los bonos por parte del BC, el pago se hace efectivo el mismo día en la cuenta corriente que mantienen los bancos en el instituto emisor. En el caso de que el tenedor de un bono no sea una institución bancaria el pago se hace mediante un vale vista.

En el mercado secundario existen distintas modalidades de pago que definen el día en que se emite el vale vista por el comprador del instrumento. Las modalidades de pago más comunes son PH y PM que representan “pago hoy” y “pago mañana” refiriéndose al momento en que se emite el vale vista después de la operación. El mercado de intermediación financiera funciona en su totalidad con la modalidad de pago PH. En el mercado de renta fija es común que los pagos sean hechos en modalidad PM pero existe un porcentaje considerable de las transacciones en que se utiliza otra modalidad.

Tanto la modalidad como el medio de pago generan distorsiones en las tasas de interés observadas especialmente en bonos con plazos cortos. Estos efectos son amplificados cuando existe un fin de semana de por medio. Hay que agregar que para un analista financiero es difícil definir qué tipo de efecto podría tener en la tasa de interés del instrumento, especialmente si se desconocen cuáles son las partes involucradas en la transacción, ya que de esto dependerá cuál será el medio de pago para los flujos del bono.

Otro efecto que se considera en el mercado de corto plazo es el encaje de un 9% que se debe considerar por cada vale vista emitido. El encaje se calcula al final del día por sobre el monto total de vales vistas emitidos menos el monto total de vales vistas recibidos, por lo que cada vale vista emitido es un costo para la institución

financiera mientras que un vale vista recibido es un beneficio. El encaje comprende la inamovilidad de fondos los cuales podrían hacerse rentar de un día para otro.

El efecto en la tasa de un instrumento debido al medio de pago depende tanto del plazo del instrumento como del número de días al día hábil siguiente. El nivel en el cual se encuentra la tasa interbancaria también influye en este efecto.

En el Anexo B se hace un ejemplo de los efectos de los medios y modalidades de pago sobre la tasa de un bono de descuento.

2.5 Tasa Interbancaria y Tasa de Política Monetaria

Dentro del mercado monetario chileno el contrato de deuda a más corto plazo es el préstamo a un día entre instituciones bancarias. La política monetaria chilena se enfoca a controlar la inflación por medio de la tasa de política monetaria la cual se ve reflejada en la tasa interbancaria a un día o tasa de cámara¹. La relación entre la tasa de cámara y los préstamos entre bancos a plazos más largos puede estar totalmente distorsionada por los efectos de los medios de pago, como se vio anteriormente.

El Banco Central utiliza la política monetaria como herramienta para velar por la estabilidad de precios. El nivel objetivo de la tasa de interés interbancaria se logra mediante la regulación de la liquidez del sistema financiero usando instrumentos como operaciones de mercado abierto, compra-venta con pacto de pagarés de corto plazo, líneas de crédito y depósitos de liquidez².

¹ Las instituciones bancarias tienen una cuenta corriente en el BC donde las transferencias y préstamos entre un banco y otro en este mercado son efectivas el mismo día.

² Banco Central, “Política Monetaria del Banco Central de Chile: Objetivos y Transmisión”, Mayo 2000

2.6 Efectos de la Nominalización de la Tasa de Política Monetaria

El Banco Central, en búsqueda de dejar atrás la reajustabilidad en el corto plazo, decidió fijar la tasa de política monetaria en términos nominales desde agosto del año 2001. El objetivo es reducir la variabilidad de los retornos de los activos financieros expresados en pesos, aumentar la transparencia de las transacciones de estos instrumentos y reducir la variabilidad de los agregados monetarios más líquidos¹.

Junto con esta medida el BC empezó a emitir bonos PDBC con plazos de 30 días y 90 días que junto con los emitidos a 360 días conforman la estructura de tasas nominal a 1 año. Se dejaron de emitir PRBC a 90 días sustituyéndolos por PRBC a 360 días. También se cambió la estructura de emisión de los PRC eliminando los PRC a 10, 12 y 14 años y aumentando los montos en los plazos de 8 y 20 años.

La tasa interbancaria que tenía una alta volatilidad debido a cambios del IPC se estabilizó en torno al objetivo nominal establecido. La volatilidad se traspasó a las tasas reales generando distorsiones en las tasas reales de corto plazo. IPC altos del mes anterior generan tasas reales diarias negativas e IPC bajos o negativos generan tasas diarias muy altas. La figura 2-2 muestra los valores que puede tomar la tasa real implícita a un día dados los cambios en el IPC suponiendo una Tasa de Política Monetaria de un 6,5% nominal anual.

¹ Informe de Política Monetaria, Septiembre 2001, Banco Central de Chile

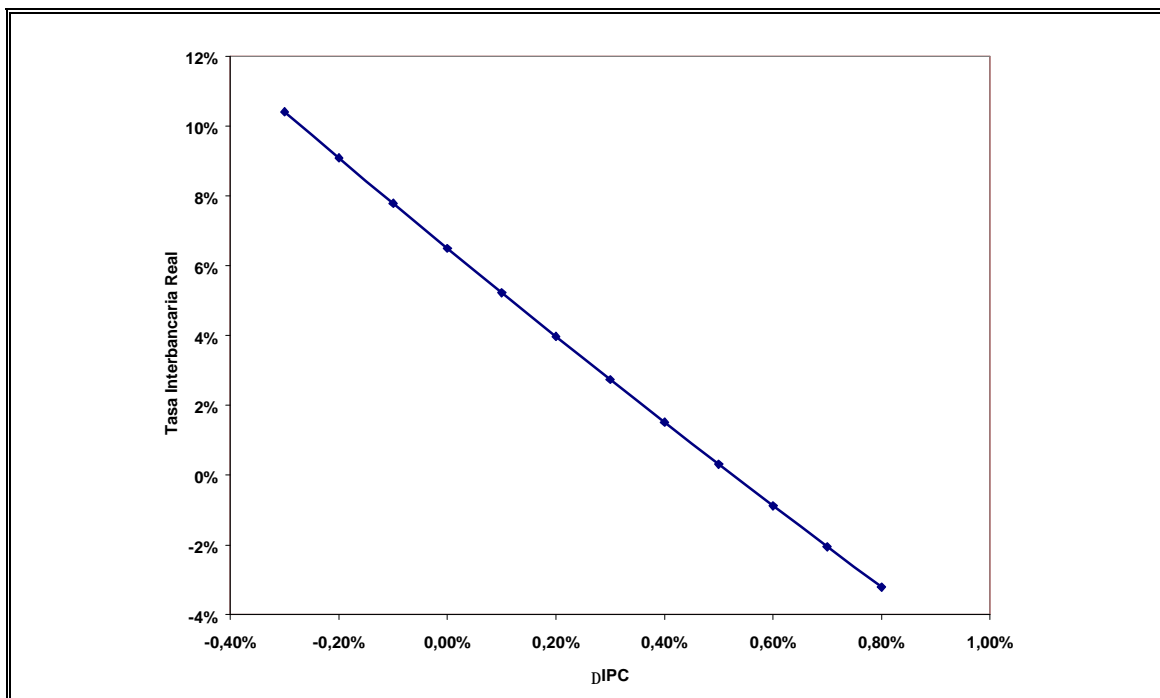


Figura 2-2: Tasa interbancaria real en función del cambio mensual de IPC suponiendo una Tasa de Política Monetaria de 6,5% nominal anual.

2.7 Pagarés Reajustables del Banco Central de Chile con Pago en Cupones (PRC)

En esta sección se describe cómo se construyen los flujos de un bono PRC y cuáles son las prácticas de mercado para valorizarlos. Además en el Anexo C se muestra un ejemplo de un PRC en particular para así ilustrar numéricamente la construcción y valorización de uno de estos instrumentos.

Cada PRC está descrito por un código nemotécnico que resume su fecha de emisión, el corte o monto del principal y el plazo al que es emitido. La siguiente tabla resume las características del nemotécnico del tipo PRC-XYMMAA:

Tabla II-1: Descripción de las variables de un nemotécnico de PRC.

Variable	
X – Plazo	1 = 10 años 5 = 12 años 2 = 4 años 6 = 14 años 3 = 6 años 7 = 20 años 4 = 8 años
Y – Corte en UF	A = 500 C = 5.000 B = 1.000 D = 10.000
MM, AA – Emisión	Mes y año en dos dígitos en el cual fue emitido

Los bonos PRC se caracterizan por tener cupones semestrales iguales pagados el día primero del mes y calculados sobre una tasa fija, salvo el último cupón el que es ligeramente distinto debido a los días efectivos de pago de intereses como se verá a continuación. Esto implica que cada PRC tiene una tabla de desarrollo única dependiente de la fecha de emisión, el monto y el plazo al que fue emitido. La tabla de desarrollo de un PRC especifica el monto del cupón, los intereses y la amortización pagada para cada fecha de pago de cupón junto con el principal que queda por pagar o capital insoluto.

2.7.1 Cálculo de la tabla de desarrollo de un PRC

Los bonos PRC se emiten a una tasa fija de un 6,5% real compuesta anual con la que se calculan los cupones semestrales en UF¹. De esta tasa anual, r_a , se obtiene una tasa semestral equivalente:

¹ Esta tasa fue de un 5% para bonos PRC a cuatro años plazo los cuales dejaron de emitirse en enero de 1994.

$$r_s = (1 + r_a)^{0.5} - 1 \quad (2.1)$$

Esta tasa es utilizada para calcular el cupón C_i , según el monto del corte M , y el número de cupones del bono N utilizando la fórmula de la anualidad:

$$C_i = \frac{M \cdot r_s}{\left(1 - \frac{1}{(1 + r_s)^N}\right)} \quad i = 1 \dots N - 1 \quad (2.2)$$

El cupón base calculado es utilizado para calcular la tabla de desarrollo del PRC que determina los intereses I_i , amortización A_i , saldo o capital insoluto K_i , para cada una de las fechas correspondientes al pago de cupón.

Para el cálculo de los cupones se utiliza la tasa de emisión considerando una base 30/360. Esta base considera que cada mes tiene 30 días con un año de 360 días. Los intereses pagados se calculan con la misma tasa de emisión pero con una base Actual/360 que considera los días efectivos entre una fecha de cupón y la siguiente. Esto produce que el último cupón del PRC tenga que ser ajustado de manera que este rente efectivamente 6,5% anual en una base Actual/360.

Los intereses pagados para una fecha de pago de cupón se calculan como los intereses sobre el saldo anterior considerando los días efectivos entre la fecha de pago de cupón anterior y la actual (d):

$$I_i = K_{i-1} \cdot (1 + r_a)^{d/360} - K_{i-1} \quad i = 1 \dots N \quad (2.3)$$

La amortización o la parte del principal que se está pagando corresponde al cupón pagado menos los intereses:

$$A_i = C_i - I_i \quad i = 1 \dots N - 1 \quad (2.4)$$

El nuevo saldo es el anterior menos la amortización para la actual fecha de pago de cupón.

$$K_i = K_{i-1} - A_i \quad i = 1 \dots N - 1 \quad (2.5)$$

El efecto de la diferencia entre la base del cálculo de los cupones y el cálculo de los intereses de la tabla de desarrollo descrito anteriormente, se traduce en que los intereses pagados sean mayores y que se amortizará menos capital en cada fecha de pago de cupón. La suma del capital no amortizado se pagará finalmente en el último cupón considerando la amortización final como el saldo remanente:

$$A_N = K_{N-1} \quad (2.6)$$

Finalmente el último cupón se calcula de la suma de los intereses y la última amortización:

$$C_N = A_N + I_N \quad (2.7)$$

2.7.2 Tasa interna de retorno (TIR) y valor presente

Se define la tasa interna de retorno (TIR) de un PRC como la tasa de interés con que se calcula el precio de mercado en UF de éste. En el mercado secundario ésta es la tasa en base a la que se transan los PRC.

La TIR en el mercado secundario considera base 365¹ y dos decimales definiendo el valor presente del PRC como:

$$VP = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{(1 + TIR)^{d_i/365}} \quad (2.8)$$

donde C_i es el cupón i y d_i es el número de días entre la fecha de valorización y el pago del cupón i .

2.7.3 Cálculo del valor par y precio de un PRC

Aunque las posturas se hacen en función de la tasa interna de retorno (TIR) en el mercado, se considera importante el precio como porcentaje del valor par.

¹ En las licitaciones de PRC la TIR ofrecida está en base 360.

Definimos el valor par como el capital que queda por pagar más los intereses devengados hasta la fecha de valorización:

$$ValorPar = K_{i-1} \cdot (1 + TERA)^{d/365} \quad (2.9)$$

dónde d son los días entre la fecha de valorización y la fecha del último cupón pagado y la TERA se define como la tasa efectiva de retorno anual que devenga el bono en base 365:

$$TERA = (1 + r_a)^{365/360} - 1 \quad (2.10)$$

El precio de un PRC se calcula como el valor presente de éste como porcentaje sobre el valor par:

$$P_{\%} = \frac{VP}{ValorPar} \quad (2.11)$$

Este indicador permite inferir si la TIR del bono está sobre o bajo la tasa de emisión. Por ejemplo, cuando el precio es menor que un 100% la TIR es mayor que la tasa de emisión. El precio parece ser un indicador más adecuado para mercados en que la tasa de emisión es variable y está relacionada al nivel de tasas de interés del momento.

En el Anexo C se realiza un ejemplo numérico del cálculo de la tabla de desarrollo para un PRC en particular y se calcula el valor presente, valor par y precio para una fecha determinada.

2.7 Liquidez de Bonos Reales de Largo Plazo del Banco Central

La liquidez en los mercados financieros está directamente relacionada con la capacidad de comprar o vender un activo en un momento específico y a un precio competitivo que refleje las condiciones de mercado. La liquidez se ve reflejada en la cantidad de transacciones realizadas y su frecuencia en el tiempo para bonos de un plazo o tipo específico. A continuación se analizará la liquidez de bonos reales de largo plazo del Banco Central, bonos PRC y CERO, los cuales se transan en el mercado secundario.

La tabla II-2 muestra la rotación en el periodo de estudio comparando el stock total anual promedio con los montos totales transados en bolsa.

Una de las razones de la baja rotación de bonos PRC es la estructura del mercado financiero chileno en que las compañías de seguro y AFP toman posiciones de largo plazo en estos bonos. Los bonos CERO son transados por las instituciones bancarias por motivos de especulación y calce de operaciones de más corto plazo.

Tabla II-2 Rotación de bonos reales de largo plazo

PRC (miles de UF)	1997	1998	1999	2000	2001
Stock Total Promedio	444.268,4	469.501,2	445.403,8	407.084,6	362.301,3
Monto Transado	203.164,5	149.667,0	146.648,5	110.182,0	155.294,5
% Rotación	45,7%	31,9%	32,9%	27,1%	42,9%
CERO (miles de UF)					
Stock Total Promedio	-	-	-	46.935,2	100.586,3
Monto Transado	-	-	-	56.826,8	90.198,8
% Rotación	-	-	-	121,1%	89,7%

Aunque el stock total de bonos PRC fue disminuyendo durante el periodo 1997-2001 éste se compensa con un aumento en el stock total de bonos CERO. Las transacciones y rotación de la muestra presentan un quiebre el año 2001 con respecto a la tendencia a la baja que se ve entre los años 1997 y 2000 retomando los niveles exhibidos antes de la fuerte contracción monetaria del año 1998.

La rotación y los montos totales permiten tener una idea agregada para cada tipo de bono. Para analizar más en detalle la liquidez de los bonos se deben caracterizar las transacciones por plazo. La figura 2-3 resume las transacciones por plazo de bonos PRC como porcentaje de los días totales, lo que normalmente se define como presencia bursátil.

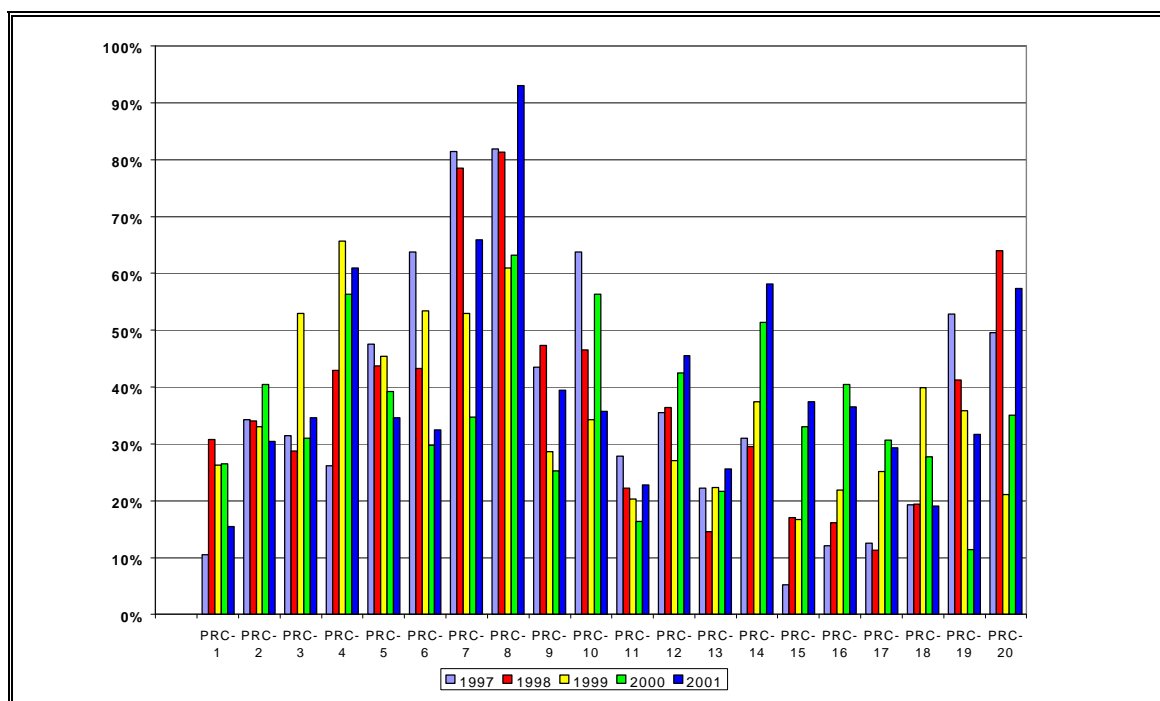


Figura 2-3: Presencia bursátil de bonos PRC por plazo

Se puede ver que los plazos más líquidos son los plazos que corresponden a las licitaciones del Banco Central. En general son pocos los plazos que superan el 60% de días con transacciones en el año. En el año 2001 aumentó la presencia fuertemente de bonos en plazos de 8 y 20 años debido principalmente al aumento de los montos licitados en estos plazos y a la eliminación de licitaciones de otros plazos.

En la figura 2-4 se muestra el análisis de presencia bursátil para los bonos CERO. Aunque menos líquidos que los PRC se puede ver que los plazos con mayor presencia se encuentran entre 1 año y 8 años.

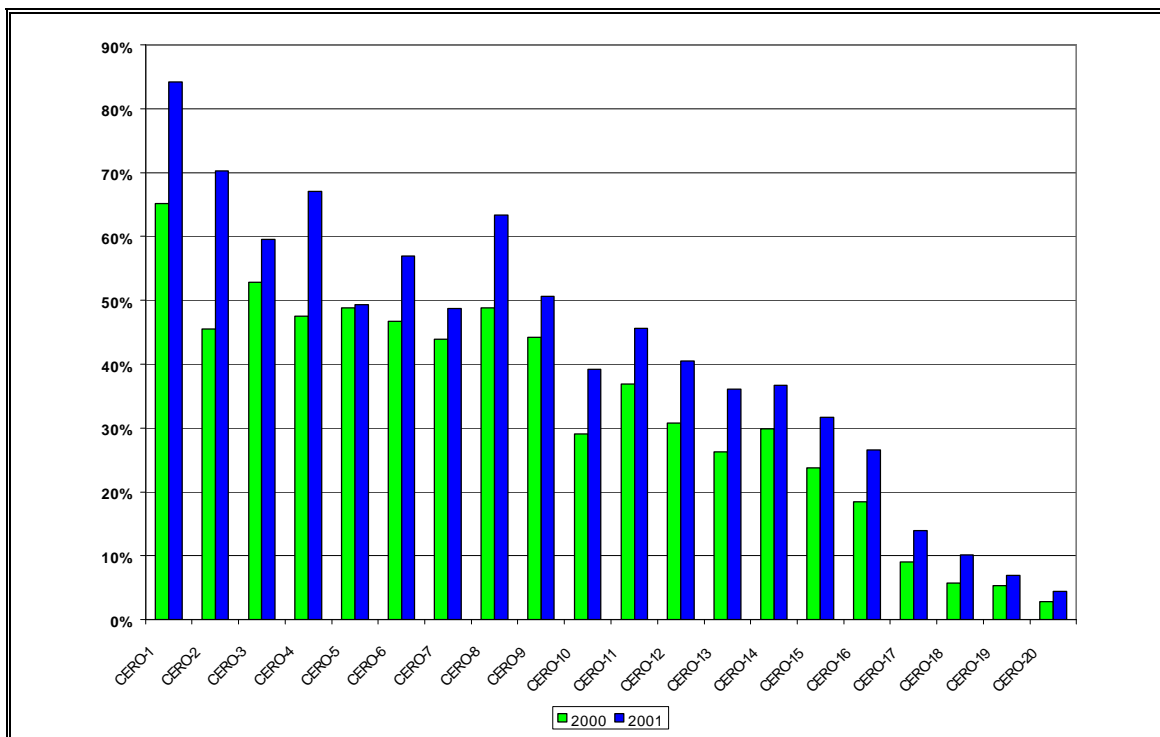


Figura 2-4: Presencia bursátil de bonos CERO por plazo

La presencia a plazos más largos disminuye considerablemente debido a que la concentración de cupones de los bonos PRC se encuentra hacia el corto plazo. Esto se debe a que los PRC de todos los plazos tienen cupones de plazos más cortos mientras sólo los con vencimiento a 20 años tienen cupones de más largo plazo.

De manera de afinar el análisis de liquidez del mercado secundario se estudió el número de días hábiles que pasan entre la transacción de un bono con cierto plazo antes de que se vuelva a transar un bono de un plazo similar. La tabla II-3 resume la probabilidad en el año 2001 de que se transe un bono del plazo indicado al día hábil siguiente y en 5 días hábiles más dado que hubo una transacción.

Tabla II-3: Probabilidad acumulada para el año 2001 de que ocurra una transacción en 1 día hábil y 5 días hábiles más para bonos PRC y CERO

	PRC		CERO	
Plazo (Años)	1 día	5 días	1 día	5 días
1	39,47%	84,21%	68,99%	99,37%
2	33,78%	82,43%	52,73%	92,73%
3	39,29%	85,71%	63,28%	95,31%
4	61,49%	99,32%	56,52%	95,65%
5	40,24%	86,59%	50,85%	94,92%
6	49,35%	79,22%	53,10%	93,81%
7	68,87%	98,68%	48,11%	95,28%
8	87,98%	99,04%	62,71%	92,37%
9	41,76%	92,31%	58,88%	94,39%
10	50,00%	91,86%	45,71%	82,86%
11	26,92%	73,08%	58,43%	87,64%
12	51,40%	91,59%	48,65%	83,78%
13	40,98%	77,05%	39,68%	77,78%
14	63,97%	97,06%	50,00%	88,89%
15	42,22%	87,78%	40,35%	84,21%
16	50,00%	89,53%	27,27%	77,27%
17	43,66%	81,69%	19,05%	42,86%
18	36,36%	61,36%	0,00%	46,15%
19	32,69%	82,69%	16,67%	50,00%
20	67,57%	95,50%	0,00%	16,67%

Como se ve en la tabla los plazos más líquidos coinciden con los plazos más líquidos en presencia bursátil lo que confirma la liquidez en los plazos correspondientes a los licitados por el Banco Central. Aunque la liquidez diaria del mercado es limitada, en general la información de los bonos PRC se completa en el periodo de una semana. Esto también se confirma para los bonos CERO en los plazos menores a 17 años.

2.8 Otros Instrumentos que Aportan Información

Este estudio considera utilizar los bonos PRC para la estimación de la estructura como la dinámica de las tasas de interés reales. Éstos fueron elegidos debido a que son considerados por el mercado como los principales indicadores de las tasas de interés de largo plazo en Chile, por su nivel de liquidez y porque conforman un conjunto de datos homogéneo para el periodo de tiempo analizado en este trabajo.

Pero no sólo estos instrumentos entregan información sobre la estructura y dinámica de tasas reales en Chile. Existe un conjunto de instrumentos que no han sido considerados y que podrían ser utilizados para este propósito. A continuación se entregan las razones por las cuales no se han considerado instrumentos de otros emisores y otros instrumentos reales emitidos por el Banco Central.

2.8.1 Bonos de instituciones bancarias y empresas

En la economía chilena los agentes con menor riesgo crediticio son el Estado y el Banco Central. Los instrumentos emitidos por estas instituciones pueden considerarse libres de riesgo dentro del mercado chileno ya que se espera que éstas puedan pagar sus obligaciones con mayor probabilidad que el resto de los agentes.

Tanto los bonos de empresas como de instituciones bancarias se transan a tasas de interés por sobre las tasas de bonos del Banco Central o del Estado con igual plazo. Esto se debe a que las empresas tienen riesgo de no pago o de *default* que se refleja en las tasas de mercado de sus instrumentos de deuda. Generalmente los bonos de los agentes que tienen riesgo de *default* no transmiten directamente las señales de

la dinámica de las tasas de una economía debido a características específicas del agente que los emite (como por ejemplo aumento del riesgo crediticio).

Por otra parte, teniendo como base una curva libre de riesgo se puede construir una estructura de tasas para un emisor en particular agregándole el premio determinado para cada madurez.

2.8.2 Otros instrumentos de deuda libres de riesgo

Ya identificados los emisores de deuda libre de riesgo para el mercado chileno se debe considerar qué otros instrumentos libres de riesgo pueden ser relevantes para el estudio de la estructura temporal como de la dinámica de tasas reales.

En el caso de los instrumentos reales emitidos por el Estado, los únicos que se transan actualmente y podrían usarse para la determinación de la estructura de tasas de interés debido a su liquidez son los Bonos de Reconocimiento (BR). Estos instrumentos fueron emitidos como colateral de las pensiones de los cotizantes que emigraron del sistema de pensiones estatal al sistema privado.

El problema con estos instrumentos es que el Instituto de Normalización Previsional (INP) puede pagar en cualquier fecha dentro del trimestre en el cual el BR vence. Esto genera distorsiones en la tasa de interés de mercado de estos instrumentos ya que la fecha exacta de vencimiento no es conocida¹.

Otros instrumentos reales del Banco Central que podrían utilizarse son los bonos PRBC y los bonos CERO. Los PRBC han sido emitidos solamente hasta un año y forman parte del mercado de intermediación financiera. Debido a que son de corto plazo no sirven para la estimación de la estructura de tasas de interés a plazos mayores.

¹ Ver Lefort y Walker (2000).

Aunque los bonos CERO entregan directamente la estructura de tasas cero cupón, en un análisis preliminar existe evidencia de premios por liquidez o de otro tipo para estos instrumentos generando que las tasas de éstos sean superiores a las tasas cero cupón implícitas en los bonos PRC entre 1 y 8 años. Para los plazos más largos se da el efecto contrario; la curva cero implícita en los PRC está por arriba de las tasas de los bonos CERO observadas en el mercado. Utilizar la información de precios de ambos instrumentos requiere de un estudio del por qué se producen estas diferencias, lo cual está fuera del ámbito de esta tesis. Además los bonos CERO sólo se transan desde mediados del año 2000, no existiendo una base de datos suficientemente amplia para realizar los estudios aquí propuestos.

III MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS

Este capítulo describe los principales modelos utilizados para estimar la estructura de tasas de interés encontrados en la literatura y que además son empleados en la práctica por los bancos centrales de economías desarrolladas. Estos métodos son aplicados para estimar una función continua de tasas cero cupón o forward de un conjunto de precios de bonos con cupones.

El método más utilizado en el mercado es el *bootstrapping*¹ con interpolación lineal que valoriza bien sólo los instrumentos utilizados para la estimación. Los métodos estudiados en este trabajo permiten deducir las tasas de interés para cualquier plazo permitiendo valorar instrumentos que no se han transado. Esto se hace importante cuando se requiere estimar una estructura de tasas de interés de un conjunto de instrumentos reducido.

El primer estudio formal que ajustó una función continua a un conjunto de bonos con cupones fue el realizado por McCulloch (1971). Desde entonces han aparecido métodos que se pueden dividir en dos grupos: los que buscan caracterizar la curva de tasas de interés con un conjunto de parámetros reducido generando curvas parsimoniosas, llamados métodos paramétricos; y los métodos que buscan un mayor ajuste utilizando polinomios por intervalos, llamados métodos no paramétricos o de *splines*. Ambos tipos de métodos se centran en el objetivo de obtener una función continua de descuento, de tasas cero cupón o de tasas forward para un conjunto de datos específicos.

Debido a que el desempeño de estas metodologías está firmemente condicionada a los datos, éstas deberán ser testeadas para el mercado que se esté estudiando. Los principales criterios que se deberán evaluar en cada método de modelación, siguiendo a Anderson y Sleath (2001), son:

¹ Método iterativo que resuelve las tasas para los plazos en que existe algún pago del instrumento, por lo tanto no se tiene una forma funcional continua.

Estabilidad: Una estructura de tasas real no tendrá variaciones importantes al eliminar datos y tampoco mayor variabilidad en el largo plazo.

Suavidad: Un factor importante es la consistencia de las curvas con la teorías tradicionales de la estructura de tasas de interés. Curvas más parsimoniosas tendrán mayor credibilidad en el largo plazo.

Ajuste: Dependiendo del uso que se le de a la curva generada se deberá decidir qué nivel de ajuste es el que se requiere. Para el caso de valorizar instrumentos se necesitan curvas que generen errores bajos, mientras que si se estiman curvas como indicadores de política monetaria se le da mayor importancia a la forma de la curva.

A continuación se presenta el marco teórico de los tres métodos utilizados en este estudio para ajustar la estructura de tasas de interés.

3.1 Método de Nelson y Siegel

Nelson y Siegel (1987) fueron los primeros autores que buscaron representar la estructura de tasas de interés con un conjunto reducido de parámetros. El método ajusta una función exponencial que genera curvas parsimoniosas con formas, según los autores, observadas en la práctica como monotónicas, con montes o valles, y con forma de S. La motivación de los autores es contar con curvas que puedan ser utilizadas en funciones de demanda, testeo de teorías de la estructura de tasas de interés y para presentación gráfica.

Los autores proponen la siguiente forma funcional para la tasa forward instantánea la cual es una solución a una ecuación diferencial de segundo orden con raíces reales y distintas

$$f(m) = b_0 + b_1 \cdot e^{-\frac{m}{t}} + b_2 \cdot \frac{m}{t} \cdot e^{-\frac{m}{t}}, \quad (3.1)$$

donde b_0, b_1, b_2, t son los parámetros del modelo y m es la madurez a la que se calcula la tasa forward instantánea.

La tasa de interés a término o cero cupón $R(m)$ es el promedio de las tasas forward instantáneas

$$R(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f(x) dx. \quad (3.2)$$

La forma de la tasa cero cupón según el modelo será entonces

$$R(m) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \cdot (1 - e^{-\frac{m}{t}}) \cdot \frac{t}{m} + \mathbf{b}_2 \cdot ((1 - e^{-\frac{m}{t}}) \cdot \frac{t}{m} - e^{-\frac{m}{t}}) \quad (3.3)$$

Esta función tiende a una tasa de largo plazo dada por el parámetro \mathbf{b}_0 a medida que m tiende a infinito. Para $m \rightarrow 0$ se obtiene la tasa de corto plazo instantánea la cual corresponde a $\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1$. La contribución del resto de los parámetros será analizada en la sección 3.2.

Aunque los autores testean su método utilizando datos de bonos cero cupón hasta un año plazo, se extiende directamente para usarse con datos de bonos con cupones.

3.2 Método de Svensson

Svensson (1994) propone extender el método de Nelson y Siegel de manera de generar curvas forward con mayor flexibilidad al incorporar parámetros al modelo.

Al incluir dos parámetros más el autor aumenta la flexibilidad permitiendo la existencia de un segundo monte (o valle) en la función:

$$f(m) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \cdot e^{-\frac{m}{t_1}} + \mathbf{b}_2 \cdot \frac{m}{t_1} \cdot e^{-\frac{m}{t_1}} + \mathbf{b}_3 \cdot \frac{m}{t_2} \cdot e^{-\frac{m}{t_2}} \quad (3.4)$$

Esta forma funcional permite un mejor ajuste a los precios de mercado y genera un conjunto de curvas más completo que el método anterior.

Al igual que en el método de Nelson y Siegel la curva tiene como valor asintótico b_0 . El impacto de los valores de los parámetros en la forma de la curva se describe a continuación:

b_0 : Entrega el valor asintótico de la curva forward cuando la madurez tiende a infinito. Este valor asintótico es el mismo para la tasa cero cupón.

b_1 : Determina el valor inicial de la curva en términos de su desviación de la asíntota. También define la velocidad a la cual la curva tiende a su tendencia de largo plazo. La suma de b_0 y de b_1 entrega el intercepto vertical el cual representa la tasa instantánea.

t_1 : Parámetro positivo que determina la posición de la primer monte o forma valle de la curva.

b_2 : Determina la dirección y posición del monte. Si el parámetro es positivo se genera una monte en t_1 , si es negativo se genera un valle en t_1 .

t_2 : Parámetro positivo que determina la posición del segundo monte o valle de la curva.

b_3 : Este parámetro es análogo a b_2 . Determina la magnitud y dirección del segundo valle.

Integrando la curva forward planteada en (3.4) se puede obtener la curva de tasas de descuento o cero cupón para el modelo:

$$\begin{aligned}
 R(m) = & b_0 + b_1 \cdot (1 - e^{-\frac{m}{t_1}}) \cdot \frac{t_1}{m} + b_2 \cdot ((1 - e^{-\frac{m}{t_1}}) \cdot \frac{t_1}{m} - e^{-\frac{m}{t_1}}) \\
 & + b_3 \cdot ((1 - e^{-\frac{m}{t_2}}) \cdot \frac{t_2}{m} - e^{-\frac{m}{t_2}})
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

El autor propone usar este método de manera de ajustar los precios de bonos con cupones mediante dos métodos de estimación. El primero minimiza el error en precio de los bonos lo que genera errores considerables en las tasas de interés en la parte corta de la curva. El segundo método propone minimizar el error en las tasas de

interés de los bonos de manera de encontrar una curva forward que genere errores parejos en las tasas para todos los plazos.

3.3 Métodos de Splines

Los splines corresponden a un conjunto de polinomios de algún orden unidos para conformar una curva que cumple cierta condición de suavidad. Los polinomios son definidos para ciertos intervalos separados por nodos, puntos en los cuales se cambia de una función a otra. En términos generales un spline cumple con continuidad y derivación de primer y segundo orden en los nodos.

En la literatura matemática la forma de presentar estas funciones es muy variada y el campo de estudio es bastante extenso¹. Las formas funcionales aplicadas a finanzas han evolucionado de manera de entregar mayor estabilidad a las curvas y métodos de cálculo más eficientes. Pero se debe tener en cuenta que la base teórica es la misma en cuanto a la representación de las funciones.

3.3.1 Método de McCulloch

McCulloch (1971) fue el primero en utilizar splines para modelar la estructura de tasas de interés. Específicamente ajustó un spline a la curva de descuento de bonos con cupones de la industria ferroviaria de EEUU.

El autor modela la función de descuento mediante una combinación lineal de k funciones diferenciables $f_j(m)$:

$$d(m) = 1 + \sum_{j=1}^k a_j f_j(m) \quad (3.6)$$

El parámetro k establece el número de nodos que definen los $k-1$ intervalos.

¹ Para una descripción extensa de splines ver De Boor (1978).

Mediante esta formulación el autor puede estimar los parámetros a_j de la función usando regresión lineal lo que facilita la estimación. Se ajusta la curva utilizando los datos de los bonos con cupones mediante mínimos cuadrados ordinarios.

Las funciones $f_j(m)$ son cuadráticas en la formulación de McCulloch (1971), lo que produce una curva de descuento con poca flexibilidad además de generar curvas forward no muy suaves. McCulloch (1975) utiliza funciones cúbicas para $f_j(m)$ mejorando tanto la flexibilidad de la curva como la forma de las curvas forward. Los splines cúbicos sirven como base para todos los métodos de splines encontrados en la literatura para la estimación de la estructura de tasas de interés.

Una de las desventajas de los splines cúbicos estimados mediante regresión es que tienden a ser muy inestables lo que se traduce en estructuras de tasas de interés oscilantes las cuales son poco creíbles en la práctica. Esto dio origen a métodos que buscan un buen ajuste en los precios usando splines pero que a su vez controlan la suavidad de las curvas generadas.

3.3.2 Smoothing Splines

Los *smoothing splines* son splines cúbicos que incorporan además una función de penalización por variabilidad de la curva. Estos nacieron ante la necesidad de algunos bancos centrales de contar con métodos que se ajustaran mejor a los datos que los métodos parsimoniosos, pero que a su vez mantuvieran estabilidad en el largo plazo. Los estudios realizados con este método se atribuyen a bancos centrales en EEUU e Inglaterra como se ve en Fisher, Nychka y Zervos (1994), Waggoner (1997) y Anderson y Sleath (2001).

Una diferencia importante con el método propuesto por McCulloch (1971) es la forma funcional que ocupan los autores. Fisher, Nychka y Zervos (1994) utilizan *B-splines* (splines bicúbicos)¹ de manera de darle mayor estabilidad al método

¹ De Boor (1978) hace una presentación más formal de los *B-splines*.

de estimación. Esta formulación también genera splines cúbicos, idénticos a los generados por el método de McCulloch (1975), pero a su vez permite resumir en menos parámetros la función en una formulación numéricamente estable.

La ventaja de los B-splines es que están contruidos de manera de incorporar condiciones de suavidad en los nodos de forma fácil y presentan una forma funcional que se traduce en sistemas lineales. La forma funcional corresponde a la suma ponderada de B-splines:

$$h(\cdot) = \sum_{k=1}^n \mathbf{f}_k^r \mathbf{b}_k \quad (3.7)$$

de orden r y con n como el número de polinomios que conforman la curva más $r-1$. Cada \mathbf{f}_k^r es un polinomio de grado menor que r el cual es positivo en el intervalo que define $d_k \dots d_{k+r}$ y es siempre cero fuera de este intervalo.

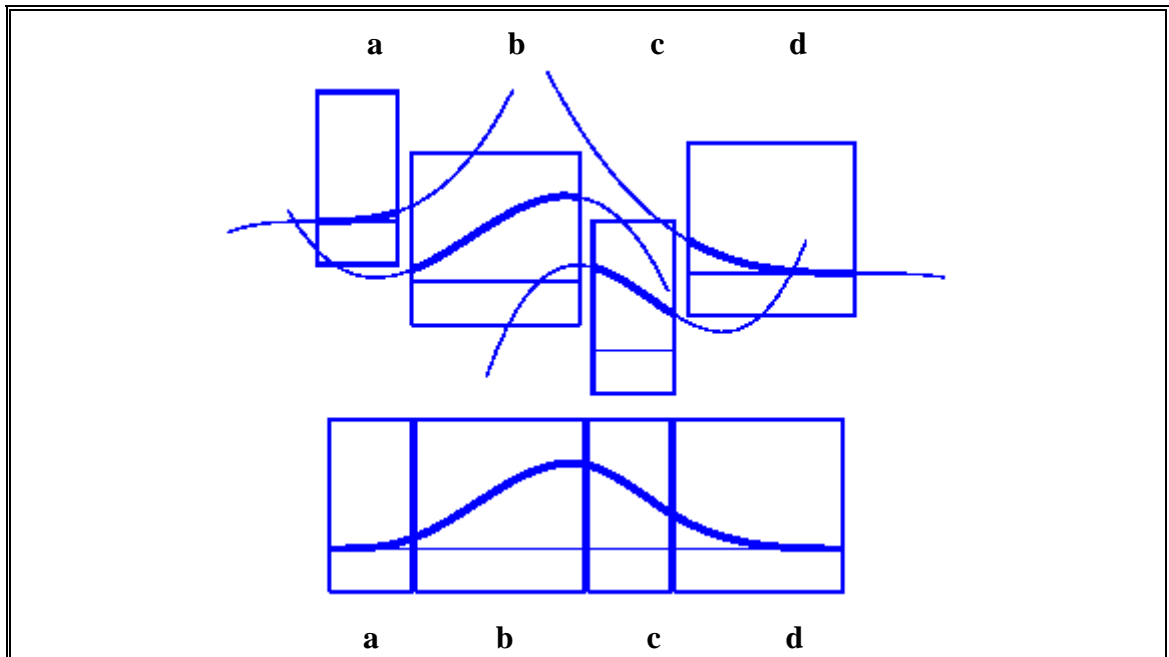


Figura 3-1: Ilustración de construcción de una curva con secciones B-splines a, b, c y d.

Siguiendo a Fisher, Nychka y Zervos (1994) se describe la formulación de los *B-splines* cúbicos utilizados en este trabajo con mayor detalle.

a) Formulación de Fisher, Nychka y Zervos

Sean $\{s_k\}_{k=1}^K$ el conjunto de nodos con $s_1 = 0$, y $s_K = M$, con M como la madurez del bono a más largo plazo en la muestra. Para definir una base de *B-splines*, es conveniente aumentar los nodos iniciales. Se define $\{d_k\}_{k=1}^{K+6}$ con $d_1 = d_2 = d_3 = s_1$, $d_{K+4} = d_{K+5} = d_{K+6} = s_K$, y $d_{k+3} = s_k$ para $1 \leq k \leq K$.

Una base de *B-splines* cúbicos es un vector de $\mathbf{k} = K + 2$ *B-splines* cúbicos definidos sobre el dominio. Un B-spline es definido por la siguiente recursión, donde $r = 4$ para generar una función cúbica y $1 \leq k \leq \mathbf{k}$:

$$\mathbf{f}_k^r(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{f}_k^{r-1}(\mathbf{t})(\mathbf{t} - d_k)}{d_{k+r-1} - d_k} + \frac{\mathbf{f}_{k+1}^{r-1}(\mathbf{t})(d_{k+r} - \mathbf{t})}{d_{k+r} - d_{k+1}} \quad (3.8)$$

para $\mathbf{t} \in [0, T]$, y con

$$\mathbf{f}_k^1(\mathbf{t}) = \begin{cases} 1, & \text{si } d_k \leq \mathbf{t} \leq d_{k+1} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Si $\mathbf{f}_k(\mathbf{t}) := \mathbf{f}_k^4(\mathbf{t})$ entonces la base de *B-splines* cúbicos será el vector

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}) := (\mathbf{f}_1(\mathbf{t}), \dots, \mathbf{f}_k(\mathbf{t})). \quad (3.10)$$

La base ortogonal conformada por $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ es usada para construir el *spline* cúbico mediante combinaciones lineales de los *B-splines* que conforman la base. El spline puede ser escrito como

$$h(\mathbf{t}, \mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{b} \quad (3.11)$$

donde $\mathbf{b} := (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)'$ es el vector de coeficientes a ser estimados. Esta es la función que determina finalmente la forma de la estructura de tasas de interés y puede ser la curva de descuento, la tasa cero cupón o la curva de tasas forward.

b) Penalización por variabilidad

Al igual que en McCulloch (1971) el número de parámetros está definido por el número de nodos. Un mayor número de nodos entregará un ajuste más perfecto pero con el problema del aumento de la variabilidad en la forma de la curva. Un número reducido de nodos entrega un ajuste precario. Fisher, Nychka y Zervos (1994) proponen penalizar el exceso de variabilidad en la función estimada mediante la siguiente función:

$$I \int_0^T h''(t)^2 dt \quad (3.12)$$

la cual corresponde a la integral sobre el dominio de plazos de la segunda derivada al cuadrado de la función por el parámetro de penalización I .

El parámetro de penalización es estimado mediante un método general de validación cruzada que considera los errores de bonos dejados fuera de la estimación con respecto a los errores de los bonos usados en la estimación. Un error mayor fuera de muestra implica mayor variabilidad mientras que errores grandes en los bonos dentro de la muestra implica un peor ajuste a los datos.

Waggoner (1997) propone utilizar I variable por intervalos mejorando el ajuste para el corto plazo en el cual existe mayor variabilidad y aumentando la penalización en el largo plazo en donde existe mayor estabilidad.

Anderson y Sleath (2001) propone una forma funcional continua $I(m)$ también estimada mediante un método general de validación cruzada.

3.4 Estudios Anteriores

Existen diversos estudios que comparan los métodos de estimación de la estructura de tasas de interés mediante diversas metodologías de validación para ciertos mercados en particular.

Bliss (1996) hace una comparación entre los métodos parsimoniosos como Svensson (1994), métodos basados en splines como McCulloch (1971) y Fisher, Nychka y Zervos (1994), y el método de Fama y Bliss propuesto por el autor.

Este método también cae dentro de la categoría de métodos parsimonios. Bliss (1996) testea el comportamiento de los errores de estimación de los bonos de un periodo a otro comprobando que efectivamente estos errores corresponden a ruido. Se testea la especificación de los modelos y la relación con variables exógenas como impuestos y premios por liquidez.

El autor muestra que los métodos tienden a comportarse de manera similar para errores dentro de muestra encontrando un aumento del error a medida que aumenta la madurez. El método de Fisher, Nychka y Zervos (1994) tiende a valorar incorrectamente los bonos de corto plazo debido a la poca flexibilidad dada por el parámetro de penalización en los plazos más cortos. Adicionalmente el autor concluye que este método no es recomendable debido a los grandes errores tanto dentro como fuera de muestra. Se debe señalar que el autor usa un método de estimación basado en errores de precio lo que genera errores significativos en la estructura de tasas de interés resultante.

El trabajo de Ferguson y Raymar (1998) está enfocado principalmente al testeo de funciones paramétricas de la estructura de tasas de interés, excluyendo los métodos de splines. Dentro de los modelos utilizados se encuentran un polinomio grado seis, el modelo de Vasicek y Fong (1982) de cuatro y seis parámetros, Nelson y Siegel (1987), y las ecuaciones de la estructura de tasas de interés implícitas en los modelos de Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985). El testeo de las curvas se hace mediante simulación de curvas forward para luego inferir los precios de bonos con cupones y luego estimar con los métodos mencionados las curvas cero cupón. Por lo tanto no es un estudio sobre precios de mercado.

El estudio realizado por Anderson y Sleath (2001) se enfoca a testear el desempeño de los modelos paramétricos de Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994), y modelos basados en splines como en Fisher, Nychka y Zervos (1994) y una extensión del modelo de Waggoner (1997), de manera de contar con un método específico para el uso del Banco Central de Inglaterra.

El método propuesto por los autores extiende el método de Waggoner (1997) al incorporar una función continua para el parámetro de penalización I . Utilizando esta formulación los autores encuentran que el método mejora

considerablemente el grado de ajuste, mejorando la estimación tanto dentro de muestra como fuera de muestra. Los autores concluyen que este método es el que mejor se desempeña en el mercado de deuda británico.

La información que existe sobre el uso de los distintos métodos está asociada a los bancos centrales de países con economías desarrolladas donde la estructura de tasas de interés es fundamental como indicador para el uso de la política monetaria. Existen diversos documentos de trabajo de bancos centrales que comparan métodos de estimación de la estructura de tasas de interés con el objetivo de encontrar el método que mejor ajuste a sus mercados correspondientes como en Bliss (1996), Anderson y Sleath (2001) y Bolder y Strélski (1999).

Tabla III-1: Métodos de estimación de la estructura de tasas de interés empleados por bancos centrales de otros países

Banco Central	Método de Estimación
Bélgica	Nelson-Siegel, Svensson
Canadá	Svensson
Estados Unidos	Smoothing Splines
Finlandia	Nelson-Siegel
Francia	Nelson-Siegel, Svensson
Alemania	Svensson
Italia	Nelson-Siegel
Japón	Smoothing Splines
Noruega	Svensson
España	Svensson
Reino Unido	Smoothing Splines
Suecia	Svensson
Unión Europea	Svensson

La tabla III-1 resume los métodos usados por algunos bancos centrales de economías desarrolladas. Como se ve no existe consenso por un método en particular y la elección de éste dependerá del mercado como de los estudios realizados por las instituciones.

3.5 Trabajos Anteriores Realizados en Chile

Existe una cantidad muy reducida de trabajos efectuados en el tema de estimación de la estructura de tasas de interés en Chile. Los métodos testeados corresponden a modelos paramétricos no existiendo hasta la fecha ningún estudio de los métodos no paramétricos basados en splines. A continuación se resumen los trabajos hechos en Chile sobre el tema.

Herrera y Magendzo (1997) utilizan el método de Nelson y Siegel (1987) para estimar las curvas forward implícitas en bonos PRC y PRBC utilizando datos entre marzo y junio del año 1996.

El estudio se hace agrupando los datos semanalmente y estimando los parámetros del modelo mediante mínimos cuadrados no lineales, minimizando el error entre el precio real y el teórico. El promedio por muestra es de 80 datos e incluyen las licitaciones del BC y las transacciones de la Bolsa de Comercio de Santiago.

El trabajo se enfoca más a la implementación y la interpretación económica de las curvas para un periodo determinado que al testeo empírico del método. No se presenta un análisis de los errores de estimación y tampoco se entrega información sobre la calidad del método utilizado.

Lefort y Walker (2000) presentan un estudio de la evolución de la estructura de tasas de interés usando el método de Nelson y Siegel (1987) con datos diarios de bonos PRC, PRBC y BR transados en el mercado secundarios entre 1992 y 1998. Este trabajo no presenta información sobre el desempeño del método en cuanto a errores de ajuste y estabilidad.

Pérez (1999) implementa el modelo de Svensson (1994) utilizando datos de PRC diarios entre el 29 de mayo de 1995 y el 10 de diciembre de 1998. La estimación se hace mediante mínimos cuadrados ordinarios minimizando el error en

TIR de los bonos. Los PRC se calculan utilizando las tablas de desarrollo reales que publica el BC. Se utilizan todos los datos de transacciones realizados en la Bolsa de Comercio de Santiago. La tasa instantánea utilizada por el autor es igual a la tasa de instancia establecida por el BC como herramienta de política monetaria, la cual es el objetivo de la tasa interbancaria. Svensson (1994) recomienda utilizar esta tasa *overnight* para restringir la curva en el corto plazo.

Esta tesis es un aporte con respecto a los trabajos anteriores realizados en Chile dado que implementa tres métodos distintos para estimar la estructura de tasas cero cupón en Chile, utilizando datos diarios de un periodo actualizado, para luego analizar su desempeño relativo en cuanto a errores de ajuste y estabilidad. Además se utilizan las convenciones de mercado para generar los flujos de caja de los bonos PRC y realizar su valorización.

IV ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS EN CHILE

En éste capítulo se realiza un análisis comparativo entre métodos paramétricos y métodos basados en splines cúbicos para estimar la estructura diaria de las tasas de interés en Chile entre enero de 1997 y diciembre del 2001. Se implementan los métodos de Nelson y Siegel, Svensson y Fisher, Nychka y Zervos (1994) con la extensión realizada por Waggoner (1997) los cuales fueron descritos en el capítulo anterior.

4.1 Descripción de los Datos

Una descripción estadística de los datos permite tener una idea de la situación del mercado en cuanto a niveles y variabilidad de las tasas de interés para el periodo en estudio. La muestra utilizada corresponde a precios de todos los bonos PRC transados en la Bolsa de Comercio de Santiago (BCS) entre enero de 1997 y diciembre del 2001 en la cual se tienen 1.236 días con transacciones. Como ya fue discutido en el Capítulo I se usan bonos PRC debido a su nivel de liquidez, vencimiento máximo y homogeneidad durante el periodo en estudio.

En promedio se tienen transacciones 247 días por año. El total de transacciones a distinta tasa y distinto plazo son 22.304 lo que en promedio corresponde a 18 transacciones por día para el total de la muestra.

En el mercado chileno el precio de transacción se indica por la TIR del PRC y en los remates de la BCS las ofertas son realizadas con esta tasa. La descripción estadística de los datos presentada en esta sección se hará en función de la TIR. En el Anexo D se incorpora además la descripción estadística en función del precio.

El siguiente gráfico presenta las TIR promedio de los PRC para cada año del periodo analizado y el promedio total de la muestra.

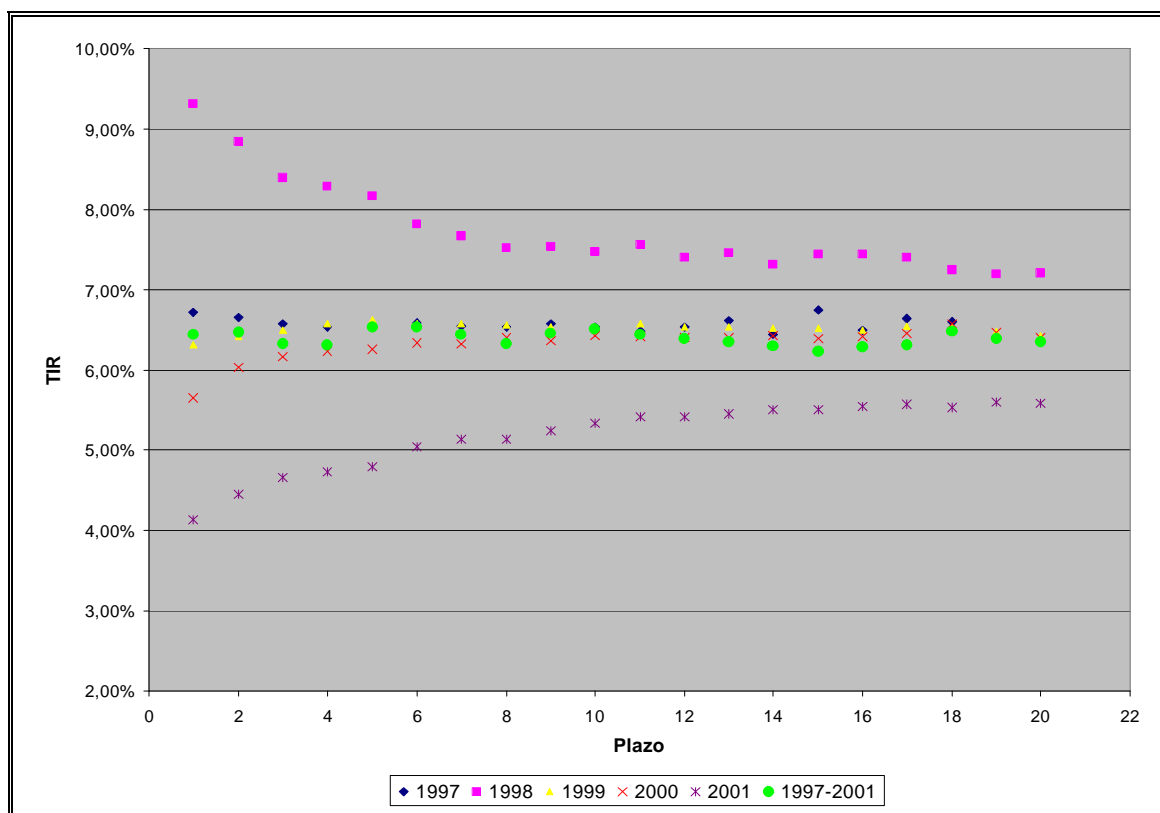


Figura 4-1: TIR de los PRC promedio por año y promedio total de la muestra para el periodo 1997-2001.

Como se puede ver la estructura de las tasas internas de retorno (TIR) para los PRC ha sido distinta para cada uno de los años. Se pueden identificar periodos con tasas altas muy sobre el promedio, como el año 1998, y periodos con tasas bajas como el año 2001. La muestra contiene por lo tanto un conjunto de estructuras de tasas bastante completo en el cual se pueden identificar estructuras crecientes, decrecientes y relativamente planas.

Las volatilidades de las TIR para los distintos años y para el periodo completo se presentan en la figura 4-2. El año 1998 exhibe una volatilidad muy alta la cual se traspasa a la volatilidad del periodo completo. Es conveniente señalar que en este año la tasa de política monetaria del Banco Central llegó al 14% real anual generando distorsiones importantes en la estructura de tasas de interés junto con una fuerte caída en la liquidez del sistema.

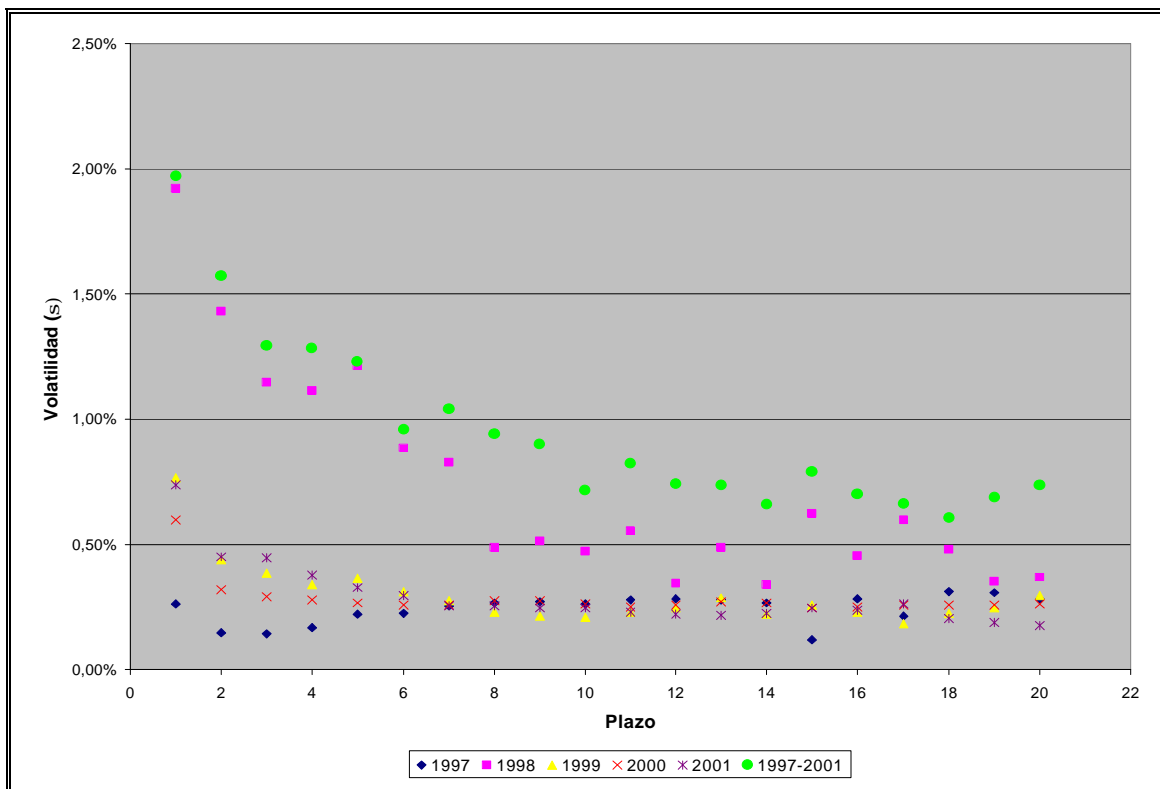


Figura 4-2: Desviación estándar de las TIR de PRC por año y de la muestra total para el periodo 1997-2001 .

La estructura de volatilidades del mercado en promedio es decreciente exceptuando el año 1997 en el cual se observa mayor volatilidad en los bonos de largo plazo.

4.2 Metodología de Estimación de la Estructura de Tasas de Interés

La estimación de los parámetros en los métodos que ajustan los precios de mercado a cierta estructura de tasas tiene normalmente dos partes. Primero se debe decidir el método estadístico que se ocupará para estimar los parámetros, como mínimos cuadrados no lineales o máxima verosimilitud, y luego se debe decidir qué errores se minimizarán, en precio o en TIR.

La estimación por máxima verosimilitud no se considerará en este caso debido a que requiere de una estimación de la varianza de los errores y a la evidencia

de que entrega resultados similares al método de mínimos cuadrados no lineales (Bolder y Stréliski, 1999).

Algunos de los estudios realizados recomiendan minimizar los errores en TIR cuando se estima una estructura de tasas de interés como en Svensson (1994), Bolder y Stréliski (1999), Anderson y Sleath (2001) y Pérez (1999). Esto se debe a que al minimizar el error de precio las variaciones en las tasas de corto plazo no tendrán mayor incidencia en los precios y por lo tanto en sus errores. En consecuencia, los errores de la curva serán sensibles a la madurez cuando se estima por precio generando errores mayores en las TIR de los instrumentos de más corto plazo.

Debido a que la minimización de errores en TIR requiere de la resolución iterativa de la TIR para los bonos, lo que genera un gran costo computacional, en Bolder y Stréliski (1999) y Anderson y Sleath (2001) se propone ponderar los errores en precio por el inverso de la duración. Este método equivale a minimizar los errores en la TIR de los bonos¹. La función objetivo a minimizar con este criterio será por lo tanto:

$$\min_{\Theta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{PRC_i - \hat{PRC}_i(\Theta)}{PRC_i \cdot D_i} \right]^2 \quad (4.1)$$

Esta función se minimiza para cada día de la muestra, estimando el conjunto de parámetros Θ correspondiente al método utilizado.

Las funciones de precio de los bonos PRC consideran los plazos y flujos reflejados en la matriz de pagos establecida por el emisor, las cuales fueron descritas en el Capítulo II.

¹ Referirse al Anexo G sección G.3 para una descripción de la relación entre duración, TIR y precio de un bono.

4.2.1 Restricción tasa de corto plazo.

Debido a que los bonos utilizados son de largo plazo se debe fijar una tasa instantánea como punto de partida de la curva (en $T = 0$). Como en Pérez (1999), la tasa empleada es la Tasa de Política Monetaria del Banco Central de Chile la cual representa la tasa interbancaria en términos reales. Esta tasa refleja el costo de financiamiento a un día en UF del mercado chileno.

4.2.2 Implementación métodos paramétricos.

En el método de Nelson y Siegel los precios de los bonos PRC estarán en función de 4 parámetros que describen la estructura de tasas de interés resultante:

$$PRC_i(T) = PRC(T; \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, t_1) \quad (4.2)$$

De la misma forma en el método de Svensson se deben estimar 6 parámetros:

$$PRC_i(T) = PRC(T; \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, t_1, t_2) \quad (4.3)$$

La única restricción, además del valor del intercepto vertical, es que los parámetros t_1 y t_2 deben ser mayores que cero. Finalmente los parámetros se estiman minimizando la función objetivo planteada en (4.1).

4.2.3 Implementación de método de splines

Los métodos de splines requieren definir un conjunto de nodos para dividir el dominio de las funciones cúbicas. Siguiendo lo recomendado en la literatura por Fisher, Nychka y Zervos (1994), Waggoner (1997) y Anderson y Sleath (2001) se utiliza un nodo cada tres bonos. El número de plazos distintos es 21 (incluyendo el 0) por lo que se define un conjunto de 7 nodos. Los nodos son elegidos de manera de que concuerden con los plazos más líquidos definidos en el Capítulo II incluyendo un nodo en el año 1 para agregar flexibilidad a la curva en el corto plazo.

Tabla IV-1: Nodos método de splines.

Nodo	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
Plazo (Años)	0	1	4	8	10	14	20

Se utiliza el parámetro de penalización por variabilidad I estimado por Waggoner (1997) de manera de tener curvas más suaves en el largo plazo y mejor ajuste en el corto plazo.

Tabla IV-2: Parámetro de penalización por variabilidad.

Plazo (Años)	I
0-1	0,1%
1-10	100%
10-20	100.000%

El número de nodos define finalmente el número de parámetros a estimar. La curva resultante dependerá de 9 parámetros en este caso y el precio teórico del PRC quedará definido como:

$$PRC_i(T) = PRC_i(T; \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7, \mathbf{b}_8) \quad (4.4)$$

Estos parámetros no tienen relación directa con los parámetros de los polinomios de un spline cúbico debido a que la curva está expresada en términos de un conjunto de funciones básicas¹.

¹ Ver la sección 3.3.2 dónde se ilustra este punto.

4.2.4 Programación de Rutinas Computacionales

Debido a la gran cantidad de datos y al tamaño de la muestra se tuvieron que programar rutinas computacionales eficientes que permitieran estimar la estructura de tasas de interés para cada día.

Los métodos de Nelson y Siegel y Svensson se implementaron en una interfaz Excel utilizando VBA para la programación de las rutinas.

El método de splines se implementó en Excel con rutinas en VBA, pero además se incorporó librerías IMSL en FORTAN para las funciones *B-splines*.

4.3 Resultados

A continuación se presentan el resumen de los resultados para el periodo de estimación utilizando los tres métodos señalados.

4.3.1 Errores dentro de muestra

Los indicadores calculados para describir el ajuste de los métodos son el error promedio, el error absoluto promedio (MAE)¹ y la raíz del error cuadrático promedio (RMSE)² que equivale a la desviación estándar de los errores.

En la tabla IV-3 se resumen los indicadores de error para los tres métodos estimados. Estos reflejan el ajuste para el total de la muestra entre enero de 1997 y diciembre del 2001.

¹ En la literatura *Mean Absolute Error*.

² En la literatura *Root Mean Absolute Error*.

Tabla IV-3: Resumen de indicadores de errores de estimación de la estructura diaria de tasas de interés reales en Chile para el periodo 1997-2001.

MAE: Error absoluto promedio, RMSE: Raíz del error cuadrático medio.

	Error TIR Promedio	Error Precio Promedio	MAE TIR	MAE Precio	RMSE TIR	RMSE Precio
Nelson y Siegel	0,0002%	-0,002%	0,036%	0,123%	0,062%	0,189%
Svensson	0,0002%	-0,001%	0,032%	0,108%	0,056%	0,168%
Splines	-0,0003%	0,001%	0,025%	0,086%	0,044%	0,139%

Los tres métodos presentan errores absolutos (MAE) dentro de un rango entre 2,5 y 3,6 puntos base mostrando un buen ajuste promedio. Tomando en cuenta este indicador el método que mejor se comporta es el de splines. El error promedio en TIR entre 0,02 y 0,03 puntos base muestra un sesgo bajo para el total de errores de la muestra para los tres métodos. En el Anexo E, secciones E.1, E.2 y E.3 se presentan resultados de los errores en precio y en TIR para los distintos métodos y años para cada uno de los plazos definidos para los PRC.

La figura 4-3 resume los errores absolutos promedio por plazo para los tres métodos. Todos presentan errores mayores en el corto que en el largo plazo lo que se explica por la mayor cantidad de transacciones en los plazos más largos. En general los errores del tramo entre 6 y 20 años se mueven entre 1,5 y 4 puntos base. El método de splines se ajusta mejor y de manera más homogénea que los métodos paramétricos con errores menores en el corto plazo. En particular, el mejor ajuste en los plazos más cortos muestra la capacidad del método a ajustarse a los datos en forma local.

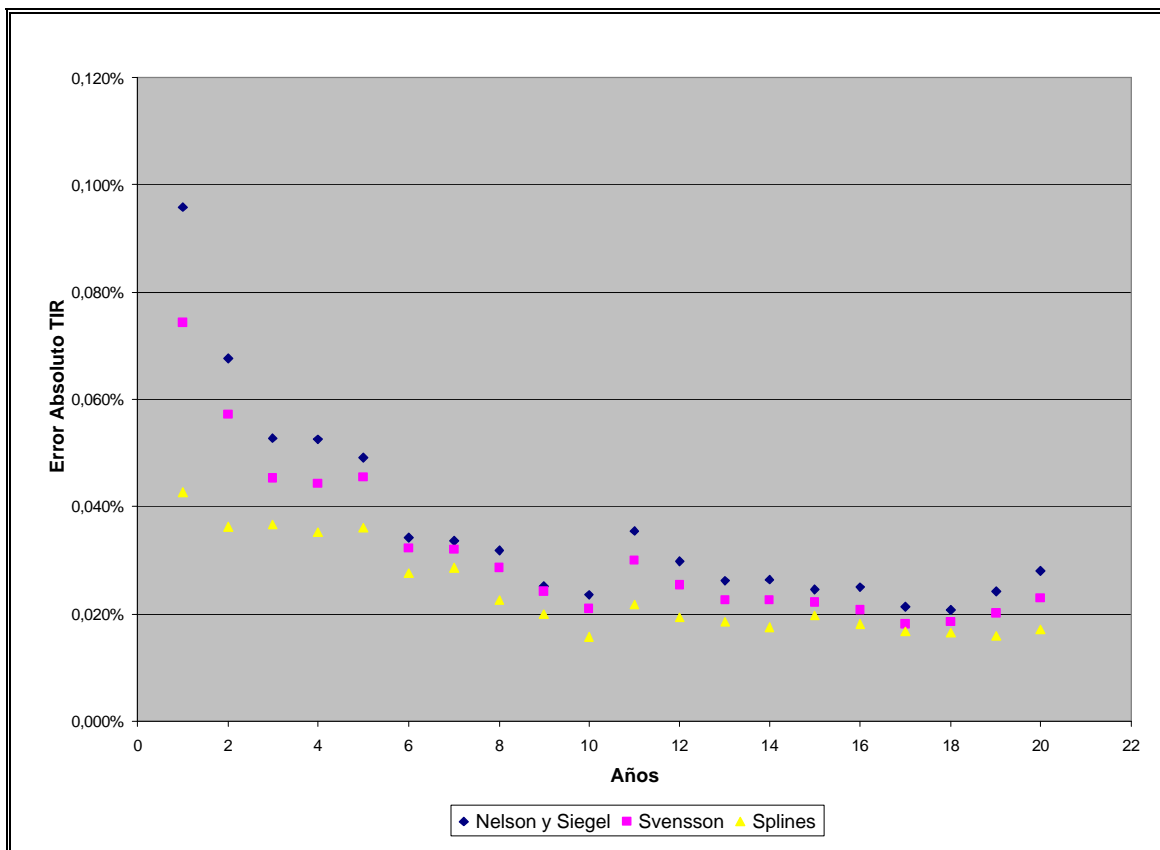


Figura 4-3: Error absoluto promedio (MAE) para los métodos de Nelson y Siegel, Svensson y Splines en estimaciones diarias 1997-2001.

La figura 4-4 muestra el error promedio para cada método. Este indicador sirve para inferir premios por liquidez en el mercado. Se puede apreciar que los instrumentos más líquidos, en plazos de 4, 8 y 20 años presentan un sesgo negativo con respecto a los otros plazos. Esta evidencia empírica podría servir de base para estudios posteriores orientados a explicar las causas de estos eventuales premios por liquidez. No forma parte de este estudio determinar por qué se producen estos premios, pero conviene identificarlos para tener en cuenta de que la estructura de tasas de interés cero cupón estimada estará afecta a éstos.

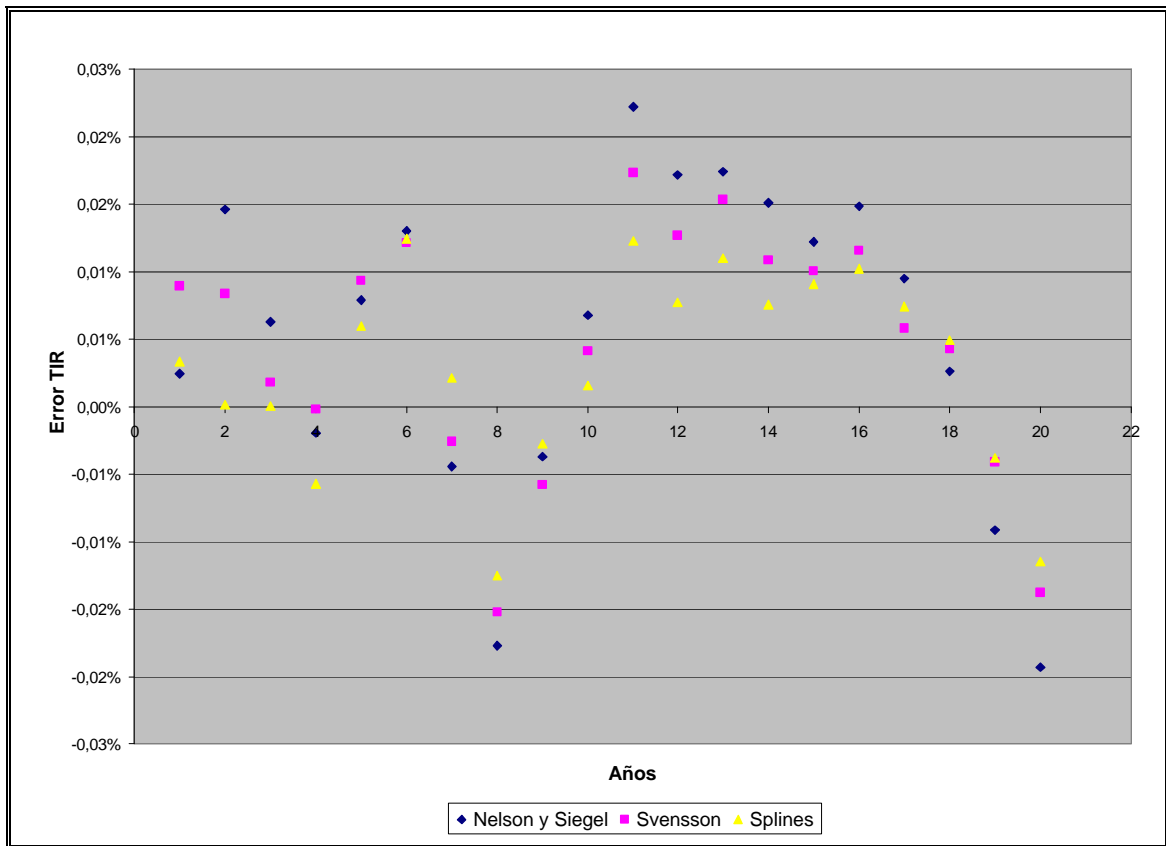


Figura 4-4: Error promedio para los métodos de Nelson y Siegel, Svensson y Splines en estimaciones diarias 1997-2001.

4.3.2 Errores fuera de muestra

Para medir la estabilidad de los métodos se midió el error fuera de muestra. Éste corresponde a eliminar de la estimación un bono por vez y calcular el error que se comete en valorizarlo con la nueva curva. Este procedimiento se realiza para cada bono en cada día de la muestra. El error fuera de muestra permite evaluar qué método se comporta de manera más estable manteniendo la forma de la curva al sacar instrumentos dentro de un día en particular.

En la siguiente tabla se resumen los errores absolutos promedio para la muestra completa. Como se puede ver el método más estable corresponde al de Nelson y Siegel seguido por el de Svensson. La estabilidad de los métodos paramétricos se debe a que éstos se ajustan de manera global mientras que los splines se ajustan de manera local, lo que produce errores de valorización más grandes en los instrumentos eliminados.

Tabla IV-5: Error absoluto promedio (MAE) para los bonos PRC fuera de muestra en las estimaciones diarias de la estructura de tasas de interés.

	MAE TIR	MAE Precio
Nelson y Siegel	0,087%	0,298%
Svensson	0,092%	0,318%
Splines	0,123%	0,463%

Al realizar un análisis de los errores absolutos fuera de muestra por plazo, presentados en la figura 4-6, se puede ver que existe mayor estabilidad en los plazos intermedios. La inestabilidad del largo plazo es más evidente en el método de splines ya que por construcción no es un método que permita extrapolar a plazos mayores al último instrumento transado.

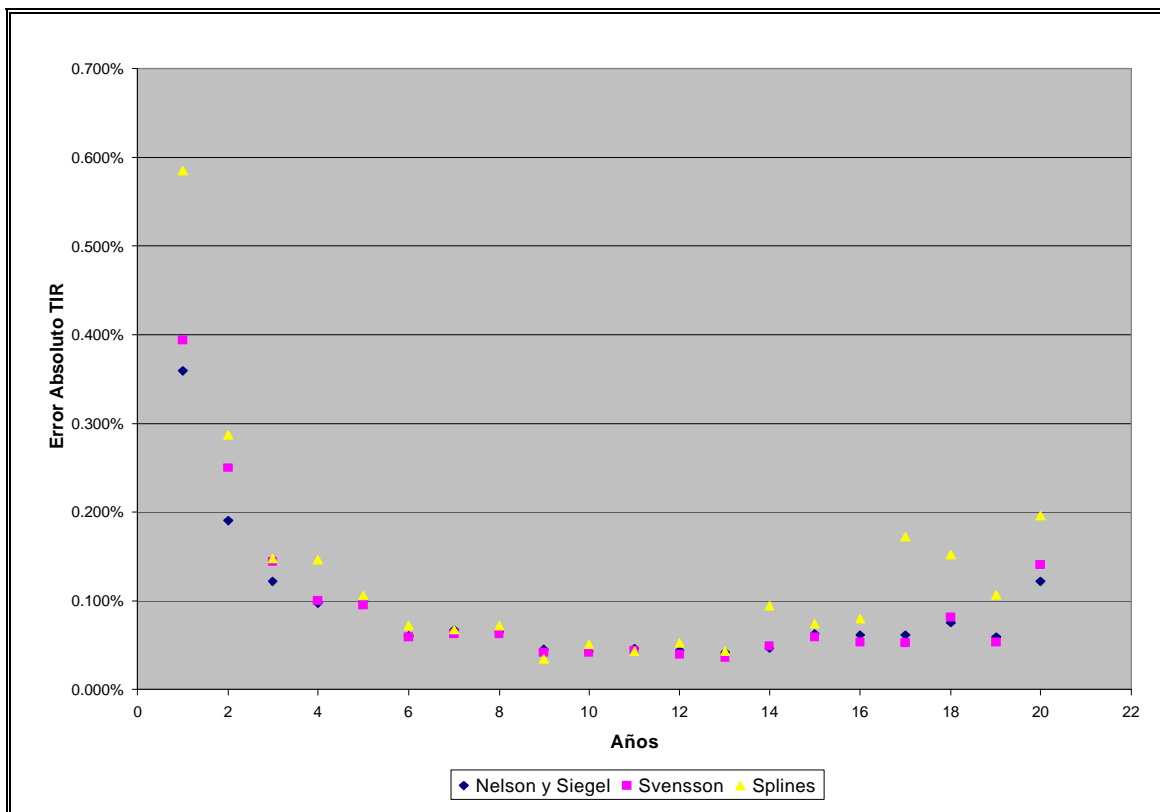


Figura 4-6: Error absoluto promedio para los instrumentos fuera de muestra métodos de Nelson y Siegel, Svensson y Splines 1997-2001.

En el Anexo E, sección E.4 se muestran los errores absolutos fuera de muestra en TIR para cada año.

4.3.3 Estructura de tasas cero cupón estimadas

En esta sección se analizará el comportamiento histórico de las curvas cero cupón estimadas de manera de obtener promedios y la volatilidades para todo el rango de plazos. Las estructuras de tasas cero cupón estimadas por los tres métodos tendrán formas distintas dependiendo de la cantidad de datos utilizados, la forma de la estructura de tasas implícita y el método de estimación que se esté utilizando.

El análisis de las formas resultantes que presentan las estimaciones de la curva cero cupón se hará considerando una submuestra de días en que exista un bono

de largo plazo. Esta submuestra considera días con una transacción mayor a 18 años plazo lo que corresponde a un 65,2% de la muestra total.

Para ilustrar si en promedio los tres métodos estiman de manera similar la estructura de tasas en la figura 4-7 se toma como ejemplo el último año de la muestra (2001) y se grafica el promedio de las curvas cero cupón resultantes por día. En promedio los tres métodos mantienen la forma para todos los plazos mostrando algunas diferencias en el corto plazo.

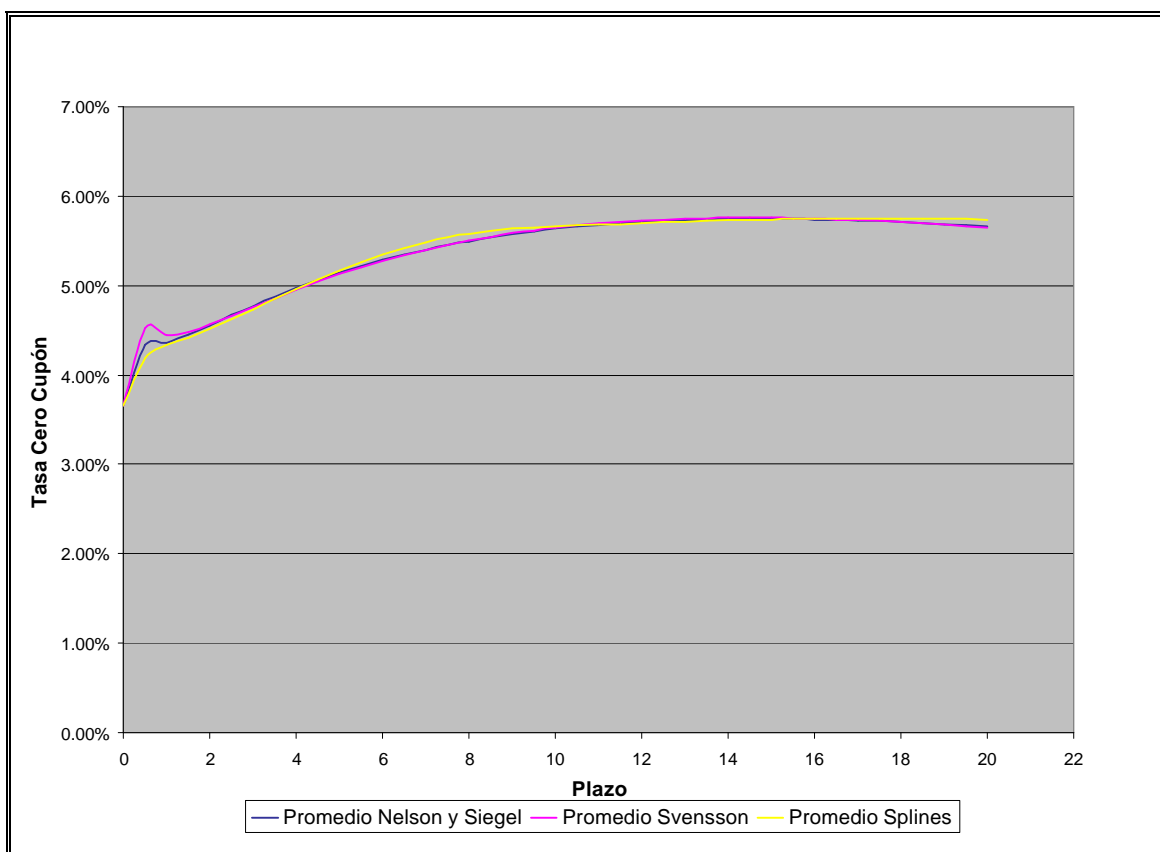


Figura 4-7: Promedio curvas cero cupón diarias para el año 2001.

En la figura 4-8 se grafican las curvas de tasas cero cupón promedio para cada año estimadas con el método de Svensson. Las estructuras resultantes son consistentes con las TIR de los bonos PRC presentadas en la sección 4.1.

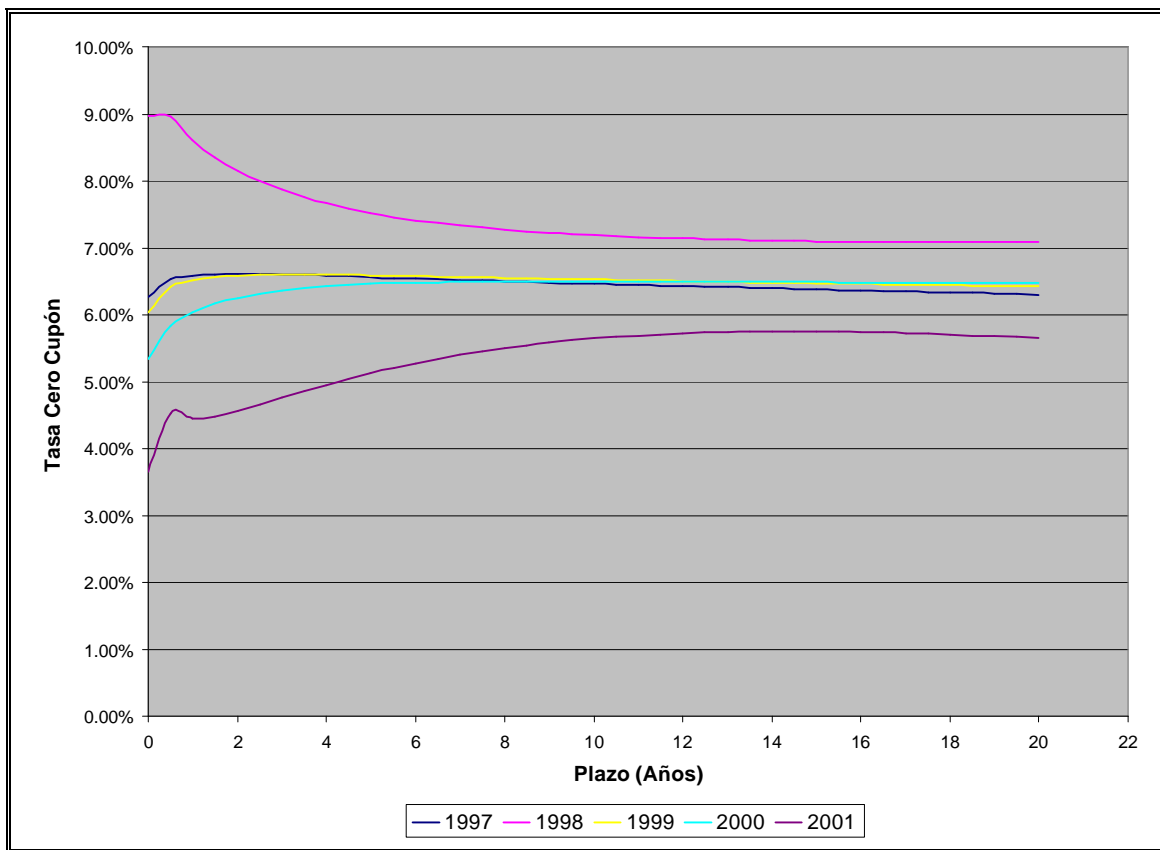


Figura 4-8: Promedio anual de curvas cero cupón diarias para el método de Svensson.

La desviación estándar de las curvas cero cupón resultantes es un indicador que permite relacionar la volatilidad de las tasas de interés con sus plazos, lo que normalmente se define como estructura de volatilidades. La figura 4-9 muestra el promedio de las curvas estimadas para el año 2001 con bandas iguales a una desviación estándar para el método de Svensson. Como se observa las volatilidades son decrecientes con el plazo para luego aplanarse. Se puede observar una volatilidad mayor en los plazos cercanos a 1 año que podría explicarse por el efecto de la nominalización en el aumento de la volatilidad de las tasas reales de corto plazo en el año 2001.

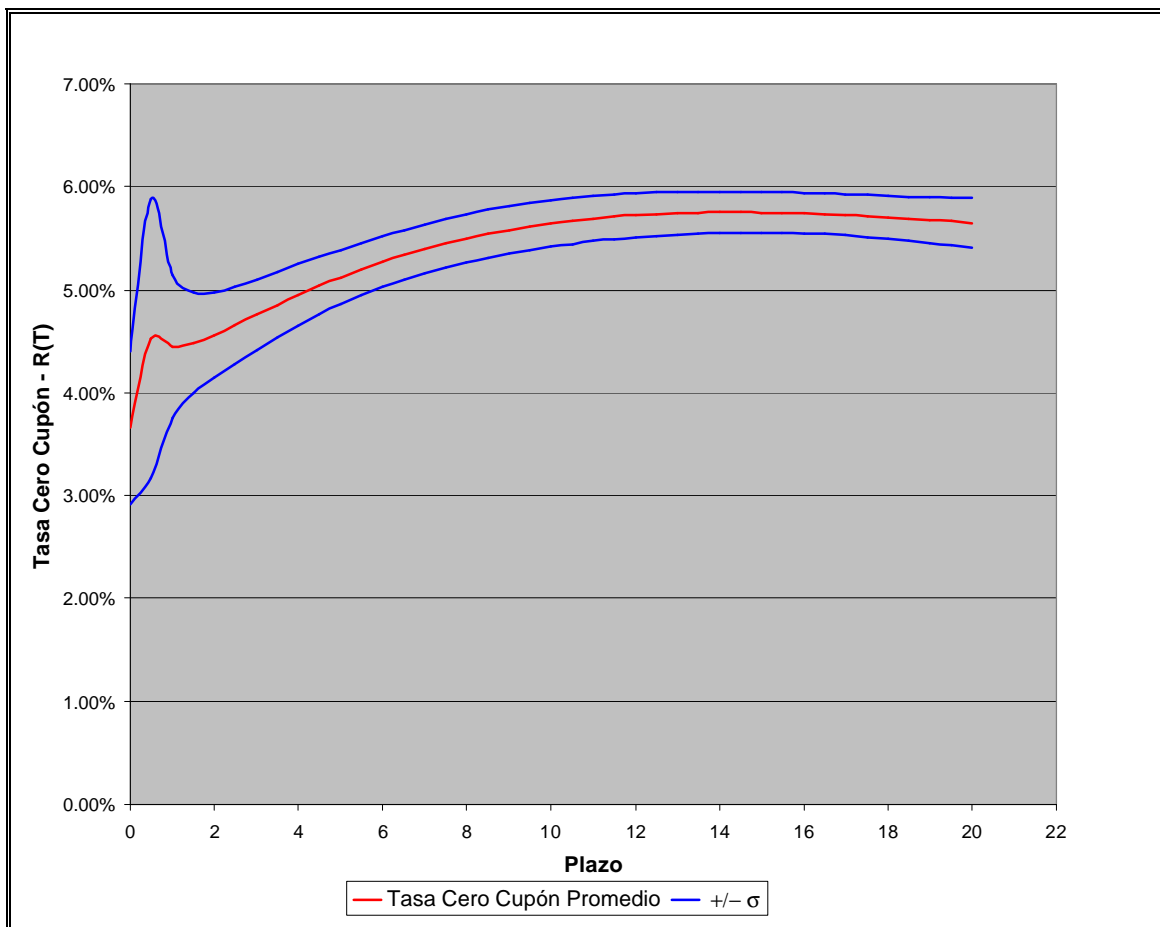


Figura 4-9: Curva cero cupón promedio con banda de una desviación estándar año 2001 estimada mediante método de Svensson

La misma forma de la estructura de volatilidad se observa en la figura 4-10, correspondiente al año 1998, a pesar de que la forma de la curva es opuesta a la del año 2001. Incluso en los plazos mayores, cercanos al año 20, existe un aumento de la volatilidad que refleja la mayor volatilidad del PRC a 20 años que exhiben los datos.

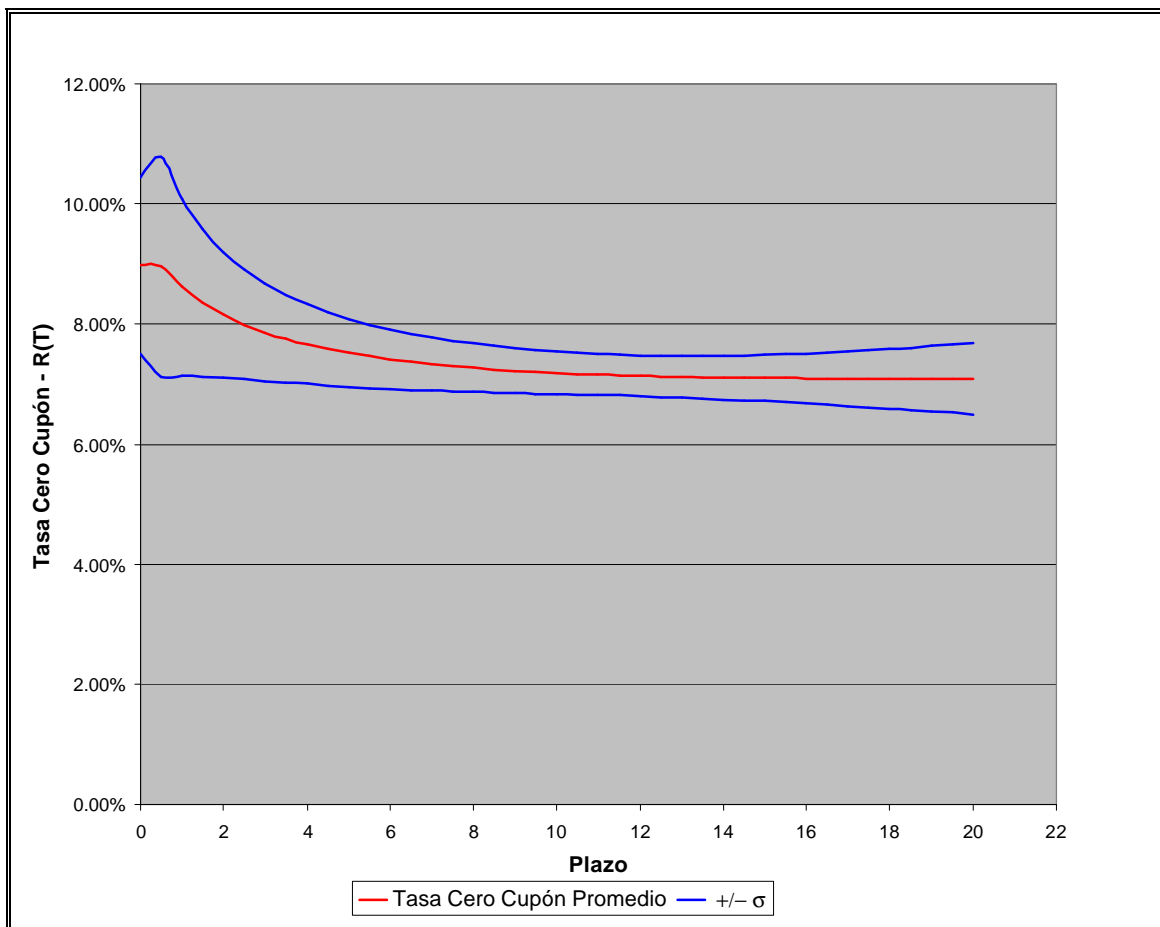


Figura 4-10: Curva cero cupón promedio con banda de una desviación estándar año 1998 estimada mediante método de Svensson.

En el Anexo F se presentan las curvas cero cupón promedio por año con sus respectivas desviaciones estándar para los tres métodos de estimación.

4.3.4 Comparación con volatilidades empíricas

Para de comparar las volatilidades de las tasas cero cupón con las volatilidades empíricas de las TIR de los bonos PRC se determina la desviación estándar de las TIR de bonos PRC teóricos que se obtendrían de las curvas cero cupón estimadas con el método de Svensson. Como se ve en la figura 4-11 las volatilidades de las TIR teóricas resultantes son consistentes con las volatilidades de las TIR de los bonos PRC.

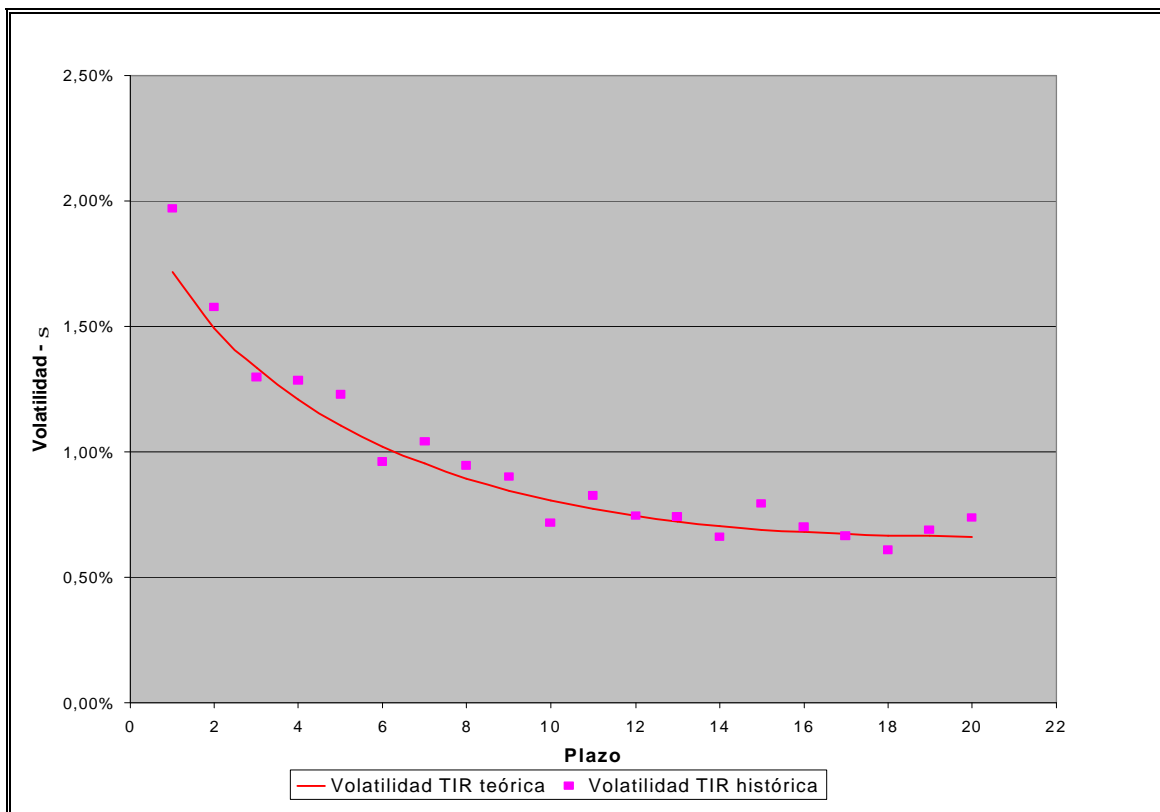


Figura 4-11: Comparación de la volatilidad de las TIR estimadas con el método de Svensson con la volatilidad de TIR histórica de bonos PRC por plazo (1997-2001)

La evidencia empírica presentada en este capítulo muestra que los métodos de estimación de la estructura de tasas cero cupón son eficientes en extraer esta información de los precios de los bonos PRC. Los métodos logran capturar la forma de la curva cero cupón implícita en los datos logrando un buen ajuste a las TIR de mercado.

Tomando en cuenta los resultados anteriores y considerando los factores que se deben tomar en cuenta a la hora de elegir un método de estimación como ajuste, estabilidad y suavidad (Capítulo III) se concluye que el método de Svensson es el más indicado para el mercado chileno. Este método presenta un grado de ajuste mejor que el método de Nelson y Siegel y tiene una mayor estabilidad que el método de splines. Además por construcción es un método suave y continuo que genera curvas que son creíbles en la práctica. Se debe considerar que este método es el más

utilizado en la práctica por los bancos centrales de países desarrollados especialmente para mercados con liquidez más limitada como el chileno.

V **MODELOS DINÁMICOS**

El primer enfoque utilizado en el capítulo IV para estimar la estructura de tasas de interés fue el uso de un modelo estático con parámetros que se estiman de los datos para cada día. El segundo enfoque presentado en este capítulo considera el uso de un modelo dinámico de un factor de riesgo que se basa en un proceso estocástico. Este modelo depende de ciertas variables globales que se estiman de datos históricos y de una variable de estado que se obtiene para cada día.

En general se espera que un modelo estático se pueda ajustar mejor a los datos que un modelo dinámico, pero este último tiene la ventaja de describir la evolución de la estructura de tasas de interés en el tiempo. Esto permite simular el comportamiento futuro de tasas de interés, generando distribuciones para valorar instrumentos complejos como opciones, hacer cobertura y cuantificar riesgos.

Clasificar los modelos dinámicos de tasas de interés no es un trabajo fácil debido a la multidimensionalidad de las diferencias entre unos modelos y otros. Aunque éstos tienen como base un proceso estocástico que rige el comportamiento de la estructura de tasas, la dimensión de los factores de riesgo como las características de los parámetros son distintos¹.

Algunos modelos tienen parámetros invariantes en el tiempo que resumen ciertos supuestos de las variables económicas para llegar a un proceso para la tasa de interés instantánea. Los parámetros de estos modelos se ajustan de manera de ser consistentes con la historia y con la información de los precios de mercado, pero no siempre pueden calzar con la curva de tasas de interés del mercado, con la consecuente mala valorización de bonos e instrumentos simples. Otros modelos tienen parámetros dependientes del tiempo ajustándose perfectamente a los precios observados en el mercado imponiendo cierta tendencia promedio a la tasa instantánea, lo que puede llevar a una mala especificación de la dinámica futura de ésta.

¹ Para una revisión de los modelos se puede ver Hull (1999), James y Webber (2000) o Gibson, Lhabitant y Talay (2001).

Los modelos también se diferencian por la cantidad de factores de riesgo que están implícitos en ellos. Los modelos más conocidos y utilizados en la práctica son de un factor, pero debido a la creación de instrumentos cada vez más complejos muchos agentes han optado por modelos que incorporen mayor flexibilidad en la dinámica de la estructura de tasas. Esto ha dado espacio a una literatura cada vez más enfocada a generalizar los modelos tomando en cuenta los movimientos de cada punto de la estructura de tasas de interés.

En este capítulo se describirá la lógica que existe detrás de los modelos dinámicos, la relación de éstos con la estructura de tasas de interés y los modelos comúnmente utilizados, describiendo en detalle el modelo de Vasicek (1977) empleado en este trabajo para describir la dinámica de las tasas de interés reales en Chile.

5.1 Relación de la Estructura de Tasas de Interés con su Dinámica

En los modelos de tasas de interés el proceso que sigue un depósito que paga los intereses de la tasa instantánea y que es renovado para cada instante de tiempo entre t y T es:

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T r(s) ds} \quad (5.1)$$

Por arbitraje el precio de un bono de descuento en t que paga \$1 en T será el valor esperado del flujo descontado menos el premio que le asigna el mercado al riesgo de los cambios de la tasa de interés instantánea:

$$P(t, T) = E[e^{-\int_t^T r(s) ds}] - p(t, T, r(t)) \quad (5.2)$$

En la teoría financiera moderna la valorización de derivados sobre un activo subyacente se realiza tomando el valor esperado de los flujos bajo una medida de probabilidad artificial ajustada por riesgo que es equivalente a considerar neutralidad al riesgo de los agentes. En un mundo neutral al riesgo todos los individuos son indiferentes al riesgo. No requieren compensación por el riesgo y por lo tanto todos los activos retornan la tasa libre de riesgo. El precio del derivado debe

ser el mismo al utilizar las probabilidades artificiales y las probabilidades reales. En los mercados de renta fija los bonos se consideran derivados sobre un subyacente que es la tasa de interés.¹

Por lo tanto el precio del bono será la esperanza del flujo descontado bajo las probabilidades ajustadas por riesgo el cual considera un proceso para la tasa instantánea con una tendencia o pendiente ajustada:

$$P(t, T) = E^* \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \right] \quad (5.3)$$

La estructura de tasas cero cupón $R(t, T)$ en el momento t queda definida por los precios de los bonos:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (5.4)$$

por lo tanto se tiene que:

$$R(t, T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln P(t, T) \quad (5.5)$$

Finalmente la estructura de tasas de interés queda definida por la evolución de la tasa de corto plazo. Un modelo de la tasa de interés instantánea r se relaciona directamente con la evolución de la estructura de tasas de interés a través del tiempo:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln E^* \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \right] \quad (5.6)$$

En consecuencia en cualquier momento t la estructura completa queda definida por el valor de $r(t)$ y su proceso ajustado por riesgo. En general los procesos estocásticos para la tasa de corto plazo son markovianos por lo que su evolución futura sólo depende de su valor actual y no de la trayectoria pasada. Se define entonces la tasa de corto plazo como variable de estado del proceso.

¹ Ver Baxter y Rennie (1996) y Hull (1999) para una presentación más detallada.

La evolución de la tasa de corto plazo quedará representado por el modelo utilizado. Un modelo de la tasa instantánea queda definido de manera general por un proceso estocástico del tipo

$$dr = \mathbf{m} dt + \mathbf{s} dw \quad (5.7)$$

donde \mathbf{m} es el valor esperado de los cambios instantáneos en la tasa de interés (también denominado tendencia o pendiente) y \mathbf{s} su desviación estándar, los cuales pueden ser dependientes o independientes del tiempo.

La pendiente y la volatilidad de este tipo de procesos pueden tomar distintas formas funcionales como reversión a la media y volatilidades que dependen del nivel de la variable de estado.

5.2 Construcción de un Modelo Estocástico de Tasas de Interés

Un modelo está definido por sus variables de estado y por sus procesos. Los valores que toman las variables de estado en un modelo determinan completamente el estado del sistema. Los procesos definen cómo las variables de estado cambian en el tiempo.

Los modelos dinámicos de tasas de interés son procesos estocásticos que cuentan con un componente de tendencia determinístico y un componente de volatilidad que agrega ruido al modelo.

5.2.1 Componente de tendencia

La evidencia empírica internacional sugiere que las tasas de interés reversion a un valor de equilibrio. Algunos procesos para las tasas de interés modelan esta reversión de manera que la tasa instantánea tienda a un valor medio:

$$\frac{dr_t}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{m} - r_t), \quad \mathbf{a} > 0 \quad (5.8)$$

o bien

$$dr_t = \mathbf{a}(\mathbf{m} - r_t) dt \quad (5.9)$$

Si la tasa instantánea r_t es menor que el valor medio m , ésta tiende a aumentar. Si la tasa instantánea es mayor ésta tiende a disminuir. La solución a (5.8) es:

$$r_t = m + (r_0 - m)e^{-at} \quad (5.10)$$

donde r_0 es el valor en $t = 0$ de la tasa instantánea, m es el valor medio al cual revierte la tasa a la media y a es la tasa de reversión a la media que define la velocidad con que r_t tiende a m .

5.2.2 Componente de volatilidad

El término aleatorio en series de tiempo en finanzas es comúnmente considerado una función de un proceso de Wiener. Este tipo de proceso se caracteriza por una variable aleatoria z_t la cual varía en forma continua de acuerdo a una distribución normal. El valor de la variable z_T en $T > t$, condicional en z_t , está normalmente distribuida con media z_t y varianza $T - t$. Esta variable puede ser escalada de manera que dado z_t , $\mathbf{s} z_T$ es normal con media z_t y varianza $\mathbf{s}^2(T - t)$.

En un proceso estocástico los cambios debido al componente de volatilidad vienen dados por los cambios en la variable aleatoria z_t . Esto implica que la media de los cambios dz_t es 0 y la varianza es dt o $\mathbf{s} dt$ cuando es escalada.

Agregándole el componente de volatilidad al proceso definido en (5.9) obtenemos el siguiente proceso estocástico:

$$dr_t = a(m - r_t) dt + \mathbf{s} dz_t \quad (5.11)$$

Este proceso conocido como de Ornstein-Uhlenbeck fue usado para el primer modelo de equilibrio de no-arbitraje propuesto por Vasicek (1977).

5.3 Desarrollo del Modelo de Vasicek

El primer enfoque que debe ser aplicado para estimar la dinámica de las tasas de interés de un mercado en particular es a través de un modelo que considerando un comportamiento que sea consistente con la evidencia empírica sobre

los movimientos de éstas retenga la mayor simplicidad posible. Como se vio en la sección 4.1 las TIR de los bonos PRC exhiben una clara reversión a la media o valor de largo plazo por lo que se debe considerar un modelo que cumpla con esta especificación.

El modelo de Vasicek (1977) fue el primero en incorporar reversión a la media a un modelo de tasas de interés de equilibrio. Esto permite un comportamiento acorde con el que se observa en la realidad en cuanto a que las tasas tienden a volver a valores medios. Vasicek (1977) utiliza un proceso de Ornstein-Uhlenbeck como el planteado en (5.11) y deriva ecuaciones para valorar bonos como opciones europeas utilizando el principio de no-arbitraje.

Dentro de las ventajas del modelo de Vasicek se puede mencionar la facilidad de implementación, la simpleza analítica y la capacidad de generar distintas formas de la estructura de tasas de interés como crecientes, decrecientes y con montes o valles. El modelo de Vasicek tiene una base conceptual sólida que permite interpretar la información que contienen las tasas de interés a través del tiempo.

El proceso para la tasa instantánea modelado por Vasicek como se vio anteriormente es el siguiente:

$$dr = \mathbf{a}(\mathbf{m} - r) dt + \mathbf{s} dz \quad (5.12)$$

Si $P(t, T)$ es el precio del bono en t con madurez en T y la tasa de corto plazo instantánea sigue un proceso estocástico como en (5.12), por el lema de Itô el precio del bono sigue el siguiente proceso estocástico:

$$\frac{dP}{P} = \mathbf{m}_p(t, T) dt + \mathbf{s}_p(t, T) dz \quad (5.13)$$

con $\mathbf{m}_p(t, T)$ y $\mathbf{s}_p(t, T)$, media y la desviación estándar de los retornos del bono, que están dados por

$$\mathbf{m}_p(t, T) = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{a}(\mathbf{m} - r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) \quad (5.14)$$

$$\mathbf{s}_P(t, T) = \frac{1}{P} \left(\mathbf{s} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (5.15)$$

Como se vio en la sección 5.1 para valorar un derivado sobre la tasa de interés se debe considerar el proceso ajustado por riesgo. Este ajuste se hace sobre la tendencia del proceso real restándole el premio por volatilidad:

$$dr = (\mathbf{a}(\mathbf{m} - r) - \mathbf{l}\mathbf{s}) dt + \mathbf{s} dz \quad (5.16)$$

donde \mathbf{l} se define como el precio de mercado del riesgo por unidad de volatilidad el cual se supone constante. Definimos

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{m} - \frac{\mathbf{l}\mathbf{s}}{\mathbf{a}} \quad (5.17)$$

como el nivel de largo plazo ajustado por riesgo.

En un mundo ajustado por riesgo en que los activos de la economía crecen a la tasa libre de riesgo el retorno del bono por unidad de tiempo será igual al retorno libre de riesgo:

$$E^* \left[\frac{dP}{P} \right] = r \quad (5.18)$$

Ajustando la tendencia del retorno del bono en (5.15) se tiene que:

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{a}(\hat{\mathbf{m}} - r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) = r \quad (5.19)$$

Reorganizando (5.19) tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{a}(\hat{\mathbf{m}} - r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - Pr = 0 \quad (5.20)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (5.20) se demuestra que el precio de un bono cero cupón en t que paga \$1 en T es

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)} \quad (5.21)$$

donde $r(t)$ es el valor de la tasa instantánea en t ,

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (5.22)$$

y

$$A(t, T) = (B(t, T) - (T - t)) \left(\hat{m} - \frac{s^2}{2a^2} \right) - \frac{s^2 B(t, T)^2}{4a}. \quad (5.23)$$

Las ecuaciones (5.21), (5.22) y (5.23) son utilizadas en este trabajo para encontrar los precios teóricos de los bonos PRC tomando en cuenta de que un bono con cupones es un portafolio de bonos cero cupón¹.

Vasicek (1977) también resolvió las ecuaciones cerradas para precios de opciones europeas sobre bonos las que no se presentan en este trabajo, pero pueden ser utilizadas para valorar instrumentos de este tipo.

5.4 Modelos con Parámetros Independientes del Tiempo

En la literatura se pueden encontrar una amplia gama de modelos que describen un proceso para la tasa de corto plazo instantánea. Los modelos son variaciones del modelo de Vasicek (1977) tanto en el componentes de tendencia como en el componente de volatilidad.

En el trabajo Chan et al. (1992) se hace una comparación de un conjunto de modelos de un factor cuyos parámetros no dependen del tiempo. La forma general del proceso estocástico es

$$dr_t = (a + b r_t) dt + s r_t^g dw_t \quad (5.24)$$

Esta formulación permite encasillar a la gran mayoría de los modelos de la tasa de corto plazo de un factor de riesgo. Las restricciones que se le asignan a los

¹ Ver Anexo G sección G.1.

parámetros determinará el tipo de modelo y la distribución para la tasa de corto plazo. Estos modelos pueden incorporar reversión a la media y volatilidad dependiente del nivel de tasas. En general permiten obtener soluciones analíticas cerradas para la valoración de bonos y opciones sobre bonos.

El primer modelo en que se propuso un proceso estocástico de este tipo para la tasa de corto plazo fue el de Merton (1973). El proceso es del tipo

$$dr_t = \mathbf{m} dt + \mathbf{s} dz_t \quad (5.25)$$

donde \mathbf{m} y \mathbf{s} son constantes. Este modelo describe imperfectamente el comportamiento real de la tasa de corto plazo ya que no tiende a un valor de largo plazo. Esto genera que el proceso de la tasa instantánea sea explosivo llegando a valores que no se observan en los mercados.

Algunos modelos consideran que la volatilidad dependa del nivel de la tasa de corto plazo. El modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) fue el primero en incorporar dependencia de la volatilidad a la variable de estado en un modelo con reversión a la media.

$$dr_t = \mathbf{a}(\mathbf{m} - r_t) dt + \mathbf{s} \sqrt{r} dz_t \quad (5.26)$$

Esta especificación genera distribuciones chi-cuadrado para las tasas futuras rompiendo las condiciones de normalidad observadas en otros modelos.

Todos los modelos descritos hasta ahora consideran los parámetros como invariantes en el tiempo y presuponen estabilidad en éstos. Generalmente estos parámetros se estiman de series de tiempo de precios observados en el mercado.

5.5 Modelos con Parámetros Dependientes del Tiempo

De manera de lograr un ajuste perfecto con los precios observados en el mercado algunos modelos fueron extendidos de manera de incorporar en sus parámetros dependencia del tiempo. Incluso algunos modelos ajustan el parámetro de volatilidad de manera que sea consistente con la estructura de volatilidades observadas en el mercado.

El primer modelo que incorporó la dependencia de los parámetros al tiempo es el modelo de Ho y Lee (1986). Aunque el modelo fue presentado en la forma de árboles binomiales para precios de bonos tiene un límite continuo para la dinámica de la tasa de corto plazo:

$$dr_t = \mathbf{q}(t) dt + \mathbf{s} dz_t \quad (5.27)$$

Una de las limitaciones de este modelo es que no incorpora reversión a la media de la tasa instantánea lo que implica que las volatilidades instantáneas de las tasas spot de todos los plazos son iguales.

Hull y White (1990) ajusta los parámetros del modelo de Vasicek (1977) de manera de que los precios teóricos de los bonos entregados por el modelo sean consistentes con todos los precios de mercado. La formulación general del modelo considera todos los parámetros como dependientes del tiempo:

$$dr_t = (\mathbf{q}(t) - a(t)r_t) dt + \mathbf{s}(t) dz_t \quad (5.28)$$

La solución analítica cerrada puede ser obtenida sólo cuando $\mathbf{s}(t)$ es constante.

También los autores extienden el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) pero éste no cuenta con soluciones analíticas para precios de los bonos y opciones europeas. La solución debe encontrarse mediante el uso de procedimientos numéricos.

Black, Derman y Toy (1990) y Black y Karasinski (1991) proponen modelos lognormales con parámetros que dependen del tiempo. Por ejemplo el modelo de Black, Derman y Toy (1990) sigue el siguiente proceso estocástico

$$d \ln(r_t) = (\mathbf{q}(t) - a \ln(r_t)) dt + \mathbf{s} dz_t \quad (5.29)$$

Los modelos que ajustan los parámetros de manera de calzar perfectamente con la curva de tasas de interés del día son criticados porque imponen ciertas restricciones al proceso que pueden no ser consistentes con la dinámica

histórica de las tasas de interés¹. Además puede que los parámetros estimados día a día sean muy inestables en el tiempo lo que rompe la consistencia estadística del modelo.

Otro problema con este tipo de especificación es que no siempre se tienen soluciones analíticas para los precios de los bonos y opciones lo que complica la estimación y uso de estos modelos.

5.6 Modelos Multifactoriales

Los modelos de un factor se caracterizan por su flexibilidad analítica y la facilidad de uso. Ante la aparición en los mercados de instrumentos cada vez más complejos que dependen de los movimientos de toda la estructura de tasas en la literatura han emergido un grupo de modelos que consideran la incorporación de más de un factor de riesgo para explicar la dinámica de la estructura de tasas de interés. La desventaja de estos modelos es la incapacidad de generar soluciones analíticas debido a la incorporación de ecuaciones diferenciales parciales de orden superior con el consecuente costo en tiempo de cálculo.

Uno de los primeros modelos multifactoriales es el de Brennan y Schwartz (1979) en dónde un factor es la tasa de corto plazo y el otro es la tasa de un bono de un bono de largo plazo. En la misma línea existen un conjunto de modelos que utilizan distintos factores de riesgo adicionales dentro de los que se puede mencionar a Duffie y Kan (1993), Longstaff y Schwartz (1992), Schaefer y Schwartz (1984) entre otros.

Como en los modelos de un factor, existen dentro de los modelos multifactoriales un grupo que se ajusta perfectamente a la estructura de tasas de interés observada al incorporar parámetros dependientes del tiempo. Por ejemplo Hull y White (1994) extiende su modelo de un factor para incorporar un segundo factor el cual corresponde a un componente del parámetro de reversión a la media.

¹ Por ejemplo ver Gibson, Lhabitant y Talay (2001).

5.7 Modelos Extendidos a Espacios de Dimensión Infinita

Existe un grupo de modelos que considera la dinámica de toda la estructura de tasas de interés. Estos modelos consideran la estructura de tasas como variable de estado pero que a su vez tiene dimensión infinita. El modelo de Ho y Lee (1986) fue el primero en considerar la estructura completa como variable de estado pero considerando una sola dimensión o factor de riesgo.

El mayor aporte en esta área fue hecho por Heath, Jarrow y Morton (1992) en el que cada tasa forward instantánea $f(t, T)$ tiene su proceso estocástico correlacionado con los demás puntos de la curva. En general existen tantos factores de riesgo como puntos en la curva. Por definición este modelo se ajusta perfectamente a la estructura de tasas de interés observada en el día ya que se conoce $f(0, T)$ para cada T . La lógica detrás de este tipo de modelos ha sido incluso aplicada a modelos de precios de commodities como en Cortazar y Schwartz (1994).

Otros aportes más recientes han sido Kennedy (1994) y Goldstein (2000) que basan sus modelos en campos aleatorios¹ los cuales son variables aleatorias con dos o más índices. La misma línea sigue el trabajo de Santa-Clara y Sornette (2001) el cual es aplicado para valorizar instrumentos complejos en Longstaff, Santa-Clara y Schwartz (1999).

5.8 Modelación de Tasas de Interés en Chile: Revisión de la literatura

En Chile son pocos los trabajos que han considerado el estudio de las dinámica de la estructura de tasas de interés. Los trabajos existentes tratan de explicar dinámicas de las tasas nominales o reales utilizando diversos modelos y métodos de estimación. A continuación se hace una revisión de los artículos publicados en el tema hasta la fecha.

El objetivo del trabajo de Parisi (1998) es replicar la investigación de Chan et al. (1992) para el caso chileno de manera de identificar qué modelos se

¹ *Random Fields* en la literatura.

ajustan mejor a la dinámica observada. Los datos utilizados son las tasas nominales de bonos PDBC a 90 días para el periodo comprendido entre los años 1983 y 1995.

El autor utiliza el Método Generalizado de Momentos (GMM) para estimar los parámetros de los distintos modelos llegando a la conclusión de que los modelos que consideran la volatilidad dependiente del nivel de las tasas de interés son los que mejor se ajustan a las tasas nominales. Los modelos en tiempo continuo son discretizados para utilizar datos mensuales de las tasas de los PDBC.

Un crítica a este trabajo es que los datos corresponden a ventas por ventanilla de PDBC del Banco Central, en las cuales la institución fija la tasa de descuento a la que emite el papel y las instituciones bancarias deciden que monto comprar, por lo que es discutible si esta tasa corresponde o no a una “tasa de mercado”.

Parisi (1999) amplía el estudio realizado en Parisi (1998) para hacer una comparación de los modelos dinámicos, como en Chan et al. (1992) con volatilidades estocásticas versus modelos autoregresivos de primer orden, comparando la capacidad de estos modelos para explicar y predecir los movimientos de las tasas de interés.

La comparación entre los modelos se realiza contrastando el nivel de significancia de éstos y su ajuste a los datos. El autor concluye que existe una clara ventaja de los modelos dinámicos sobre los modelos autoregresivos en la realidad chilena en términos de ajuste y predicción. En resumen, el estudio es una comparación estadística entre los modelos planteados.

Zuñiga (1999a) propone utilizar tasas semanales de Bonos de Reconocimiento (BR) para estimar un modelo general como el propuesto en Chan et al. (1992). El autor utiliza procesos para la tasa de corto plazo para modelar las tasas de interés de BR con plazos de 1 año, 5 años, 10 años y 15 años.

La metodología utilizada por Zuñiga (1999a) es equivalente a la de Chan et al. (1992); utiliza una discretización del modelo continuo para luego utilizar las series de tiempo de las tasas de interés de los instrumentos para estimar los

parámetros. El autor realiza una comparación utilizando distintas formas funcionales para la volatilidad.

Al igual que en el trabajo original de Chan et al. (1992) y en Parisi (1998) la comparación entre las distintas formas funcionales se hace en función de la significancia estadística del modelo utilizado pero además se incorpora el valor de la función de Máxima Verosimilitud como indicador de ajuste.

Zuñiga (1999b) utiliza Bonos de Reconocimiento (BR) para estimar un modelo de dos factores; la tasa de corto plazo y su nivel de equilibrio a largo plazo. El modelo es replanteado y discretizado para efectuar las regresiones de manera de estimar los parámetros. Se utiliza como *proxy* de la tasa instantánea los BR menores a dos años plazo.

Un enfoque alternativo a lo propuesto por los demás investigadores es el método de estimación no-paramétrica utilizado por Fernández (1999). En vez de recurrir a formas funcionales con sus respectivos parámetros, los métodos no-paramétricos toman en cuenta toda la distribución para inferir la tendencia y la volatilidad de modelos de un factor mediante el uso de Kernels.

Fernández (1999) plantea que las formas funcionales de modelos de un factor son arbitrarias y que todos son rechazados estadísticamente según Aït-Sahalia (1996b) por lo que propone utilizar estimación no-paramétrica como la propuesta en Jiang (1998) y Stanton (1997). Pritsker (1998) debate el rechazo estadístico planteado por Aït-Sahalia (1996b) argumentando que la distribución estimada para el testeo no es lo suficientemente exacta, necesitando 2755 años de datos para un testeo correcto. Esto se desprende de que los tests de Aït-Sahalia consideran las observaciones como independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.).

Fernández (1999) utiliza como tasa de corto plazo la tasa de los depósitos interbancarios a 7 días en términos nominales entre Diciembre de 1992 y Abril de 1998. Los autores en que ha basado su trabajo utilizan datos desde 1965 a 1995 (Stanton, 1997), desde 1962 a 1996 (Jiang, 1998) y desde 1973 a 1995 (Aït-Sahalia, 1996a). Puede que el rango de tiempo utilizado por la autora sea insuficiente para la estimación de las distribuciones estacionarias.

Un problema que surge al utilizar estos métodos no-paramétricos es que no existen soluciones analíticas para los precios de los bonos y otros instrumentos por lo que se pierde el análisis analítico más simple.

Esta tesis presenta un enfoque distinto a los métodos utilizados en los trabajos descritos en esta sección. Primero, considera un modelo clásico de tasas de interés que hasta el momento no ha sido estudiado para la realidad chilena, que entrega soluciones analíticas para los precios de bonos y opciones europeas.

Los datos utilizados para calibrar el modelo son TIR diarias de bonos PRC, los cuales son el principal indicador de las tasas reales en Chile, con un mercado suficientemente líquido y homogéneo. Además se utiliza un periodo actualizado de datos que presenta variadas estructuras de volatilidades.

Como se verá en el siguiente capítulo la metodología de calibración difiere a la utilizada en otros trabajos ya que considera la estimación de los parámetros utilizando toda la información de la estructura de tasas de interés contenidas en los precios de los bonos PRC.

VI ESTIMACIÓN DE UN MODELO DINÁMICO PARA EL MERCADO CHILENO

Como se explicó en el capítulo V se elige el modelo de Vasicek para estimar la dinámica de tasas reales en Chile debido a su especificación, la cual implica reversión a una media de largo plazo de las tasas de interés, y a que permite deducir soluciones analíticas de precios teóricos de bonos. Esta última característica es fundamental al implementar el método de estimación utilizado en esta tesis ya que considera la información de toda la estructura de tasas de interés, reflejada en las TIR de los bonos PRC y por lo tanto en sus precios. En este capítulo se presenta en detalle el método de estimación empleado y los resultados de estimación en función de los parámetros y sus errores de ajuste a los precios. Estos últimos deben ser cuantificados de manera de decidir si éstos están dentro de rangos razonables y poder contrastarlos con los errores del enfoque de estimación estática.

Los parámetros de los modelos de tasas de interés deben ser estimados utilizando los datos de instrumentos de mercado. Debido a que la tasa instantánea no es observable, generalmente la calibración de este tipo de modelos se realiza utilizando un *proxy* de esta tasa de interés. La mayoría de los estudios en EEUU utilizan series de tiempo de algún instrumento de deuda de corto plazo como por ejemplo Bonos del Tesoro a 30 días. En esta tesis se presenta un método alternativo el cual considera utilizar datos de panel de bonos de todos los plazos.

6.1 Metodología

Debido a la inexistencia de una tasa de corto plazo real libre de riesgo líquida en el mercado chileno que sirva como *proxy* de la tasa instantánea se debe recurrir a datos de instrumentos de más largo plazo. Los métodos de estimación más utilizados discretizan los procesos para la tasa de corto para luego estimar los parámetros globales del modelo. El método propuesto en este trabajo consiste en obtener la tasa de corto plazo, la cual es una variable de estado no observable o variable latente, de los precios de los bonos PRC transados para cada día. La estimación ajusta los precios observados de los PRC y la dinámica implícita de la tasa de corto plazo no observable. Este tipo de metodología que utiliza datos de panel

para estimar las variables de estado y los parámetros del modelo ha sido utilizada en modelos de commodities como en Cortazar y Schwartz (2002), Reyes (2000) y Riera (1999). Dentro de los métodos para calibrar modelos de tasas de interés con este tipo de metodología, pero además incorporando estimación bayesiana¹, se puede mencionar a Gibbons y Ramaswamy (1993), Pennacchi (1991) y Ball y Torous (1996) quienes utilizan información de panel de Bonos del Tesoro de EEUU². En la misma línea Lund (1997) propone un método de estimación utilizando bonos con cupones como datos de panel.

Las ventajas de utilizar datos de panel sobre *proxies* de la tasa de corto plazo son:

- 1- La tasa instantánea implícita se obtiene de la solución de los precios de los bonos según el modelo que se utilice.
- 2- Se calibran los parámetros de manera de ser consistentes con toda la estructura de tasas de interés reflejada en los precios de los bonos.
- 3- Al tomar sólo información del tramo de corto plazo el parámetro de reversión a la media tiende a estar segado de forma positiva (Ball y Torous, 1996).

De manera de aprovechar toda la información de la estructura de tasas de interés este trabajo considera los bonos PRC transados en todos los plazos, infiriendo para cada día la variable no observable r .

Se puede escribir el precio de un PRC como el precio de un portfolio de bonos cero cupón. Siguiendo con la notación propuesta en Capítulo V:

¹ Específicamente filtro de Kalman.

² Los Bonos del Tesoro son bonos de descuento o cero cupón.

$$PRC(t) = \sum_{i=1}^N C_i P(t, T_i) \quad (6.1)$$

Utilizando la fórmula para el precio teórico de un bono cero cupón que paga \$1 en T según el modelo de Vasicek se tiene que el precio teórico de un PRC es para cada instante t :

$$PRC(t) = \sum_{i=1}^N C_i e^{A(t, T_i) - B(t, T_i) r(t)} \quad (6.2)$$

El monto de cada cupón C_i , la cantidad de cupones N , y sus plazos T_i dependerán de las características de cada PRC.

El precio del PRC estará definido por los parámetros del modelo y la variable de estado $r(t)$, la cual será distinta para cada día en la muestra. Utilizando (6.2) se define un precio teórico para cada PRC transado el cual depende de los parámetros del modelo y las características del bono.

$$\hat{P}RC_i(t) = PRC_i(r(t), t; \mathbf{a}, \hat{\mathbf{m}}, \mathbf{s}) \quad (6.3)$$

La estimación de los parámetros \mathbf{a} , $\hat{\mathbf{m}}$ y \mathbf{s} del modelo de Vasicek se realizó minimizando el error cuadrático medio entre el logaritmo del precio teórico y el logaritmo del precio de mercado dividido por su duración para cada PRC i y para cada día j :

$$\underset{\{\mathbf{a}, \hat{\mathbf{m}}, \mathbf{s}\}}{\text{Min}} \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln(PRC_i(t_j)) - \ln(\hat{P}RC_i(t_j))}{D_i} \right)^2 \quad (6.4)$$

Al igual que la función objetivo utilizada en el capítulo IV para estimar la estructura de tasas cero cupón, ésta es equivalente a minimizar el error en TIR. La estimación se hace en forma global obteniendo además la variable de estado para cada día.

6.2.1 Estimación de la variable de estado

Dado que la tasa instantánea r es una variable de estado no observable debe ser estimada para cada día en conjunto con el resto de los parámetros del modelo. Como en Lund (1997), se linealiza la función de precio teórica dada por el modelo de Vasicek mediante una expansión de Taylor para obtener la tasa instantánea. La función expandida en torno a una tasa inicial dada r_0 será:

$$PRC(r) = PRC(r_0) + PRC'(r_0)(r - r_0) \quad (6.5)$$

El precio teórico $PRC(r_0)$ y su derivada en r_0 , $PRC'(r_0)$ son conocidos dado un conjunto de parámetros iniciales $(\mathbf{a}_0, \hat{\mathbf{m}}_0, \mathbf{s}_0)$. El punto entorno al cual se linealiza, r_0 , tiene un valor inicial conocido. El precio observado en el mercado entrega el valor del PRC en r . Por lo tanto la única incógnita en esta ecuación es el valor de la tasa instantánea.

Para cada día de la muestra se tiene un conjunto de PRC transados por lo que el valor de $r(t)$ obtenido no es único. Para obtener un estimador insesgado de la tasa de corto plazo se utiliza el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) con intercepto conocido. Reordenando (6.5) se obtiene para cada PRC:

$$PRC_i - PRC_i(r_0) + PRC_i'(r_0)r_0 = r PRC_i'(r_0) \quad (6.6)$$

que equivale a una regresión:

$$y_i = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x_i \quad i = 1, \dots, n \quad (6.7)$$

con $\mathbf{b}_0 = 0$ restringido y $\mathbf{b}_1 = r$. El precio de mercado PRC_i y la función teórica de precio y su derivada evaluada en r_0 son conocidos para cada PRC transado.

Para cada día j se tendrá un sistema lineal del tipo:

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j \quad (6.8)$$

con

$$\mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} PRC_1(r) - PRC_1(r_0) + PRC_1'(r_0)r_0 \\ \vdots \\ PRC_n(r) - PRC_n(r_0) + PRC_n'(r_0)r \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} 1 & PRC_1'(t) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & PRC_n'(t) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

para n observaciones y $\mathbf{B}_j = (\mathbf{b}_0 \quad \mathbf{b}_1)'$ y dónde $\mathbf{b}_1 = r(t_j)$ parámetro a estimar y $\mathbf{b}_0 = 0$ parámetro restringido.

6.3.2 Algoritmo de estimación

Con los parámetros globales de partida iniciales $(\mathbf{a}_0, \hat{\mathbf{m}}_0, \mathbf{s}_0)$ se estima la tasa de instantánea r para cada día. Luego se minimiza el error cuadrático de las diferencias de los logaritmos del precio utilizando la función objetivo planteada en (6.4). Después de cada optimización se estiman nuevamente las variables de estado considerando el punto de expansión r_0 para cada día como la variable de estado estimada anterior \hat{r} .

El parámetro de volatilidad \mathbf{s} se restringe de manera de ser igual a la volatilidad de la serie de tiempo de la variable de estado.

En la figura 6-1 se muestra un diagrama de flujo que ilustra el algoritmo de estimación.

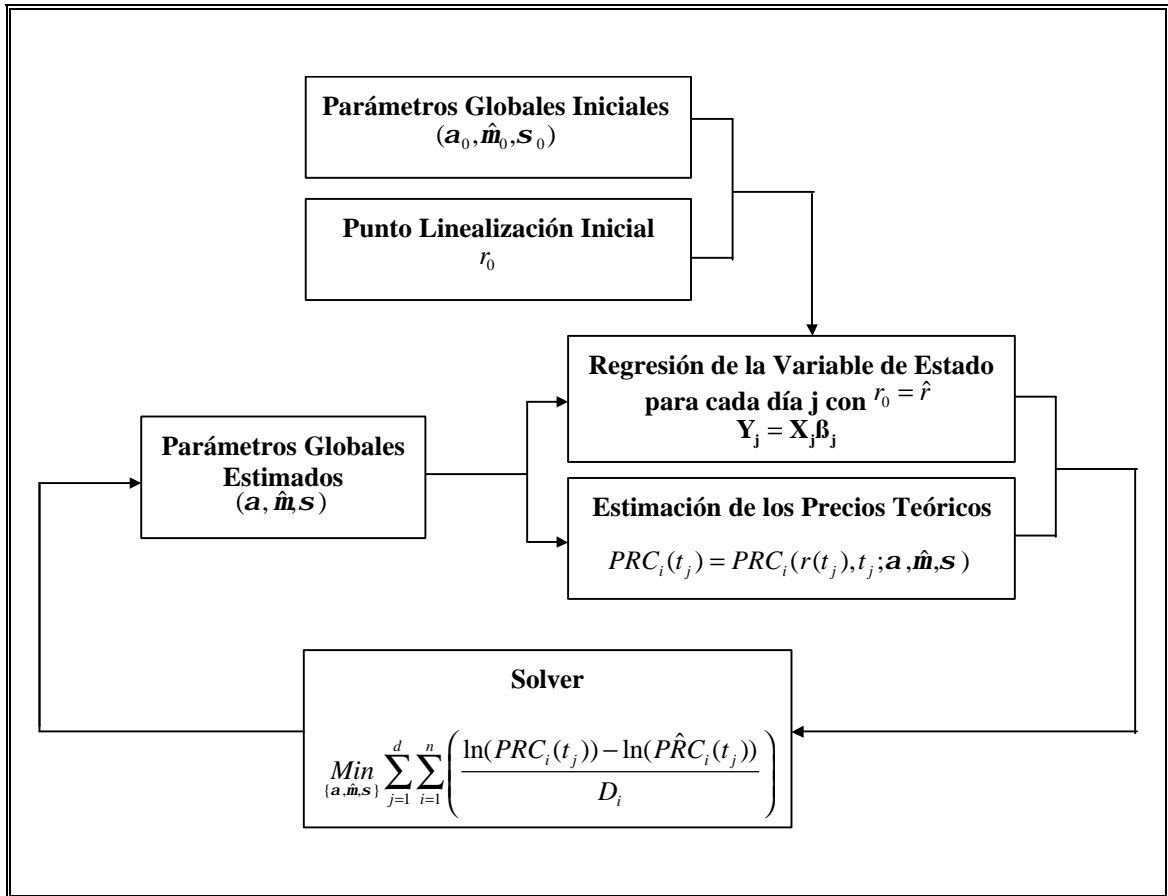


Figura 6-1: Diagrama de flujo del algoritmo de estimación del modelo de Vasicek

6.4 Resultados

Para realizar la estimación se consideró el periodo desde enero de 1997 a diciembre del 2001. Los datos utilizados son los mismos descritos en la sección 4.1 de esta tesis. Además se estimaron los parámetros para dos subperiodos de éste: desde enero de 1997 a junio de 1999 y de julio de 1999 a diciembre del 2001. Esta división permite ver la estabilidad de los parámetros en el tiempo y analizar el efecto de las altas volatilidades que se observaron en el mercado el año 1998 debido a la abrupta subida de la tasa de política monetaria hasta un 14% real.

Los resultados para los periodos se muestran en la siguiente tabla:

Tabla VI-1: Parámetros del modelo de Vasicek estimados.

Panel	Periodo	a	\hat{m}	s
P1	Enero 1997 - Diciembre 2001	0,3831	6,6141%	3,6305%
P2	Enero 1997 – Junio 1999	0,5068	6,6435%	4,9543%
P3	Julio 1999 - Diciembre 2001	0,1405	7,1576%	1,4222%

La variable crítica en la estimación es la volatilidad de la tasa de corto plazo s . Ésta refleja los cambios en el régimen de volatilidades para las distintas muestras confirmando el alto periodo de volatilidades de la estructura de tasas que se observa en los datos para el año 1998.

El parámetro de reversión a la media a también cambia considerablemente de un periodo a otro. Esto se debe a que la volatilidad de los bonos de largo plazo depende también de este parámetro.

La tasa de largo plazo ajustada por riesgo \hat{m} es más estable entre las distintas muestras lo que confirma la estabilidad de la tasa a la que están revirtiendo las tasas reales en Chile.

6.4.1 Errores de ajuste

Siguiendo el tipo de análisis del capítulo IV se calculan los principales indicadores de ajuste, error promedio, error absoluto promedio y RMSE para el periodo de estimación. En el Anexo H se presentan los resultados para cada año en particular y para cada panel de datos.

Tabla VI-2: Indicadores de error estimación modelo de Vasicek para los paneles P1, P2 y P3.

MAE: Error absoluto promedio, RMSE: Raíz del error porcentual cuadrático medio

	Error TIR Promedio	Error Precio % Promedio	MAE TIR	MAE Precio	RMSE TIR	RMSE Precio %
P1	0,001%	-0,007%	0,125%	0,356%	0,220%	0,494%
P2	-0,004%	0,002%	0,144%	0,423%	0,227%	0,580%
P3	0,005%	-0,028%	0,086%	0,271%	0,132%	0,365%

En el capítulo IV se determinó que los errores absolutos promedio en TIR para los métodos estáticos eran de aproximadamente 3 puntos base para el periodo 1997-2001. Para el método de Svensson se tiene específicamente 3,2 puntos base de error absoluto promedio para el mismo periodo. Comparando este error con los resultados del panel P1 en la tabla VI-2 se tiene que el error del método dinámico es 3,9 veces más alto que el método de Svensson. Esta relación se mantiene aproximadamente igual para el RMSE en TIR.

En la figura 6-2 se muestran los errores absolutos promedio en TIR del modelo de Vasicek para los tres paneles de datos. Al igual que en el caso de los modelos estáticos se tiene un mayor error de ajuste en los plazos más cortos que puede ser explicado por la mayor cantidad de transacciones en los plazos largos. La magnitud de los errores está directamente asociada a la volatilidad de las TIR de cada panel de datos. Los paneles P1 y P2, que incluyen el periodo de altas volatilidades del año 1998, presentan errores absolutos promedio mayores que el panel P3 (Ver figura 6-3 para comparación de volatilidades por panel). La estabilidad de los errores de los bonos de largo plazo es importante si se quiere considerar la valorización de opciones sobre estos bonos por ejemplo.

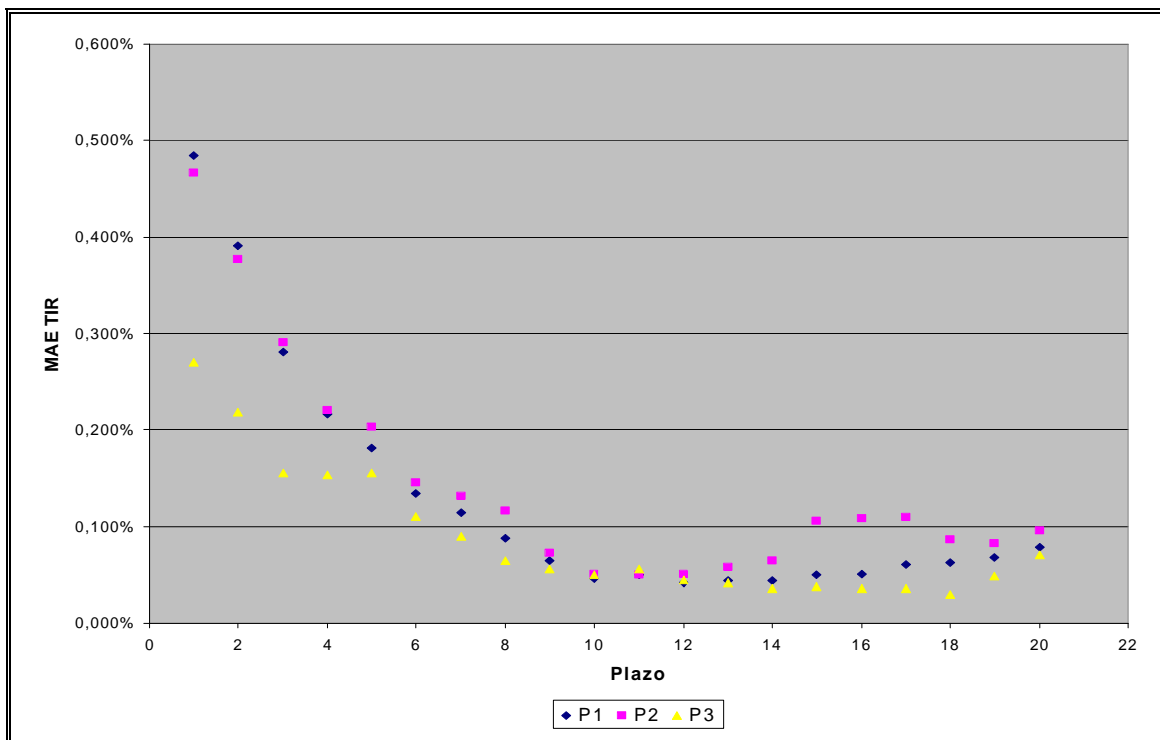


Figura 6-2: Error absoluto promedio (MAE) en TIR de la estimación del modelo de Vasicek para cada panel de datos.

6.4.2 Comparación con volatilidades históricas

En los modelos dinámicos los parámetros se miden en función de los cambios en la tasa instantánea. De manera de poder comparar las volatilidades históricas con las teóricas se mide la volatilidad de los cambios diarios anualizada de la TIR de los PRC en base al número de días dónde hubieron transacciones para cada plazo.

La figura 6-3 muestra la volatilidad de los cambios en la TIR de los bonos para los tres paneles. Este gráfico es consistente con la forma de las volatilidades de los datos para los distintos periodos de tiempo considerados.

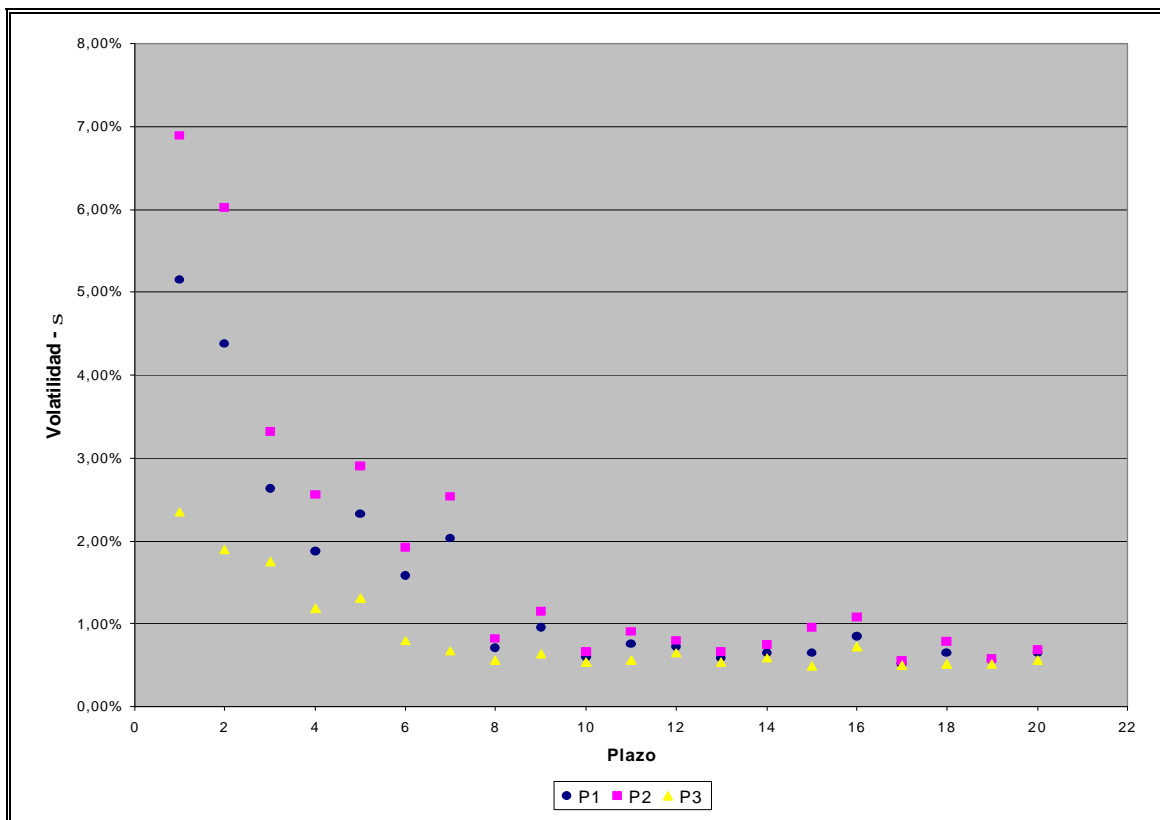


Figura 6-3: Volatilidad de los cambios en la TIR de los PRC para los paneles P1, P2 y P3.

La volatilidad teórica de los cambios en la TIR dependerá de los valores de los parámetros del modelo¹. La comparación de la volatilidad teórica con la histórica de los cambios en la TIR de los PRC se hará para el panel P1 y el panel P3 con el objetivo de contrastar el periodo completo con volatilidades altas con un periodo más reciente. El ajuste de volatilidad determinará si el modelo dinámico está replicando la estructura de volatilidades históricas.

¹ Ver anexo I para demostración de cálculo de esta volatilidad.

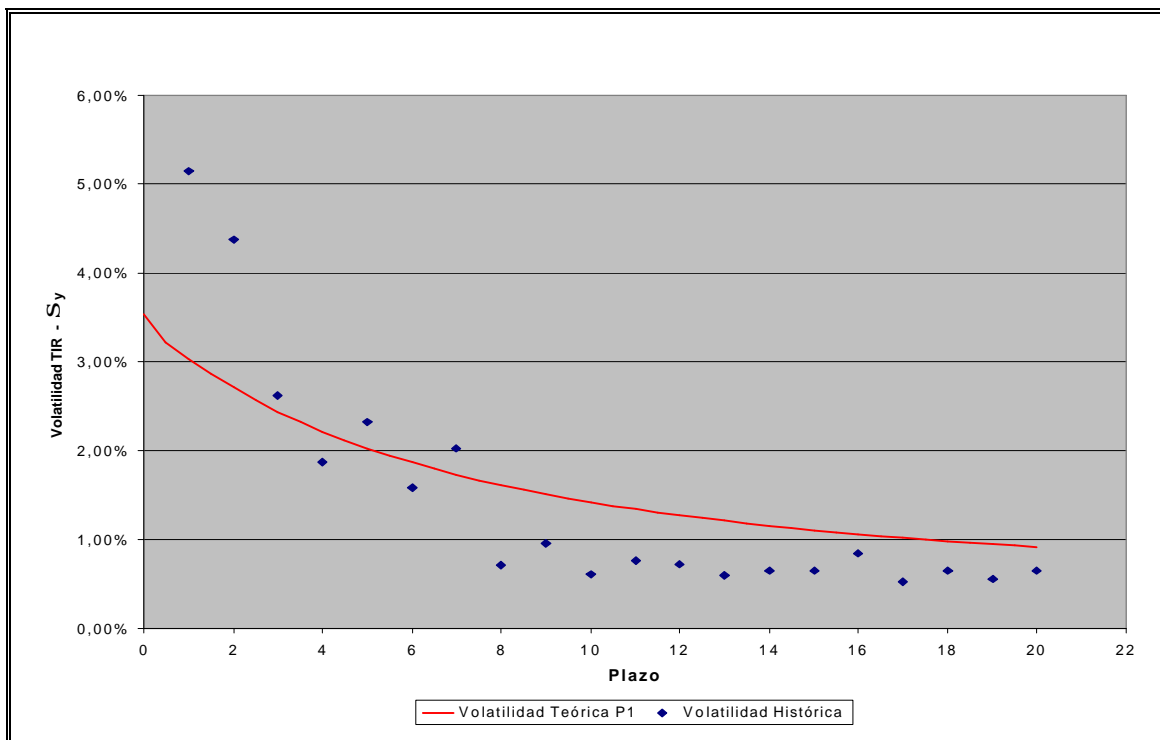


Figura 6-4: Volatilidad de los cambios en la TIR de los PRC histórica y del modelo de Vasicek para el panel P1.

Como se ve en la figura 6-4 aún cuando las volatilidades de los cambios en la TIR son estimadas de manera de ser consistentes con la dinámica observada de los instrumentos de todos los plazos, las volatilidades de corto plazo aparecen subvaluadas por el modelo mientras que las de largo plazo aparecen sobrevaluadas.

De manera de ver si esta situación se repite para otro panel de datos con volatilidades menores, en la figura 6-5 se grafican las volatilidades históricas y las volatilidades teóricas para el panel P3. Se puede observar que se produce el mismo efecto en las volatilidades descrito anteriormente.

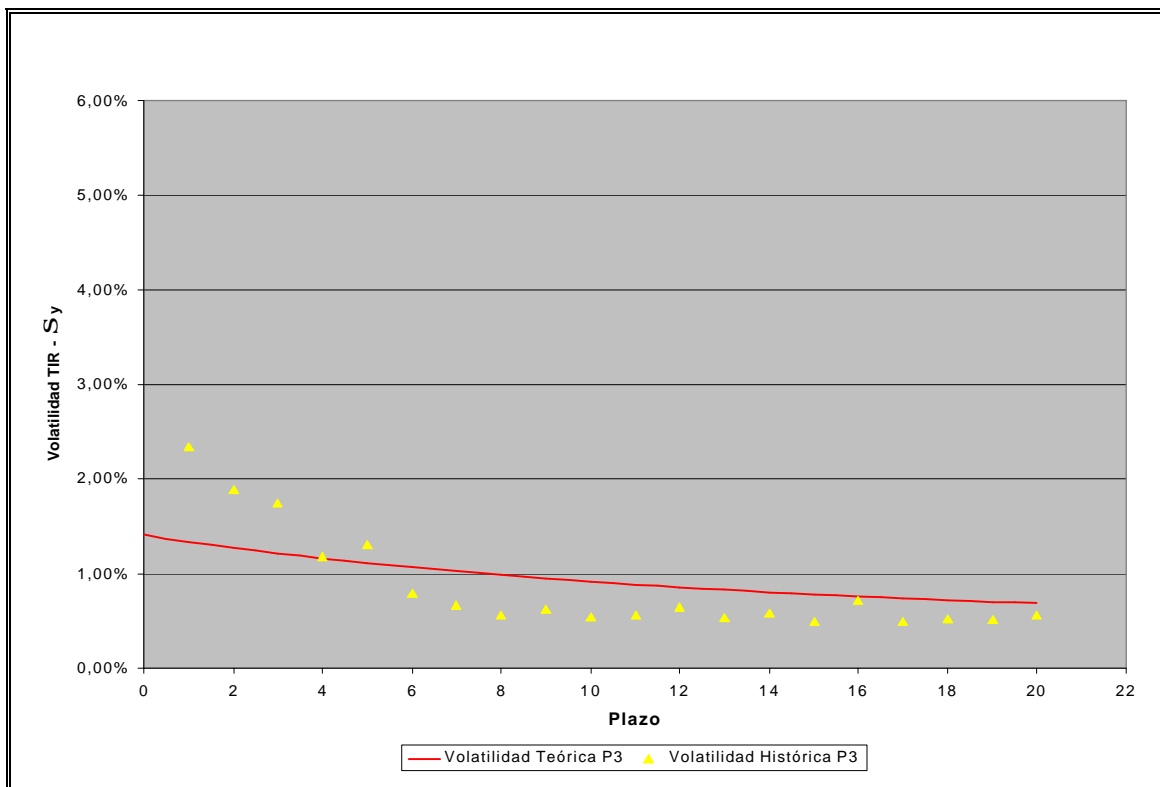


Figura 6-5: Volatilidad de los cambios en la TIR de los PRC histórica y del modelo de Vasicek para el panel P3.

6.4.3 Estimación con panel de datos filtrados

Debido a que las volatilidades de los PRC de largo plazo históricas son menores que las implícitas por el modelo se analiza cómo afecta la falta de transacciones de determinados plazos la estimación. Para esto se construye una submuestra que contenga transacciones para los distintos plazos de la curva. Se consideran para esta estimación días con transacciones en los plazos entre 0 y 5 años, 5 y 10 años, 10 y 15 años y 15 y 20 años. La submuestra corresponde a un 48% de los días totales del panel P1 y un 43% del panel P2 y un 54% del panel P3. Los nuevos paneles filtrados se denominarán P1F, P2F y P3F.

La siguiente tabla resume los resultados considerando el paneles de datos con transacciones en los intervalos señalados:

Tabla VI-3: Parámetros del modelo de Vasicek estimados utilizando submuestra con paneles de datos filtrados.

Panel	Periodo	a	\hat{m}	s
P1F	Enero 1997 - Diciembre 2001	0,3124	6,3595%	1,8343%
P2F	Enero 1997 – Junio 1999	0,3656	6,3294%	2,4712%
P3F	Julio 1999 - Diciembre 2001	0,1570	6,8407%	1,0221%

Comparando los parámetros resultantes de la estimación anterior presentados en la tabla VI-1 se puede ver que tanto los parámetros de volatilidad de la tasa instantánea, reversión a la media y tasas de largo plazo toman valores distintos. El parámetro crítico es la volatilidad de la tasa instantánea el cual determinará la estructura de volatilidades teóricas de los bonos PRC y según las nuevas estimaciones presenta una disminución considerable en los tres paneles filtrados.

Los errores de estimación para los paneles filtrados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla VI-4: Indicadores de error estimación modelo de Vasicek con paneles de datos filtrados P1F, P2F y P3F.

MAE: Error absoluto promedio, RMSE: Raíz del error cuadrático medio

	Error TIR Promedio	Error Precio Promedio	MAE TIR	MAE Precio	RMSE TIR	RMSE Precio
P1F	0,001%	-0,008%	0,113%	0,330%	0,199%	0,451%
P2F	-0,009%	0,012%	0,132%	0,402%	0,212%	0,537%
P3F	0,008%	-0,034%	0,090%	0,296%	0,138%	0,390%

Los errores de la estimación para los tres paneles filtrados se mantienen estables, existiendo una disminución de los errores absolutos y RMSE en el panel P1F y P2F, pero aumentando en el panel P3F al ser comparados con la tabla VI-2.

La figura 6-6 muestra las volatilidades históricas del panel P1F comparadas con las volatilidades teóricas del modelo con los parámetros estimados para este panel. Se puede observar que éstas se ajustan bien para los bonos de largo plazo. En el corto plazo las volatilidades históricas se presentan sobre las teóricas.

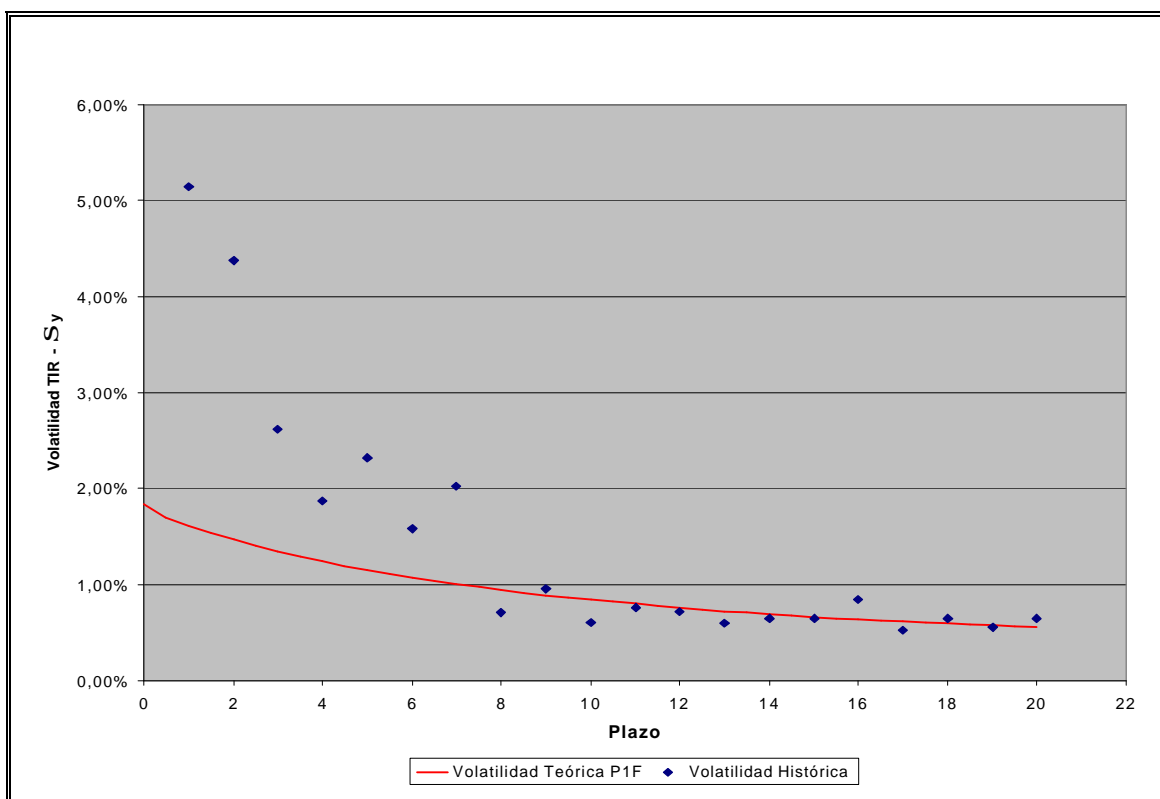


Figura 6-6: Volatilidad de los cambios en la TIR de los PRC histórica y del modelo de Vasicek para el panel P1F con panel de datos completos.

En el caso del panel P3F presentado en la figura 6-7 también existe un mejor ajuste de las volatilidades para los bonos de largo plazo. Además se mejora el ajuste de las volatilidades de los PRC con vencimientos de 6 y 7 años

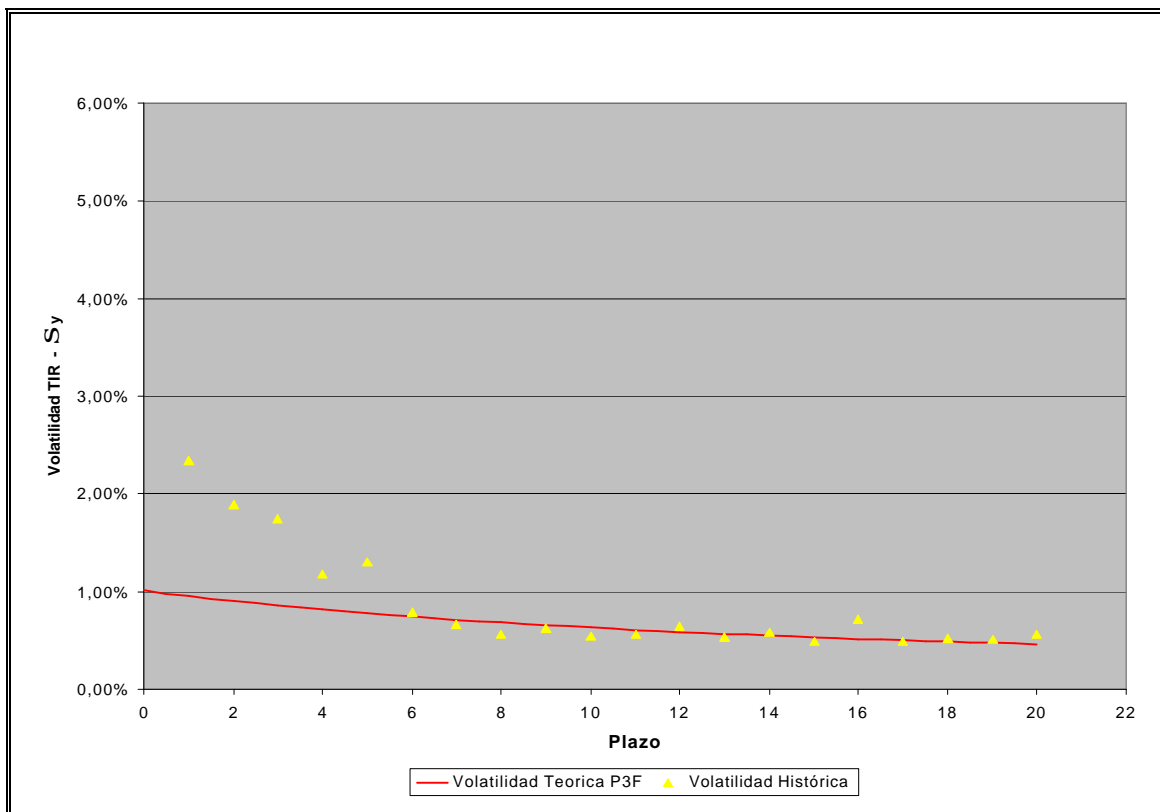


Figura 6-7: Volatilidad de los cambios en la TIR de los PRC histórica y del modelo de Vasicek para el panel P3F con panel de datos completos.

Del análisis anterior se concluye que al utilizar un panel de datos con transacciones en todos los plazos de la estructura de tasas de interés se estima mejor la volatilidad de los bonos de largo plazo, los que son más líquidos.

6.4.4 Serie de la variable implícita estimada

La variable de estado estimada para cada día corresponde a la serie de la tasa instantánea, la cual no es observable en el mercado. Por construcción la volatilidad de los cambios en esta tasa calza con el parámetro de volatilidad del modelo.

En la figura 6-8 se gráfica la serie de la tasa instantánea estimada para el panel de datos total y filtrado junto con la tasa de política monetaria del Banco Central en términos reales.

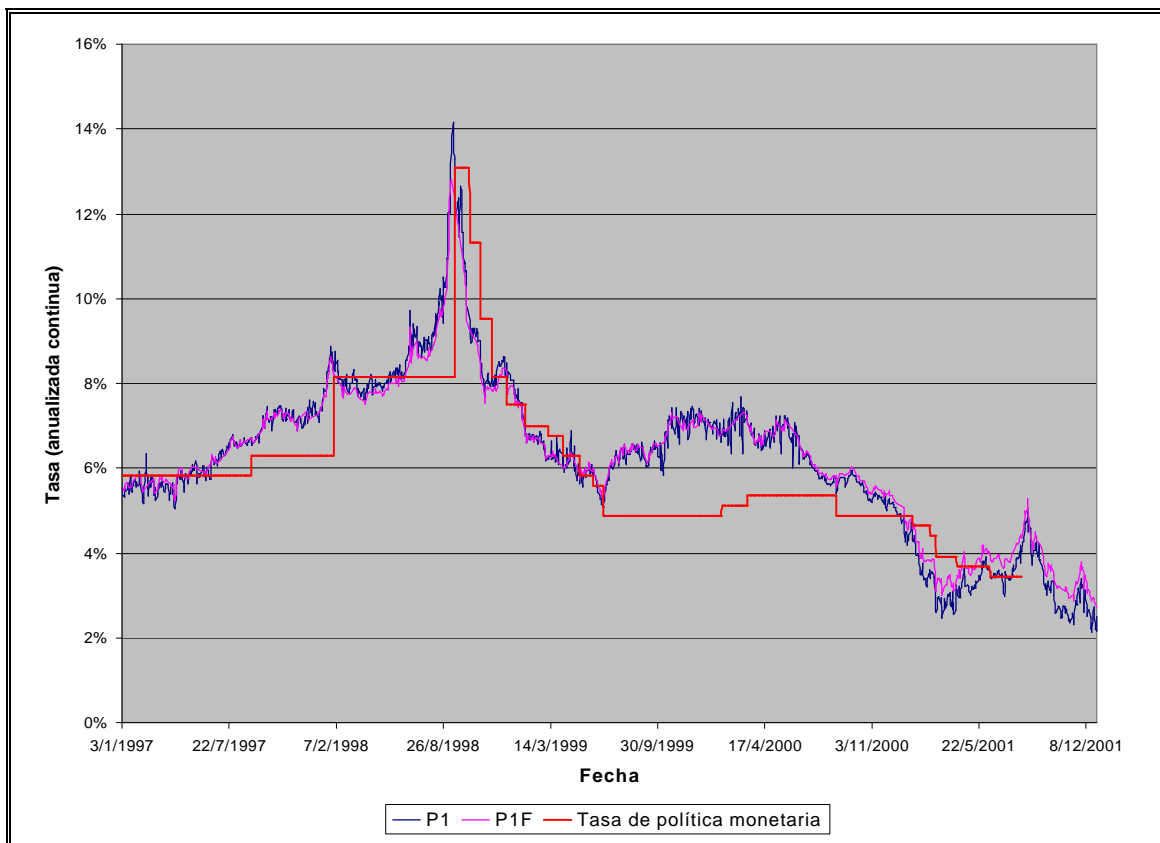


Figura 6-8: Serie de la tasa instantánea obtenida con panel de datos filtrado (P1F) y total (P1) y la tasa de política monetaria del Banco Central de Chile.

Aunque la tasa instantánea implícita en el modelo es obtenida de los datos de bonos de largo plazo se puede observar que ésta sigue la tasa de política monetaria establecida por el Banco Central. La correlación entre ambas tasas es de 0,81 lo que confirma que las tasas de los PRC se mueven de acuerdo a la tasa del BC.

Otro punto que se puede observar es la capacidad de la tasa instantánea estimada de anticipar los movimientos en la tasa de política monetaria del BC. Los

bonos PRC de largo plazo parecen anticipar los cambios de la tasa de la autoridad monetaria del país.

En resumen, de los resultados de este capítulo se pueden concluir los siguientes puntos:

- Los resultados de la estimación del modelo de Vasicek confirman la capacidad de un cierto grado de ajuste a los datos de mercado y a la estructura de volatilidades histórica.
- Los errores absolutos promedio de estimación son hasta 4 veces mayores que los errores de los métodos estáticos.
- Tanto la estimación realizada con el panel de datos original como con el panel de datos filtrado entregaron errores de estimación similares en TIR y en precio, pero se muestra que la segunda estimación logra captar mejor la estructura de volatilidades de los PRC de largo plazo.
- La consistencia de ambas estimaciones se refleja en la serie de la variable de estado resultante la cual es consistente con los movimientos relativos de la tasa de política monetaria del Banco Central.

VII CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FUTURAS

En esta tesis se estudiaron las tasas de interés reales en Chile bajo la perspectiva de la teoría financiera moderna, comprobando la validez de modelos de estimación estáticos como dinámicos en un mercado con liquidez limitada como el mercado de renta fija real chileno.

El mercado de mediano y largo plazo de renta fija en Chile tiene características específicas que deben ser tomadas en cuenta al momento de utilizar modelos tanto estáticos como dinámicos. El capítulo II permitió confirmar que los bonos PRC presentan niveles de liquidez, homogeneidad e información suficientes para ser utilizados en este trabajo. Pero la información que contienen estos instrumentos no se puede obtener sin utilizar métodos de análisis sofisticados, ya que cada PRC refleja la información promedio de las tasas de interés hasta su vencimiento.

También se debe considerar que existe información en otros instrumentos de renta fija sobre la estructura de tasas de interés, pero es necesario un análisis de las diferencias que existen entre ellos como liquidez, riesgo crediticio y premios específicos para ser incorporados a estudios de este tipo.

El primer enfoque de este trabajo consistió en estimar la estructura de tasas cero cupón mediante tres métodos estudiados empíricamente en la literatura para distintos mercados y utilizados por bancos centrales de países desarrollados. La información entregada por la estructura de tasas cero cupón tiene aplicaciones importantes en la práctica financiera, que van desde valorización de activos, estimación de tasas forward y como herramienta para inferir posibles oportunidades de arbitraje.

Los métodos de Nelson y Siegel, de Svensson y de splines demostraron diferencias tanto en ajuste como en estabilidad. En términos de ajuste a las TIR de los datos de mercado los errores promedio absoluto de estimación son cercanos a los 3 puntos base en los tres métodos, siendo superior el ajuste del método de splines sobre los métodos paramétricos. Esto se puede explicar por la mayor cantidad de grados de libertad del método de splines que cuenta con 9 parámetros en contraste con los 6 del método de Svensson y los 4 del método de Nelson y Siegel.

Las mayores diferencias se observaron en la estabilidad de los métodos medidos por el error fuera de muestra. Los métodos paramétricos demostraron ser más estables que el método de splines debido a que su forma funcional toma en cuenta un ajuste global a los datos mientras que el método de splines realiza un ajuste local. Este efecto es mayor si se considera un mercado con liquidez limitada dónde no todos los días se observan transacciones de todos los plazos.

Se recomienda como la mejor alternativa para estimar la estructura de tasas cero cupón en Chile el método de Svensson debido a su estabilidad sobre el método de splines y su mayor grado de ajuste a los datos comparado con el método de Nelson y Siegel.

El segundo enfoque propuesto es la estimación de un modelo dinámico de un factor de riesgo que permite extraer la información histórica de la estructura de tasas de interés de manera de tener parámetros para la evolución futura de ésta. La información contenida en los parámetros estimados del modelo permiten generar distribuciones a futuro para la valorización de instrumentos complejos como opciones y realizar gestión del riesgo. Se empleó el modelo de Vasicek el cual es el primer modelo general de un factor de riesgo que incorpora una especificación que concuerda con la evidencia empírica internacional de la evolución de las tasas de interés.

Al comparar los resultados de ajuste a los precios entre los modelos estáticos y el modelo de Vasicek se observó que los primeros ajustan hasta 4 veces mejor en TIR que éste último. Esto se debe a que el modelo dinámico se estima de forma global tomando en cuenta todo el periodo de datos mientras que los modelos estáticos se estiman para cada día por separado.

De los resultados de esta tesis se puede concluir que el modelo de Vasicek tiene mayores dificultades en replicar la estructura de volatilidades observada en el mercado. Si se desea ajustar las volatilidades de mediano y largo plazo puede ser conveniente calibrar el modelo usando información correspondiente a días en que se transan instrumentos de todos los rangos de plazos.

En cuanto a desarrollos futuros que se pueden realizar una alternativa para obtener un mejor ajuste en los precios es utilizar un modelo que en su especificación considere parámetros que se estiman para cada día de manera de ajustar perfectamente la estructura de tasas interés observada como en Hull y White (1990). El problema de este tipo de modelos es que no se puede calibrar de datos históricos ya que queda sobreparametrizado. Los parámetros de volatilidad y reversión a la media estimados para el modelo de Vasicek en este trabajo podrían ser utilizados en la implementación de estos modelos.

Otro enfoque para mejorar el ajuste a los precios y a la estructura de volatilidades es utilizar un modelo que incorpore un mayor número de factores de riesgo. El costo que se debe incurrir es la pérdida de la capacidad analítica para calcular precios de bonos e instrumentos complejos como opciones teniendo que recurrir a técnicas numéricas.

La decisión si se debe utilizar un modelo estático o dinámico dependerá de la información que se requiera y el uso que se le esté dando. Por ejemplo si se necesita una estructura cero cupón para estructurar algún contrato forward es mejor un método estático que lo valorará correctamente. Por otro lado, si se necesita estimar la distribución que tendrá la TIR de un PRC en 1 año más y que sea consistente con la evolución pasada de las tasas reales se deberá usar un modelo dinámico. Cada enfoque tiene sus capacidades y limitaciones; la curva cero cupón estática no podrá valorizar una opción, y valorizar un bono con una dinámica de un factor de riesgo podría generar errores mayores que los aceptables.

Se recomienda encaminar los esfuerzos de investigación futura hacia la incorporación de la dinámica en la estática de las tasas de interés. En mercados en que a veces no se encuentran cierto precios, un proceso dinámico que pudiera inferir el precio faltante con los otros precios observados será de gran utilidad para tener estimaciones más precisas y menos volátiles de la curva cero cupón. Procesos basados en estimación bayesiana como filtro de Kalman pueden ser útiles para paneles de datos que no tienen observaciones en todo el rango de plazos.

Otro camino de investigación que se abre con esta tesis es el estudio de premios por liquidez en el mercado chileno. De los sesgos por plazos en la estimación

de la estructura de tasas cero cupón se parece concluir que existen premios por liquidez. Los PRC más líquidos se valorizaron en promedio a una TIR más alta que la estimada por el modelo mientras que los PRC menos líquidos se valorizaron en promedio con una TIR más baja. Analizar estos premios presenta un desafío que permitirá mejorar la estimación de la estructura de tasas de interés en Chile.

La extensión de los modelos estáticos y dinámicos a otros instrumentos con riesgo crediticio por sobre los bonos del Banco Central es directa. Sólo basta con conocer el spread crediticio del emisor por plazo para obtener una curva cero cupón que refleje el costo de crédito para éste. El análisis de la dinámica del riesgo de crédito del emisor requiere de información que no siempre está disponible directamente en los mercados, pero que también puede ser obtenida de los instrumentos. El riesgo de crédito es un área que se ha estado explorando recientemente en la literatura y también puede ser una alternativa de estudio.

La conclusión final de este trabajo es que en Chile existe información de la estructura y dinámica de tasas de interés implícita en los mercados financieros. La información está en los instrumentos y la literatura presenta soluciones teóricas para extraerla. Es en la aplicación directa a algún mercado en particular y las metodologías de estimación en que está el desafío, especialmente cuando no se tiene un mercado completo. Si se logra inferir la información siempre habrá espacio para la creación de nuevos instrumentos y el uso de nuevos modelos.

BIBLIOGRAFIA

- AÏT-SAHALIA, Y. (1996a) Nonparametric pricing of interest rate derivative securities. *Econometrica*, Vol. 64, N° 3, 527-560.
- AÏT-SAHALIA, Y. (1996b) Testing continuous-time models of the spot interest rate. *Review of Financial Studies*, Vol. 9, N° 2, 385-426.
- ANDERSON, N. y SLEATH, J. (2001), New estimates of the UK real and nominal yield curves, *Working Paper*, Bank of England.
- BALL, C.A. y TOROUS, W.N. (1996) Unit roots and the estimation of interest rate dynamics. *Journal of Empirical Finance*, Vol. 3, 215-238.
- BAXTER, M. y RENNIE, A. (1996) *Financial calculus : An introduction to derivative pricing*, Cambridge University Press, Cambridge ; New York, NY.
- BLACK, F., DERMAN, E. y TOY, W. (1990) A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, Vol. 46, N° 1, 33-39.
- BLACK, F. y KARASINSKI, P. (1991) Bond and option pricing when short rates are lognormal. *Financial Analyst Journal*, Vol. 47, N° 4, 52-59.
- BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, N° 3, 637-659.
- BLISS, R.R. (1996) Testing term structure estimation methods. *Advances in Futures and Options Research*, Vol. 9, 197-231.
- BOLDER, D. y STRÉLISKI, D. (1999), Yield curve modelling at the bank of Canada, *Working Paper*, Bank of Canada.
- BRENNAN, M.J. y SCHWARTZ, E.S. (1979) A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 3, N° 2, 133-155.

- CHAN, K.C., KAROLYI, A.G., LONGSTAFF, F.A. y SANDERS, A.B. (1992) An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*, Vol. 47, N° 3, 1209-1227.
- CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E.S. (1994) The valuation of commodity-contingent claims. *The Journal of Derivatives*, Vol. 1, 27-35.
- CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E.S. (2002), Implementing a stochastic model for oil futures prices, *Working Paper*, FONDEF DI102400 2002-1.
- COX, J.C., INGERSOLL, J.E., JR. y ROSS, S.A. (1985) A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, Vol. 53, N° 2, 385-407.
- DE BOOR, C. (1978) *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, New York.
- DUFFIE, D. y KAN, R. (1993) A yield factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, Vol. 6, 379-406.
- FERGUSON, R. y RAYMAR, S. (1998) A comparative analysis of several popular term structure estimation models. *Journal of Fixed Income*, Vol. 8, N° 1, 17-33.
- FERNÁNDEZ, V. (1999) Estructura de tasas de interés en Chile: La vía no-paramétrica. *Cuadernos de Economía*, Vol. 36, N° 109, 1005-1034.
- FISHER, M., NYCHKA, D. y ZERVOS, D. (1994), Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines, *Working Paper*, Federal Reserve Board of Governors.
- GIBBONS, M.R. y RAMASWAMY, K. (1993) A test of the Cox, Ingersoll, and Ross model of the term structure. *Review of Financial Studies*, Vol. 6, N° 3, 619-658.
- GIBSON, R., LHABITANT, F.-S. y TALAY, D. (2001), Modeling the term structure of interest rates: A review of the literature, *Working Paper*, RiskLab project.

- GOLDSTEIN, R. (2000) The term structure of interest rates as a random field. *Review of Financial Studies*, Vol. 13, N° 2, 365-384.
- HEATH, D., JARROW, R. y MORTON, A. (1992) Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, Vol. 60, N° 4, 77-105.
- HERRERA, L.O. y MAGENDZO, I. (1997), Expectativas financieras y la curva de tasas forward de Chile, *Working Paper*, Banco Central de Chile.
- HO, T.S.Y. y LEE, S.-B. (1986) Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance*, Vol. 41, N° 5, 1011-1028.
- HULL, J. (1999) *Options, futures & other derivatives*. 4th edn, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- HULL, J. y WHITE, A. (1990) Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, Vol. 3, N° 4, 573-592.
- HULL, J. y WHITE, A. (1994) Numerical procedures for implementing term structure models II: Two-factor models. *Journal of Derivatives*, Vol. 2, N° 2, 37-48.
- JAMES, J. y WEBBER, N. (2000) *Interest rate modelling*, John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, England ; New York.
- JIANG, G.J. (1998) Nonparametric modeling of U.S. Interest rate term structure dynamics and implications on the prices of derivative securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 33, N° 4, 465-497.
- KENNEDY, D.P. (1994) The term structure of interest rates as a gaussian random field. *Mathematical Finance*, Vol. 4, N° 3, 247-258.
- LEFORT, F. y WALKER, E. (2000) Caracterización de la estructura de tasas de interés reales en Chile. *Economía Chilena*, Vol. 3, N° 2, 31-52.

- LONGSTAFF, F.A., SANTA-CLARA, P. y SCHWARTZ, E.S. (1999), Throwing away a billion dollars: The cost of suboptimal exercise strategies in the swaptions market", *Working Paper*, Anderson School of Manegement UCLA.
- LONGSTAFF, F.A. y SCHWARTZ, E.S. (1992) Interest rate volatility and the term structure: A two factor general equilibrium model. *Journal of Finance*, Vol. 47, N° 4, 1259-1282.
- LUND, J. (1997), Non-linear kalman filtering techniques for term-structure models, *Working Paper*, The Aahrus School of Business.
- MCCULLOCH, H.J. (1971) Measuring the term structure of interest rates. *Journal of Business*, Vol. 44, N° 1, 19-31.
- MCCULLOCH, H.J. (1975) The tax-adjusted yield curve. *Journal of Finance*, Vol. 30, N° 3, 811-830.
- MERTON, R.C. (1973) Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, N° 1, 141-183.
- NELSON, C.R. y SIEGEL, A.F. (1987) Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, Vol. 60, N° 4, 473-489.
- PARISI, F. (1998) Tasas de interés nominal de corto plazo en Chile: Una comparación empírica de sus modelos. *Cuadernos de Economía*, Vol. 35, N° 105, 161-182.
- PARISI, F. (1999) Predicción de tasas de interés nominal de corto plazo en Chile: Modelos complejos versus modelos ingenuos. *Economía Chilena*, Vol. 2, N° 3, 27-40.
- PENNACCHI, G.G. (1991) Identifying the dynamics of real interest rates and inflation: Evidence using survey data. *Review of Financial Studies*, Vol. 4, N° 1, 53-86.

- PÉREZ, I. 1999, *Estructura intertemporal de tasas de interés en Chile*, Tesis para optar al título de Ingeniero Civil Industrial, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- PRITSKER, M. (1998) Nonparametric density estimation and tests of continuous time interest rate models. *Review of Financial Studies*, Vol. 11, N° 3, 449-487.
- REYES, A. 2000, *Utilización de la información de los mercados de futuros y de opciones para la modelación estocástica de los precios de los commodities : El caso del petróleo*, Mag. en Cs. de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- RIERA, F. 1999, *Modelación estocástica de los futuros de commodities : Estimaciones para el cobre y el petróleo*, Mag. en Cs. de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- SANTA-CLARA, P. y SORNETTE, D. (2001) The dynamics of the forward interest rate curve with stochastic string shocks. *Review of Financial Studies*, Vol. 14, N° 1, 149-185.
- SCHAEFER, S.M. y SCHWARTZ, E.S. (1984) A two factor model of the term structure: An approximate analytical solution. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 19, N° 4, 413-424.
- STANTON, R. (1997) A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk. *Journal of Finance*, Vol. 52, N° 5, 1973-2001.
- SVENSSON, L.E.O. (1994), Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994, *Working Paper*, National Bureau of Economic Research.
- VASICEK, O.A. (1977) An equilibrium characterisation of the term structure. *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, N° 2, 177-188.

- VASICEK, O.A. y FONG, G.H. (1982) Term structure modeling using exponential splines. *Journal of Finance*, Vol. 37, N° 2, 339-348.
- WAGGONER, D.F. (1997), Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices, *Working Paper*, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- ZUÑIGA, S. (1999a) Modelos de tasas de interés en Chile: Una revisión. *Cuadernos de Economía*, Vol. 36, N° 108, 875-893.
- ZUÑIGA, S. (1999b) Estimando un modelo de 2 factores del tipo "exponential-affine" para la tasa de interés chilena. *Revista de Análisis Económico*, Vol. 14, N° 2, 117-133.

ANEXOS

ANEXO A: HISTORIA DE EMISIONES DE INSTRUMENTOS REALES DEL BANCO CENTRAL DE CHILE

Tabla A-1: Historia de emisiones de instrumentos reales del Banco
Central de Chile

Instrumento	Plazo	Desde	Hasta
PRBC	90 días ¹	Mayo 1995	Octubre 2001
	180 días ²	-	Julio 1990
	360 días	- Agosto 2001	Marzo 1993 A la fecha
PRC	4 años	Enero 1992	Enero 1994
	6 años	Abril 1992	Febrero 1993
	8 años	Abril 1992	A la fecha
	10 años	Abril 1992	Julio 2001
	12 años	Febrero 1993	Julio 2001
	14 años	Febrero 1993	Julio 2001
	20 años	Febrero 1993	A la fecha

¹ Anteriormente emitidos por ventanilla.

² Sólo por ventanilla hasta Julio de 1990.

ANEXO B: EJEMPLO DE EFECTOS DE PAGO SOBRE UN BONO DE DESCUENTO

Consideremos que se hace una transacción de un Pagaré Reajutable del Banco Central (PRBC) con vencimiento en n días en que el siguiente día hábil está a h_1 días. El PRBC se transa a una tasa de mercado T_m y la tasa interbancaria en términos reales al día de la transacción es T_{i1} (todas las tasas son lineales con base 360 según convención de mercado).

El valor a pagar por el bono según el mercado será:

$$P_{PRBC} = \frac{M}{\left(1 + n \cdot \frac{T_m}{360}\right)} \quad (\text{B.1})$$

Como el pago se hace con un vale vista los fondos estarán disponibles al día hábil siguiente, pudiéndose hacer rentar estos a la tasa interbancaria por h_1 días. La tasa efectiva T_e se obtendrá de la siguiente relación la cual expresa la rentabilidad real del bono con respecto a su “rentabilidad de mercado”:

$$\left(1 + n \frac{T_e}{360}\right) = \left(1 + n \frac{T_m}{360}\right) \left(1 + h_1 \frac{T_{i1}}{360}\right) \quad (\text{B.2})$$

La rentabilidad resultante será por lo tanto mayor que la reflejada en la tasa de mercado T_m .

Supongamos que además el pago del principal se hace por medio de un vale vista. En este caso el principal será pagado h_2 días después del vencimiento y la tasa interbancaria puede ser distinta. Análogamente a la rentabilidad estará dada por:

$$\left(1 + n \frac{T_e}{360}\right) = \frac{\left(1 + n \frac{T_m}{360}\right) \left(1 + h_1 \frac{T_{i1}}{360}\right)}{\left(1 + h_2 \frac{T_{i2}}{360}\right)} \quad (\text{B.3})$$

En este caso la rentabilidad disminuye debido al retraso en el pago del principal.

ANEXO C: EJEMPLO DE TABLA DE DESARROLLO DE UN PRC

En el siguiente anexo se ilustra numéricamente el cálculo de la tabla de desarrollo de un PRC considerando un bono PRC específico. También se realiza una valorización de acuerdo a las convenciones del mercado secundario.

El nemotécnico considerado es PRC-4D0101, el cual representa un bono a 8 años plazo emitido el 1 de enero del 2001 con un corte de 10.000 UF.

Utilizando la metodología de cálculo presentada en la sección 2.6 se calcula la tabla de desarrollo presentada en la tabla C-2. A modo de ejemplo se calcula los flujos de caja para el primer cupón, cálculo que se extiende análogamente para el resto de los cupones. También se calculan los flujos para el último cupón los cuales se calculan de forma distinta.

La tasa de emisión semestral equivalente es igual a:

$$\begin{aligned} r_s &= (1 + r_a)^{0.5} - 1 \\ &= 3,1988\% \end{aligned} \quad (C.1)$$

Utilizando la tasa anterior y considerando que el bono tiene 16 cupones y un valor cara de 10.000 UF los cupones 1 al 15 serán iguales a:

$$\begin{aligned} C &= \frac{M \cdot r_s}{\left(1 - \frac{1}{(1 + r_s)^N}\right)} \\ &= \frac{10.000 \cdot 3,1988\%}{\left(1 - \frac{1}{(1 + 3,1988\%)^{16}}\right)} = 808,26 \end{aligned} \quad (C.2)$$

Los intereses se pagan sobre el capital insoluto anterior (10.000 UF) considerando los días efectivos entre el 1 de Enero del 2001 y el 1 de Julio del 2001.

$$\begin{aligned} I_1 &= K_0 \cdot (1 + r_a)^{d/360} - K_0 \\ &= 10.000 \cdot (1 + 6,5\%)^{181/360} - 10.000 = 321,69 \end{aligned} \quad (C.3)$$

La amortización será el remanente entre el cupón y los intereses pagados:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 - I_1 \\ &= 808,26 - 321,69 = 486,57 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

El nuevo saldo será el anterior menos la amortización para la actual fecha de pago de cupón.

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 - A_1 \\ &= 10.000 - 486,59 = 9.513,43 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Tabla C-2: Tabla de desarrollo BC para bono PRC-4D0101

	Fecha Pago	Cupón	Intereses	Amortización	Capital Insoluto
	1-1-2001				10.000,00
1	1-7-2001	808,26	321,69	486,57	9.513,43
2	1-1-2002	808,26	311,19	497,07	9.016,36
3	1-7-2002	808,26	290,05	518,21	8.498,15
4	1-1-2003	808,26	277,98	530,28	7.967,87
5	1-7-2003	808,26	256,32	551,94	7.415,93
6	1-1-2004	808,26	242,58	565,68	6.850,25
7	1-7-2004	808,26	221,60	586,66	6.263,59
8	1-1-2005	808,26	204,89	603,37	5.660,22
9	1-7-2005	808,26	182,08	626,18	5.034,04
10	1-1-2006	808,26	164,67	643,59	4.390,45
11	1-7-2006	808,26	141,24	667,02	3.723,43
12	1-1-2007	808,26	121,80	686,46	3.036,97
13	1-7-2007	808,26	97,70	710,56	2.326,41
14	1-1-2008	808,26	76,10	732,16	1.594,25
15	1-7-2008	808,26	51,57	756,69	837,56
16	1-1-2009	864,96	27,40	837,56	0,00

En la última fecha de pago de cupón la amortización será igual al capital insoluto anterior:

$$A_{16} = 837,56 \quad (\text{C.6})$$

Finalmente el último cupón se calcula de la suma de los intereses y la última amortización:

$$\begin{aligned} C_{16} &= A_{16} + I_{16} \\ &= 837,56 + 27,40 = 864,96 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

En el mercado secundario los valores de la tabla de desarrollo anterior son estandarizados por cada 100 UF. En este caso particular los valores se dividen por 100.

Tabla C-3: Tabla de desarrollo BCS para bono PRC-4D0101

	Fecha Cupón	Cupón	Intereses	Amortizacion	Capital Insoluto
	1-1-2001				100,0000
1	1-7-2001	8,0826	3,2169	4,8657	95,1343
2	1-1-2002	8,0826	3,1119	4,9707	90,1636
3	1-7-2002	8,0826	2,9005	5,1821	84,9815
4	1-1-2003	8,0826	2,7798	5,3028	79,6787
5	1-7-2003	8,0826	2,5632	5,5194	74,1593
6	1-1-2004	8,0826	2,4258	5,6568	68,5025
7	1-7-2004	8,0826	2,2160	5,8666	62,6359
8	1-1-2005	8,0826	2,0489	6,0337	56,6022
9	1-7-2005	8,0826	1,8208	6,2618	50,3404
10	1-1-2006	8,0826	1,6467	6,4359	43,9045
11	1-7-2006	8,0826	1,4124	6,6702	37,2343
12	1-1-2007	8,0826	1,2180	6,8646	30,3697
13	1-7-2007	8,0826	0,9770	7,1056	23,2641
14	1-1-2008	8,0826	0,7610	7,3216	15,9425
15	1-7-2008	8,0826	0,5157	7,5669	8,3756
16	1-1-2009	8,6496	0,2740	8,3756	0,0000

Se suponen las siguiente condiciones de mercado para la valorización de este instrumento:

Fecha de valorización: 15-09-2001

TIR: 5,10%

UF del día: \$16.030,97

El valor presente en UF se obtiene de los flujos de los cupones que quedan por pagar:

$$VP = \sum_{i=2}^{16} \frac{C_i}{(1+TIR)^{d_i/365}} = 101,3528 \quad (C.8)$$

La tasa efectiva de retorno anual en base 365 es:

$$\begin{aligned} TERA &= (1+r_a)^{365/360} - 1 \\ &= (1+6,5\%)^{365/360} - 1 = 6,5932\% \end{aligned} \quad (C.9)$$

Con esta tasa se obtiene el valor par del PRC que corresponde a:

$$\begin{aligned} ValorPar &= K_1 \cdot (1+TERA)^{d/365} \\ &= 95,1343 \cdot (1+6,5\%)^{76/365} = 96,4075 \end{aligned} \quad (C.10)$$

El precio como porcentaje de su valor par será:

$$\begin{aligned} P_{\%} &= \frac{VP}{ValorPar} \\ &= \frac{101,3528}{96,4075} = 105,13\% \end{aligned} \quad (C.11)$$

El monto en pesos pagado finalmente en la bolsa de comercio será el precio aproximado a 2 decimales por su valor par por el monto en UF transado y por la UF del día.

$$\begin{aligned} Monto_{\$} &= P_{\%} \cdot ValorPar / 100 \cdot M \cdot UF \\ &= 105,13\% \cdot 96,4075 / 100 \cdot 10.000 \cdot 16.030,97 \\ &= \$162.479.063 \end{aligned} \quad (C.12)$$

ANEXO D: DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS

En el siguiente anexo se presentan las estadísticas descriptivas para los datos de los PRC transados en la Bolsa de Comercio de Santiago en el periodo comprendido entre enero de 1997 y diciembre del 2001. En el mercado chileno existen bonos PRC con vencimiento todos los meses los que se agrupan en la siguiente tabla en función de su vencimiento promedio.

Tabla D-1: Estadísticas de datos de PRC para el periodo 1997-2001

PRC	Vencimiento Promedio (Años)	TIR Promedio	Desviación Estándar TIR	Precio Promedio	Desviación Estándar Precio
PRC-1	0,85	6,44%	1,97%	99,89	1,17
PRC-2	2,00	6,46%	1,57%	100,15	1,58
PRC-3	3,03	6,32%	1,29%	100,45	1,91
PRC-4	4,06	6,30%	1,28%	100,63	2,48
PRC-5	5,02	6,53%	1,23%	100,21	2,82
PRC-6	6,05	6,54%	0,96%	100,22	2,64
PRC-7	7,18	6,44%	1,04%	100,62	3,37
PRC-8	7,95	6,32%	0,94%	101,07	3,42
PRC-9	9,04	6,46%	0,90%	100,65	3,60
PRC-10	9,95	6,50%	0,72%	100,48	3,10
PRC-11	11,07	6,44%	0,82%	100,85	3,94
PRC-12	11,94	6,38%	0,74%	101,18	3,84
PRC-13	13,09	6,35%	0,74%	101,48	4,16
PRC-14	13,99	6,30%	0,66%	101,87	3,92
PRC-15	15,09	6,23%	0,79%	102,46	4,92
PRC-16	16,04	6,28%	0,70%	102,21	4,63
PRC-17	16,99	6,31%	0,66%	102,11	4,61
PRC-18	18,08	6,48%	0,61%	100,93	4,39
PRC-19	19,17	6,39%	0,69%	101,73	5,31
PRC-20	19,84	6,34%	0,74%	102,18	5,78

Las siguientes tablas resumen los promedios y desviaciones estándar de las TIR y de los precios de los PRC por cada año de la muestra.

Tabla D-2: TIR de PRC promedio por año

	1997	1998	1999	2000	2001
PRC-1	6,72%	9,32%	6,31%	5,65%	4,14%
PRC-2	6,66%	8,84%	6,42%	6,03%	4,45%
PRC-3	6,58%	8,39%	6,50%	6,16%	4,66%
PRC-4	6,53%	8,28%	6,57%	6,24%	4,72%
PRC-5	6,54%	8,16%	6,62%	6,26%	4,80%
PRC-6	6,58%	7,82%	6,58%	6,33%	5,04%
PRC-7	6,55%	7,67%	6,57%	6,32%	5,13%
PRC-8	6,53%	7,53%	6,55%	6,41%	5,14%
PRC-9	6,57%	7,53%	6,54%	6,37%	5,24%
PRC-10	6,53%	7,47%	6,54%	6,43%	5,33%
PRC-11	6,48%	7,56%	6,57%	6,41%	5,41%
PRC-12	6,53%	7,40%	6,54%	6,40%	5,41%
PRC-13	6,61%	7,46%	6,54%	6,41%	5,45%
PRC-14	6,44%	7,31%	6,52%	6,42%	5,50%
PRC-15	6,74%	7,45%	6,52%	6,39%	5,50%
PRC-16	6,50%	7,45%	6,49%	6,42%	5,54%
PRC-17	6,64%	7,41%	6,54%	6,46%	5,57%
PRC-18	6,60%	7,25%	6,53%	6,57%	5,54%
PRC-19	6,40%	7,19%	6,48%	6,47%	5,60%
PRC-20	6,35%	7,20%	6,43%	6,40%	5,58%

Tabla D-3: Precio de PRC promedio por año

	1997	1998	1999	2000	2001
PRC-1	99,28	98,33	100,09	100,35	101,22
PRC-2	99,74	97,87	100,17	100,53	102,27
PRC-3	100,02	97,48	100,14	100,62	103,00
PRC-4	100,12	96,90	100,05	100,71	103,77
PRC-5	100,13	96,50	99,96	100,76	104,36
PRC-6	100,04	96,74	100,05	100,72	104,47
PRC-7	100,14	96,71	100,08	100,89	104,99
PRC-8	100,23	96,83	100,15	100,67	105,44
PRC-9	100,10	96,46	100,21	100,89	105,62
PRC-10	100,28	96,41	100,24	100,74	105,68
PRC-11	100,52	95,67	100,10	100,85	105,95
PRC-12	100,34	96,10	100,31	101,00	106,24
PRC-13	99,96	95,50	100,32	101,03	106,65
PRC-14	100,89	96,08	100,45	101,01	106,67
PRC-15	99,09	95,10	100,44	101,27	107,10
PRC-16	100,67	94,79	100,67	101,17	107,21
PRC-17	99,70	94,87	100,35	100,93	107,33
PRC-18	100,00	95,66	100,45	100,19	107,98
PRC-19	101,52	95,76	100,86	100,95	107,82
PRC-20	101,95	95,64	101,31	101,52	108,20

Tabla D-4: Desviación estándar de las TIR de PRC por año

	1997	1998	1999	2000	2001
PRC-1	0,26%	1,92%	0,77%	0,60%	0,74%
PRC-2	0,15%	1,43%	0,44%	0,32%	0,45%
PRC-3	0,14%	1,15%	0,39%	0,29%	0,45%
PRC-4	0,17%	1,12%	0,34%	0,28%	0,38%
PRC-5	0,22%	1,21%	0,36%	0,26%	0,33%
PRC-6	0,22%	0,89%	0,31%	0,26%	0,29%
PRC-7	0,25%	0,83%	0,28%	0,26%	0,26%
PRC-8	0,26%	0,49%	0,23%	0,27%	0,25%
PRC-9	0,27%	0,51%	0,21%	0,27%	0,24%
PRC-10	0,26%	0,47%	0,21%	0,26%	0,24%
PRC-11	0,28%	0,55%	0,23%	0,25%	0,23%
PRC-12	0,28%	0,34%	0,24%	0,26%	0,22%
PRC-13	0,28%	0,49%	0,29%	0,27%	0,22%
PRC-14	0,27%	0,34%	0,22%	0,27%	0,23%
PRC-15	0,12%	0,62%	0,26%	0,25%	0,24%
PRC-16	0,28%	0,45%	0,23%	0,25%	0,24%
PRC-17	0,21%	0,60%	0,18%	0,26%	0,26%
PRC-18	0,31%	0,48%	0,23%	0,26%	0,21%
PRC-19	0,31%	0,35%	0,24%	0,26%	0,19%
PRC-20	0,28%	0,37%	0,30%	0,26%	0,18%

Tabla D-5: Desviación estándar del precio de PRC por año

	1997	1998	1999	2000	2001
PRC-1	0,41	1,25	0,34	0,25	0,65
PRC-2	0,45	1,27	0,48	0,37	0,64
PRC-3	0,23	1,52	0,60	0,39	0,71
PRC-4	0,32	1,97	0,65	0,55	0,82
PRC-5	0,53	2,57	0,82	0,59	0,88
PRC-6	0,62	2,22	0,85	0,71	0,84
PRC-7	0,82	2,25	0,88	0,85	0,91
PRC-8	0,93	1,60	0,81	0,98	0,99
PRC-9	1,07	1,84	0,85	1,08	1,08
PRC-10	1,14	1,83	0,92	1,15	1,17
PRC-11	1,34	2,34	1,10	1,19	1,28
PRC-12	1,44	1,60	1,24	1,32	1,22
PRC-13	1,54	2,50	1,57	1,49	1,32
PRC-14	1,55	1,79	1,29	1,57	1,49
PRC-15	0,74	3,26	1,59	1,55	1,64
PRC-16	1,86	2,77	1,51	1,64	1,71
PRC-17	1,42	3,63	1,24	1,79	2,01
PRC-18	2,21	3,05	1,61	1,82	1,60
PRC-19	2,31	2,38	1,81	1,96	1,54
PRC-20	2,20	2,51	2,28	2,03	1,54

ANEXO E: ERRORES DE ESTIMACIÓN ESTRUCTURA DE TASAS

E.1 Errores Método de Nelson y Siegel

Tabla E-1:Error en TIR promedio método de Nelson y Siegel.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	-0,003%	0,010%	-0,017%	0,002%	0,028%	0,002%
PRC-2	-0,004%	0,083%	-0,003%	-0,005%	0,022%	0,015%
PRC-3	-0,005%	0,026%	-0,001%	0,003%	0,026%	0,006%
PRC-4	-0,011%	0,041%	-0,001%	-0,006%	-0,023%	-0,002%
PRC-5	0,001%	0,050%	0,017%	-0,009%	-0,031%	0,008%
PRC-6	0,010%	0,013%	0,017%	0,007%	0,018%	0,013%
PRC-7	-0,002%	-0,026%	0,004%	0,006%	0,017%	-0,004%
PRC-8	-0,009%	-0,042%	-0,018%	0,005%	-0,016%	-0,018%
PRC-9	0,003%	-0,004%	-0,007%	0,005%	-0,013%	-0,004%
PRC-10	0,013%	0,026%	-0,002%	-0,002%	-0,008%	0,007%
PRC-11	0,025%	0,030%	0,002%	0,000%	0,044%	0,022%
PRC-12	0,026%	0,039%	0,002%	-0,002%	0,016%	0,017%
PRC-13	0,022%	0,038%	0,007%	0,004%	0,022%	0,017%
PRC-14	0,023%	0,041%	0,010%	0,000%	0,017%	0,015%
PRC-15	0,009%	0,038%	0,006%	0,002%	0,016%	0,012%
PRC-16	0,015%	0,044%	0,008%	0,000%	0,023%	0,015%
PRC-17	0,004%	0,038%	0,008%	0,001%	0,012%	0,009%
PRC-18	-0,001%	-0,002%	0,006%	-0,001%	0,010%	0,003%
PRC-19	-0,014%	-0,010%	-0,014%	-0,002%	0,002%	-0,009%
PRC-20	-0,033%	-0,022%	-0,030%	-0,008%	-0,009%	-0,019%

Tabla E-2:Error en precio promedio método de Nelson y Siegel.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,004%	-0,008%	0,009%	-0,003%	-0,021%	-0,003%
PRC-2	0,005%	-0,077%	0,003%	0,003%	-0,027%	-0,015%
PRC-3	0,009%	-0,031%	0,000%	-0,005%	-0,041%	-0,009%
PRC-4	0,020%	-0,078%	0,002%	0,010%	0,047%	0,005%
PRC-5	-0,003%	-0,112%	-0,038%	0,020%	0,073%	-0,017%
PRC-6	-0,029%	-0,034%	-0,046%	-0,020%	-0,053%	-0,036%
PRC-7	0,007%	0,086%	-0,010%	-0,019%	-0,056%	0,015%
PRC-8	0,031%	0,142%	0,062%	-0,019%	0,061%	0,063%
PRC-9	-0,013%	0,013%	0,027%	-0,018%	0,053%	0,014%
PRC-10	-0,057%	-0,107%	0,010%	0,010%	0,037%	-0,028%
PRC-11	-0,121%	-0,137%	-0,008%	0,000%	-0,221%	-0,107%
PRC-12	-0,131%	-0,190%	-0,011%	0,011%	-0,083%	-0,086%
PRC-13	-0,121%	-0,201%	-0,040%	-0,022%	-0,128%	-0,096%
PRC-14	-0,132%	-0,227%	-0,058%	0,001%	-0,099%	-0,087%
PRC-15	-0,060%	-0,230%	-0,034%	-0,010%	-0,101%	-0,076%
PRC-16	-0,098%	-0,273%	-0,052%	-0,003%	-0,156%	-0,097%
PRC-17	-0,028%	-0,241%	-0,053%	-0,006%	-0,088%	-0,065%
PRC-18	0,008%	0,009%	-0,043%	0,010%	-0,076%	-0,019%
PRC-19	0,102%	0,071%	0,106%	0,018%	-0,019%	0,067%
PRC-20	0,251%	0,164%	0,230%	0,061%	0,070%	0,147%

Tabla E-3: Error absoluto promedio (MAE) en TIR método de Nelson y Siegel.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,018%	0,158%	0,059%	0,045%	0,145%	0,096%
PRC-2	0,023%	0,142%	0,040%	0,045%	0,120%	0,068%
PRC-3	0,026%	0,123%	0,036%	0,039%	0,088%	0,053%
PRC-4	0,021%	0,104%	0,036%	0,029%	0,077%	0,053%
PRC-5	0,020%	0,092%	0,040%	0,023%	0,077%	0,049%
PRC-6	0,018%	0,064%	0,031%	0,023%	0,056%	0,034%
PRC-7	0,016%	0,052%	0,032%	0,017%	0,043%	0,034%
PRC-8	0,014%	0,048%	0,029%	0,014%	0,037%	0,032%
PRC-9	0,010%	0,034%	0,025%	0,013%	0,036%	0,025%
PRC-10	0,019%	0,037%	0,022%	0,013%	0,034%	0,023%
PRC-11	0,027%	0,049%	0,017%	0,013%	0,068%	0,036%
PRC-12	0,027%	0,047%	0,018%	0,011%	0,038%	0,030%
PRC-13	0,027%	0,050%	0,020%	0,012%	0,030%	0,026%
PRC-14	0,031%	0,044%	0,019%	0,010%	0,035%	0,026%
PRC-15	0,014%	0,053%	0,024%	0,009%	0,031%	0,025%
PRC-16	0,023%	0,056%	0,027%	0,010%	0,031%	0,025%
PRC-17	0,016%	0,046%	0,020%	0,010%	0,028%	0,021%
PRC-18	0,021%	0,037%	0,020%	0,009%	0,028%	0,021%
PRC-19	0,024%	0,026%	0,027%	0,013%	0,022%	0,024%
PRC-20	0,034%	0,033%	0,034%	0,014%	0,023%	0,028%

Tabla E-4: Error absoluto promedio (MAE) en precio método de Nelson y Siegel.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,013%	0,113%	0,038%	0,034%	0,106%	0,068%
PRC-2	0,024%	0,133%	0,041%	0,046%	0,131%	0,069%
PRC-3	0,040%	0,173%	0,055%	0,058%	0,135%	0,078%
PRC-4	0,040%	0,193%	0,070%	0,056%	0,154%	0,101%
PRC-5	0,048%	0,207%	0,091%	0,054%	0,187%	0,113%
PRC-6	0,050%	0,171%	0,086%	0,064%	0,160%	0,094%
PRC-7	0,052%	0,164%	0,101%	0,056%	0,146%	0,108%
PRC-8	0,049%	0,162%	0,101%	0,049%	0,138%	0,113%
PRC-9	0,042%	0,131%	0,097%	0,052%	0,145%	0,099%
PRC-10	0,082%	0,156%	0,097%	0,057%	0,150%	0,101%
PRC-11	0,129%	0,222%	0,080%	0,061%	0,336%	0,169%
PRC-12	0,139%	0,230%	0,088%	0,054%	0,197%	0,151%
PRC-13	0,146%	0,262%	0,112%	0,065%	0,172%	0,144%
PRC-14	0,177%	0,243%	0,109%	0,058%	0,209%	0,155%
PRC-15	0,091%	0,310%	0,145%	0,055%	0,197%	0,152%
PRC-16	0,149%	0,349%	0,173%	0,062%	0,205%	0,163%
PRC-17	0,106%	0,296%	0,134%	0,067%	0,195%	0,145%
PRC-18	0,150%	0,256%	0,144%	0,066%	0,206%	0,146%
PRC-19	0,181%	0,183%	0,196%	0,100%	0,172%	0,179%
PRC-20	0,261%	0,242%	0,258%	0,104%	0,185%	0,214%

Tabla E-5: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en TIR método de Nelson y Siegel.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,027%	0,236%	0,078%	0,067%	0,198%	0,161%
PRC-2	0,038%	0,212%	0,056%	0,069%	0,155%	0,116%
PRC-3	0,036%	0,173%	0,056%	0,056%	0,119%	0,086%
PRC-4	0,027%	0,150%	0,050%	0,041%	0,116%	0,087%
PRC-5	0,028%	0,133%	0,059%	0,034%	0,104%	0,081%
PRC-6	0,027%	0,094%	0,047%	0,031%	0,070%	0,055%
PRC-7	0,022%	0,075%	0,044%	0,026%	0,054%	0,051%
PRC-8	0,019%	0,069%	0,039%	0,019%	0,050%	0,047%
PRC-9	0,014%	0,057%	0,036%	0,018%	0,049%	0,042%
PRC-10	0,026%	0,059%	0,030%	0,018%	0,045%	0,036%
PRC-11	0,032%	0,060%	0,025%	0,020%	0,083%	0,050%
PRC-12	0,036%	0,063%	0,025%	0,014%	0,050%	0,044%
PRC-13	0,035%	0,064%	0,026%	0,015%	0,043%	0,038%
PRC-14	0,039%	0,057%	0,027%	0,013%	0,048%	0,039%
PRC-15	0,019%	0,062%	0,035%	0,012%	0,042%	0,037%
PRC-16	0,029%	0,067%	0,036%	0,013%	0,041%	0,037%
PRC-17	0,022%	0,062%	0,029%	0,013%	0,038%	0,033%
PRC-18	0,029%	0,050%	0,028%	0,013%	0,039%	0,030%
PRC-19	0,035%	0,037%	0,036%	0,020%	0,029%	0,034%
PRC-20	0,043%	0,044%	0,043%	0,018%	0,031%	0,038%

Tabla E-6: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en precio método de Nelson y Siegel.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,020%	0,174%	0,051%	0,050%	0,143%	0,117%
PRC-2	0,038%	0,196%	0,058%	0,072%	0,173%	0,116%
PRC-3	0,055%	0,234%	0,085%	0,085%	0,182%	0,125%
PRC-4	0,052%	0,278%	0,096%	0,080%	0,228%	0,167%
PRC-5	0,068%	0,293%	0,131%	0,078%	0,251%	0,184%
PRC-6	0,073%	0,252%	0,128%	0,084%	0,199%	0,150%
PRC-7	0,071%	0,237%	0,140%	0,083%	0,181%	0,164%
PRC-8	0,066%	0,233%	0,137%	0,066%	0,184%	0,167%
PRC-9	0,055%	0,215%	0,139%	0,070%	0,200%	0,162%
PRC-10	0,112%	0,241%	0,132%	0,079%	0,201%	0,155%
PRC-11	0,155%	0,271%	0,119%	0,093%	0,409%	0,240%
PRC-12	0,186%	0,305%	0,128%	0,071%	0,264%	0,220%
PRC-13	0,192%	0,337%	0,144%	0,081%	0,245%	0,207%
PRC-14	0,226%	0,318%	0,155%	0,076%	0,287%	0,228%
PRC-15	0,121%	0,362%	0,215%	0,076%	0,271%	0,227%
PRC-16	0,186%	0,418%	0,231%	0,083%	0,277%	0,238%
PRC-17	0,147%	0,396%	0,193%	0,089%	0,269%	0,221%
PRC-18	0,208%	0,337%	0,198%	0,091%	0,291%	0,214%
PRC-19	0,257%	0,268%	0,266%	0,150%	0,230%	0,252%
PRC-20	0,329%	0,323%	0,328%	0,138%	0,246%	0,286%

E.2 Errores Método de Svensson

Tabla E-7: Error promedio en TIR método de Svensson.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,001%	0,046%	-0,007%	-0,001%	-0,035%	0,009%
PRC-2	0,001%	0,087%	0,002%	-0,005%	-0,032%	0,008%
PRC-3	-0,001%	0,011%	0,001%	0,006%	-0,005%	0,002%
PRC-4	-0,009%	0,040%	-0,001%	-0,003%	-0,019%	0,000%
PRC-5	0,004%	0,047%	0,015%	-0,007%	-0,021%	0,009%
PRC-6	0,009%	0,008%	0,013%	0,008%	0,028%	0,012%
PRC-7	-0,003%	-0,025%	0,000%	0,005%	0,032%	-0,003%
PRC-8	-0,012%	-0,046%	-0,021%	0,004%	-0,006%	-0,015%
PRC-9	0,001%	-0,009%	-0,011%	0,001%	-0,008%	-0,006%
PRC-10	0,008%	0,020%	-0,005%	-0,003%	-0,007%	0,004%
PRC-11	0,020%	0,032%	-0,002%	0,000%	0,028%	0,017%
PRC-12	0,018%	0,034%	0,000%	-0,002%	0,009%	0,013%
PRC-13	0,017%	0,041%	0,006%	0,004%	0,018%	0,015%
PRC-14	0,021%	0,037%	0,007%	0,000%	0,007%	0,011%
PRC-15	0,012%	0,044%	0,008%	0,002%	0,008%	0,010%
PRC-16	0,014%	0,050%	0,010%	0,001%	0,010%	0,012%
PRC-17	0,008%	0,034%	0,012%	0,001%	-0,003%	0,006%
PRC-18	0,004%	0,004%	0,010%	-0,002%	-0,002%	0,004%
PRC-19	-0,005%	0,000%	-0,006%	-0,002%	-0,007%	-0,004%
PRC-20	-0,021%	-0,012%	-0,022%	-0,006%	-0,011%	-0,014%

Tabla E-8: Error promedio en precio método de Svensson.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,000%	-0,034%	0,005%	-0,001%	0,024%	-0,007%
PRC-2	0,000%	-0,080%	-0,002%	0,003%	0,034%	-0,007%
PRC-3	0,002%	-0,009%	-0,003%	-0,009%	0,005%	-0,003%
PRC-4	0,016%	-0,076%	0,001%	0,005%	0,039%	0,001%
PRC-5	-0,010%	-0,104%	-0,032%	0,016%	0,049%	-0,021%
PRC-6	-0,026%	-0,021%	-0,036%	-0,020%	-0,082%	-0,033%
PRC-7	0,012%	0,082%	0,002%	-0,016%	-0,108%	0,009%
PRC-8	0,042%	0,155%	0,073%	-0,013%	0,023%	0,054%
PRC-9	-0,004%	0,034%	0,041%	-0,002%	0,033%	0,021%
PRC-10	-0,037%	-0,084%	0,021%	0,013%	0,030%	-0,017%
PRC-11	-0,094%	-0,149%	0,007%	-0,001%	-0,138%	-0,083%
PRC-12	-0,093%	-0,163%	0,002%	0,009%	-0,049%	-0,063%
PRC-13	-0,095%	-0,214%	-0,032%	-0,021%	-0,104%	-0,084%
PRC-14	-0,120%	-0,203%	-0,043%	0,000%	-0,042%	-0,062%
PRC-15	-0,076%	-0,265%	-0,050%	-0,013%	-0,048%	-0,061%
PRC-16	-0,093%	-0,315%	-0,065%	-0,007%	-0,065%	-0,074%
PRC-17	-0,054%	-0,218%	-0,079%	-0,008%	0,017%	-0,039%
PRC-18	-0,028%	-0,033%	-0,069%	0,011%	0,011%	-0,031%
PRC-19	0,036%	-0,002%	0,044%	0,018%	0,056%	0,032%
PRC-20	0,161%	0,086%	0,172%	0,049%	0,091%	0,106%

Tabla E-9: Error absoluto promedio (MAE) en TIR método de Svensson.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,011%	0,130%	0,043%	0,039%	0,092%	0,074%
PRC-2	0,020%	0,141%	0,034%	0,044%	0,070%	0,057%
PRC-3	0,023%	0,110%	0,034%	0,038%	0,062%	0,045%
PRC-4	0,020%	0,090%	0,033%	0,025%	0,059%	0,044%
PRC-5	0,018%	0,085%	0,039%	0,022%	0,070%	0,046%
PRC-6	0,017%	0,064%	0,029%	0,021%	0,049%	0,032%
PRC-7	0,016%	0,051%	0,030%	0,016%	0,038%	0,032%
PRC-8	0,015%	0,050%	0,030%	0,013%	0,028%	0,029%
PRC-9	0,010%	0,035%	0,026%	0,010%	0,031%	0,024%
PRC-10	0,015%	0,033%	0,023%	0,012%	0,030%	0,021%
PRC-11	0,021%	0,049%	0,017%	0,010%	0,049%	0,030%
PRC-12	0,021%	0,041%	0,016%	0,010%	0,032%	0,025%
PRC-13	0,023%	0,043%	0,017%	0,011%	0,027%	0,023%
PRC-14	0,027%	0,040%	0,017%	0,009%	0,027%	0,023%
PRC-15	0,015%	0,058%	0,019%	0,008%	0,026%	0,022%
PRC-16	0,022%	0,056%	0,024%	0,009%	0,020%	0,021%
PRC-17	0,017%	0,040%	0,022%	0,009%	0,019%	0,018%
PRC-18	0,019%	0,034%	0,019%	0,008%	0,020%	0,019%
PRC-19	0,019%	0,022%	0,023%	0,013%	0,018%	0,020%
PRC-20	0,023%	0,027%	0,029%	0,012%	0,022%	0,023%

Tabla E-10: Error absoluto promedio (MAE) en precio método de Svensson.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,008%	0,093%	0,028%	0,030%	0,065%	0,053%
PRC-2	0,021%	0,133%	0,036%	0,045%	0,076%	0,058%
PRC-3	0,035%	0,154%	0,052%	0,056%	0,095%	0,067%
PRC-4	0,037%	0,168%	0,063%	0,049%	0,118%	0,086%
PRC-5	0,045%	0,191%	0,088%	0,051%	0,169%	0,106%
PRC-6	0,046%	0,172%	0,081%	0,058%	0,139%	0,088%
PRC-7	0,050%	0,160%	0,097%	0,052%	0,129%	0,103%
PRC-8	0,054%	0,171%	0,104%	0,045%	0,105%	0,102%
PRC-9	0,038%	0,133%	0,101%	0,038%	0,128%	0,095%
PRC-10	0,067%	0,137%	0,100%	0,052%	0,133%	0,090%
PRC-11	0,101%	0,225%	0,080%	0,049%	0,244%	0,143%
PRC-12	0,110%	0,198%	0,083%	0,049%	0,165%	0,128%
PRC-13	0,125%	0,224%	0,093%	0,061%	0,152%	0,124%
PRC-14	0,159%	0,221%	0,097%	0,053%	0,165%	0,132%
PRC-15	0,093%	0,343%	0,117%	0,052%	0,166%	0,137%
PRC-16	0,142%	0,349%	0,154%	0,058%	0,135%	0,135%
PRC-17	0,114%	0,254%	0,145%	0,058%	0,132%	0,123%
PRC-18	0,131%	0,231%	0,133%	0,058%	0,151%	0,130%
PRC-19	0,139%	0,161%	0,170%	0,097%	0,141%	0,149%
PRC-20	0,175%	0,195%	0,219%	0,091%	0,176%	0,175%

Tabla E-11: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en TIR método de Svensson.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,016%	0,222%	0,060%	0,061%	0,136%	0,143%
PRC-2	0,034%	0,218%	0,049%	0,069%	0,100%	0,106%
PRC-3	0,033%	0,166%	0,053%	0,054%	0,086%	0,077%
PRC-4	0,026%	0,135%	0,045%	0,037%	0,090%	0,075%
PRC-5	0,026%	0,123%	0,059%	0,031%	0,099%	0,076%
PRC-6	0,025%	0,095%	0,044%	0,030%	0,063%	0,053%
PRC-7	0,021%	0,071%	0,044%	0,025%	0,048%	0,049%
PRC-8	0,021%	0,073%	0,041%	0,018%	0,037%	0,043%
PRC-9	0,013%	0,059%	0,038%	0,014%	0,044%	0,041%
PRC-10	0,023%	0,048%	0,031%	0,017%	0,040%	0,032%
PRC-11	0,028%	0,061%	0,025%	0,018%	0,060%	0,043%
PRC-12	0,031%	0,056%	0,025%	0,013%	0,042%	0,038%
PRC-13	0,032%	0,054%	0,022%	0,014%	0,037%	0,032%
PRC-14	0,036%	0,054%	0,024%	0,013%	0,035%	0,033%
PRC-15	0,019%	0,067%	0,027%	0,011%	0,036%	0,034%
PRC-16	0,030%	0,066%	0,033%	0,012%	0,027%	0,031%
PRC-17	0,023%	0,055%	0,031%	0,013%	0,027%	0,028%
PRC-18	0,026%	0,046%	0,027%	0,012%	0,028%	0,028%
PRC-19	0,028%	0,034%	0,032%	0,022%	0,024%	0,030%
PRC-20	0,031%	0,038%	0,037%	0,017%	0,029%	0,032%

Tabla E-12: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en precio método de Svensson.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,012%	0,165%	0,039%	0,047%	0,094%	0,104%
PRC-2	0,034%	0,201%	0,052%	0,072%	0,111%	0,103%
PRC-3	0,051%	0,222%	0,082%	0,081%	0,133%	0,110%
PRC-4	0,048%	0,251%	0,088%	0,073%	0,178%	0,142%
PRC-5	0,064%	0,273%	0,130%	0,072%	0,239%	0,174%
PRC-6	0,068%	0,256%	0,120%	0,080%	0,180%	0,145%
PRC-7	0,069%	0,226%	0,138%	0,079%	0,159%	0,155%
PRC-8	0,072%	0,246%	0,141%	0,065%	0,138%	0,152%
PRC-9	0,052%	0,222%	0,146%	0,053%	0,179%	0,160%
PRC-10	0,101%	0,200%	0,136%	0,076%	0,179%	0,138%
PRC-11	0,133%	0,278%	0,119%	0,084%	0,299%	0,203%
PRC-12	0,159%	0,272%	0,125%	0,064%	0,219%	0,191%
PRC-13	0,173%	0,283%	0,121%	0,075%	0,208%	0,177%
PRC-14	0,208%	0,300%	0,138%	0,074%	0,214%	0,191%
PRC-15	0,121%	0,392%	0,167%	0,071%	0,234%	0,209%
PRC-16	0,196%	0,415%	0,214%	0,078%	0,180%	0,202%
PRC-17	0,153%	0,353%	0,207%	0,087%	0,187%	0,188%
PRC-18	0,183%	0,310%	0,191%	0,084%	0,210%	0,195%
PRC-19	0,207%	0,245%	0,241%	0,161%	0,188%	0,219%
PRC-20	0,237%	0,277%	0,288%	0,128%	0,230%	0,242%

E.3 Errores Método de Splines

Tabla E-13: Error promedio en TIR método de Splines.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,000%	0,007%	-0,001%	0,003%	0,006%	0,003%
PRC-2	-0,001%	0,007%	0,001%	-0,003%	-0,004%	0,000%
PRC-3	0,000%	-0,033%	0,001%	0,006%	0,013%	0,000%
PRC-4	-0,005%	-0,010%	-0,005%	-0,002%	-0,008%	-0,006%
PRC-5	0,003%	0,030%	0,006%	-0,005%	-0,010%	0,006%
PRC-6	0,009%	0,024%	0,009%	0,004%	0,019%	0,012%
PRC-7	-0,001%	-0,009%	0,003%	0,004%	0,026%	0,002%
PRC-8	-0,010%	-0,026%	-0,014%	0,001%	-0,011%	-0,013%
PRC-9	-0,001%	0,000%	-0,003%	0,000%	-0,009%	-0,003%
PRC-10	0,000%	0,016%	0,000%	-0,003%	-0,008%	0,002%
PRC-11	0,008%	0,029%	-0,001%	-0,001%	0,023%	0,012%
PRC-12	0,009%	0,015%	0,001%	-0,002%	0,012%	0,008%
PRC-13	0,008%	0,022%	0,007%	0,002%	0,018%	0,011%
PRC-14	0,011%	0,013%	0,004%	0,000%	0,012%	0,008%
PRC-15	0,009%	0,021%	0,004%	0,002%	0,013%	0,009%
PRC-16	0,013%	0,030%	0,008%	0,001%	0,013%	0,010%
PRC-17	0,009%	0,031%	0,011%	0,002%	0,002%	0,007%
PRC-18	0,007%	0,005%	0,009%	0,000%	-0,001%	0,005%
PRC-19	0,002%	-0,006%	-0,007%	0,002%	-0,008%	-0,004%
PRC-20	-0,012%	-0,011%	-0,020%	-0,002%	-0,013%	-0,012%

Tabla E-14: Error promedio en precio método de Splines.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,000%	-0,006%	0,001%	-0,003%	-0,006%	-0,003%
PRC-2	0,001%	-0,005%	-0,001%	0,001%	0,003%	0,000%
PRC-3	0,001%	0,052%	-0,003%	-0,010%	-0,021%	0,000%
PRC-4	0,009%	0,017%	0,009%	0,003%	0,017%	0,011%
PRC-5	-0,009%	-0,069%	-0,014%	0,012%	0,024%	-0,014%
PRC-6	-0,026%	-0,064%	-0,025%	-0,010%	-0,055%	-0,034%
PRC-7	0,005%	0,033%	-0,009%	-0,013%	-0,089%	-0,006%
PRC-8	0,034%	0,086%	0,047%	-0,002%	0,041%	0,045%
PRC-9	0,005%	-0,001%	0,012%	0,001%	0,036%	0,010%
PRC-10	-0,002%	-0,067%	-0,001%	0,012%	0,034%	-0,006%
PRC-11	-0,039%	-0,130%	0,005%	0,006%	-0,115%	-0,058%
PRC-12	-0,044%	-0,071%	-0,005%	0,010%	-0,065%	-0,039%
PRC-13	-0,046%	-0,115%	-0,040%	-0,009%	-0,104%	-0,061%
PRC-14	-0,065%	-0,070%	-0,025%	0,000%	-0,069%	-0,044%
PRC-15	-0,057%	-0,124%	-0,024%	-0,012%	-0,084%	-0,056%
PRC-16	-0,081%	-0,188%	-0,050%	-0,003%	-0,089%	-0,066%
PRC-17	-0,059%	-0,198%	-0,074%	-0,016%	-0,017%	-0,050%
PRC-18	-0,051%	-0,034%	-0,062%	0,004%	0,007%	-0,034%
PRC-19	-0,012%	0,043%	0,052%	-0,014%	0,063%	0,029%
PRC-20	0,090%	0,081%	0,157%	0,018%	0,105%	0,088%

Tabla E-15: Error absoluto promedio (MAE) en TIR método de Splines.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,008%	0,077%	0,023%	0,023%	0,049%	0,043%
PRC-2	0,013%	0,067%	0,029%	0,038%	0,037%	0,036%
PRC-3	0,017%	0,083%	0,032%	0,032%	0,044%	0,037%
PRC-4	0,016%	0,073%	0,025%	0,021%	0,046%	0,035%
PRC-5	0,016%	0,067%	0,030%	0,017%	0,054%	0,036%
PRC-6	0,015%	0,058%	0,023%	0,015%	0,040%	0,028%
PRC-7	0,014%	0,048%	0,026%	0,013%	0,032%	0,029%
PRC-8	0,013%	0,034%	0,020%	0,010%	0,025%	0,022%
PRC-9	0,009%	0,028%	0,014%	0,008%	0,031%	0,020%
PRC-10	0,010%	0,024%	0,015%	0,009%	0,028%	0,016%
PRC-11	0,011%	0,036%	0,014%	0,008%	0,040%	0,022%
PRC-12	0,012%	0,025%	0,016%	0,008%	0,029%	0,019%
PRC-13	0,015%	0,032%	0,017%	0,008%	0,024%	0,018%
PRC-14	0,017%	0,026%	0,012%	0,007%	0,025%	0,018%
PRC-15	0,013%	0,045%	0,015%	0,007%	0,025%	0,020%
PRC-16	0,018%	0,038%	0,019%	0,008%	0,022%	0,018%
PRC-17	0,015%	0,035%	0,017%	0,007%	0,021%	0,017%
PRC-18	0,017%	0,029%	0,016%	0,007%	0,021%	0,017%
PRC-19	0,013%	0,017%	0,019%	0,010%	0,017%	0,016%
PRC-20	0,014%	0,018%	0,024%	0,006%	0,020%	0,017%

Tabla E-16: Tabla E.17: Error absoluto promedio (MAE) en precio
método de Splines.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,006%	0,056%	0,015%	0,017%	0,034%	0,031%
PRC-2	0,014%	0,064%	0,031%	0,040%	0,040%	0,037%
PRC-3	0,026%	0,117%	0,048%	0,047%	0,067%	0,055%
PRC-4	0,030%	0,135%	0,048%	0,042%	0,092%	0,068%
PRC-5	0,039%	0,150%	0,068%	0,039%	0,132%	0,083%
PRC-6	0,043%	0,154%	0,064%	0,042%	0,114%	0,076%
PRC-7	0,044%	0,149%	0,082%	0,041%	0,108%	0,091%
PRC-8	0,044%	0,115%	0,071%	0,034%	0,093%	0,080%
PRC-9	0,035%	0,106%	0,056%	0,031%	0,125%	0,078%
PRC-10	0,041%	0,100%	0,064%	0,041%	0,127%	0,068%
PRC-11	0,052%	0,162%	0,065%	0,038%	0,196%	0,102%
PRC-12	0,060%	0,123%	0,081%	0,041%	0,154%	0,098%
PRC-13	0,080%	0,168%	0,091%	0,046%	0,140%	0,102%
PRC-14	0,098%	0,143%	0,072%	0,039%	0,152%	0,103%
PRC-15	0,080%	0,264%	0,091%	0,043%	0,160%	0,122%
PRC-16	0,113%	0,239%	0,123%	0,050%	0,145%	0,118%
PRC-17	0,100%	0,224%	0,117%	0,046%	0,143%	0,113%
PRC-18	0,119%	0,197%	0,114%	0,049%	0,159%	0,116%
PRC-19	0,097%	0,119%	0,140%	0,071%	0,135%	0,118%
PRC-20	0,108%	0,134%	0,183%	0,050%	0,161%	0,130%

Tabla E-18: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en TIR método de Splines.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,010%	0,136%	0,035%	0,033%	0,096%	0,088%
PRC-2	0,025%	0,115%	0,044%	0,063%	0,056%	0,066%
PRC-3	0,026%	0,128%	0,063%	0,048%	0,062%	0,067%
PRC-4	0,021%	0,114%	0,037%	0,033%	0,071%	0,061%
PRC-5	0,032%	0,104%	0,042%	0,025%	0,074%	0,062%
PRC-6	0,022%	0,090%	0,037%	0,022%	0,055%	0,048%
PRC-7	0,019%	0,073%	0,038%	0,020%	0,042%	0,047%
PRC-8	0,017%	0,054%	0,028%	0,013%	0,033%	0,034%
PRC-9	0,012%	0,046%	0,020%	0,011%	0,044%	0,034%
PRC-10	0,013%	0,035%	0,020%	0,014%	0,039%	0,025%
PRC-11	0,014%	0,051%	0,019%	0,012%	0,050%	0,034%
PRC-12	0,016%	0,037%	0,024%	0,011%	0,040%	0,030%
PRC-13	0,019%	0,048%	0,022%	0,011%	0,032%	0,027%
PRC-14	0,022%	0,038%	0,017%	0,009%	0,033%	0,026%
PRC-15	0,017%	0,058%	0,022%	0,010%	0,034%	0,031%
PRC-16	0,024%	0,049%	0,027%	0,011%	0,028%	0,027%
PRC-17	0,020%	0,050%	0,025%	0,010%	0,027%	0,026%
PRC-18	0,022%	0,040%	0,023%	0,011%	0,029%	0,024%
PRC-19	0,019%	0,024%	0,028%	0,016%	0,023%	0,023%
PRC-20	0,020%	0,029%	0,031%	0,009%	0,026%	0,025%

Tabla E-19: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en precio método de Splines.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0,007%	0,099%	0,023%	0,025%	0,066%	0,064%
PRC-2	0,026%	0,107%	0,047%	0,067%	0,061%	0,065%
PRC-3	0,040%	0,176%	0,100%	0,071%	0,095%	0,099%
PRC-4	0,040%	0,211%	0,072%	0,065%	0,141%	0,117%
PRC-5	0,073%	0,230%	0,095%	0,058%	0,179%	0,141%
PRC-6	0,061%	0,238%	0,101%	0,061%	0,157%	0,131%
PRC-7	0,061%	0,227%	0,120%	0,065%	0,139%	0,149%
PRC-8	0,060%	0,179%	0,098%	0,047%	0,122%	0,120%
PRC-9	0,047%	0,175%	0,077%	0,042%	0,178%	0,133%
PRC-10	0,057%	0,147%	0,087%	0,059%	0,174%	0,106%
PRC-11	0,066%	0,228%	0,088%	0,055%	0,248%	0,159%
PRC-12	0,083%	0,178%	0,123%	0,055%	0,209%	0,150%
PRC-13	0,105%	0,254%	0,119%	0,060%	0,183%	0,150%
PRC-14	0,128%	0,209%	0,100%	0,055%	0,197%	0,151%
PRC-15	0,107%	0,336%	0,134%	0,061%	0,220%	0,190%
PRC-16	0,157%	0,302%	0,176%	0,069%	0,191%	0,175%
PRC-17	0,135%	0,321%	0,171%	0,071%	0,187%	0,172%
PRC-18	0,152%	0,270%	0,161%	0,075%	0,214%	0,171%
PRC-19	0,138%	0,173%	0,208%	0,119%	0,178%	0,170%
PRC-20	0,155%	0,208%	0,241%	0,071%	0,206%	0,189%

E.4 Errores Fuera de Muestra en TIR

Tabla E-20:Error absoluto promedio (MAE) fuera de muestra en TIR
Nelson y Siegel.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0.083%	0.826%	0.203%	0.168%	0.369%	0.359%
PRC-2	0.090%	0.465%	0.088%	0.123%	0.229%	0.191%
PRC-3	0.049%	0.287%	0.084%	0.075%	0.177%	0.122%
PRC-4	0.036%	0.196%	0.068%	0.067%	0.122%	0.097%
PRC-5	0.039%	0.239%	0.067%	0.045%	0.111%	0.100%
PRC-6	0.031%	0.106%	0.055%	0.040%	0.089%	0.060%
PRC-7	0.028%	0.129%	0.058%	0.032%	0.067%	0.068%
PRC-8	0.030%	0.122%	0.049%	0.035%	0.073%	0.065%
PRC-9	0.022%	0.079%	0.040%	0.016%	0.045%	0.045%
PRC-10	0.036%	0.079%	0.035%	0.026%	0.047%	0.043%
PRC-11	0.035%	0.080%	0.024%	0.029%	0.064%	0.047%
PRC-12	0.033%	0.072%	0.022%	0.027%	0.059%	0.044%
PRC-13	0.031%	0.069%	0.046%	0.018%	0.051%	0.042%
PRC-14	0.038%	0.070%	0.046%	0.035%	0.049%	0.046%
PRC-15	0.029%	0.204%	0.067%	0.015%	0.047%	0.062%
PRC-16	0.041%	0.221%	0.033%	0.025%	0.062%	0.061%
PRC-17	0.025%	0.122%	0.077%	0.045%	0.061%	0.061%
PRC-18	0.034%	0.138%	0.074%	0.069%	0.067%	0.076%
PRC-19	0.047%	0.086%	0.059%	0.037%	0.047%	0.059%
PRC-20	0.071%	0.199%	0.105%	0.077%	0.112%	0.122%

Tabla E-21:Error absoluto promedio (MAE) fuera de muestra en TIR
Svensson.

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0.093%	0.941%	0.206%	0.184%	0.362%	0.394%
PRC-2	0.124%	0.696%	0.079%	0.139%	0.257%	0.250%
PRC-3	0.056%	0.409%	0.070%	0.072%	0.209%	0.144%
PRC-4	0.036%	0.184%	0.063%	0.062%	0.148%	0.100%
PRC-5	0.043%	0.217%	0.064%	0.037%	0.113%	0.095%
PRC-6	0.032%	0.112%	0.047%	0.039%	0.083%	0.059%
PRC-7	0.026%	0.119%	0.060%	0.028%	0.061%	0.063%
PRC-8	0.032%	0.115%	0.059%	0.034%	0.066%	0.063%
PRC-9	0.022%	0.070%	0.040%	0.018%	0.044%	0.042%
PRC-10	0.031%	0.082%	0.035%	0.027%	0.041%	0.042%
PRC-11	0.029%	0.070%	0.024%	0.042%	0.061%	0.045%
PRC-12	0.025%	0.068%	0.025%	0.027%	0.048%	0.040%
PRC-13	0.028%	0.073%	0.045%	0.017%	0.034%	0.037%
PRC-14	0.035%	0.062%	0.043%	0.036%	0.061%	0.048%
PRC-15	0.027%	0.202%	0.050%	0.011%	0.049%	0.059%
PRC-16	0.037%	0.198%	0.037%	0.024%	0.042%	0.053%
PRC-17	0.025%	0.088%	0.067%	0.034%	0.059%	0.052%
PRC-18	0.030%	0.102%	0.136%	0.043%	0.059%	0.081%
PRC-19	0.037%	0.092%	0.054%	0.031%	0.028%	0.054%
PRC-20	0.061%	0.220%	0.099%	0.062%	0.199%	0.141%

Tabla E-22:Error absoluto promedio (MAE) fuera de muestra en TIR
Splines

	1997	1998	1999	2000	2001	1997-2001
PRC-1	0.188%	1.474%	0.304%	0.339%	0.381%	0.584%
PRC-2	0.173%	0.650%	0.126%	0.195%	0.357%	0.287%
PRC-3	0.088%	0.323%	0.111%	0.100%	0.190%	0.148%
PRC-4	0.071%	0.324%	0.094%	0.085%	0.188%	0.147%
PRC-5	0.054%	0.208%	0.086%	0.047%	0.144%	0.106%
PRC-6	0.034%	0.123%	0.058%	0.064%	0.113%	0.072%
PRC-7	0.022%	0.134%	0.051%	0.041%	0.070%	0.067%
PRC-8	0.029%	0.076%	0.067%	0.058%	0.115%	0.072%
PRC-9	0.017%	0.049%	0.034%	0.019%	0.048%	0.035%
PRC-10	0.045%	0.098%	0.049%	0.031%	0.041%	0.052%
PRC-11	0.033%	0.062%	0.025%	0.020%	0.072%	0.043%
PRC-12	0.023%	0.061%	0.072%	0.033%	0.074%	0.052%
PRC-13	0.022%	0.067%	0.073%	0.014%	0.047%	0.044%
PRC-14	0.035%	0.049%	0.077%	0.191%	0.075%	0.094%
PRC-15	0.051%	0.157%	0.132%	0.022%	0.064%	0.074%
PRC-16	0.031%	0.170%	0.036%	0.098%	0.066%	0.080%
PRC-17	0.028%	0.072%	0.379%	0.173%	0.092%	0.172%
PRC-18	0.037%	0.135%	0.244%	0.095%	0.193%	0.153%
PRC-19	0.092%	0.176%	0.107%	0.047%	0.029%	0.107%
PRC-20	0.099%	0.344%	0.196%	0.172%	0.122%	0.197%

ANEXO F: CURVAS CERO CUPÓN ESTIMADAS

Tabla F-1: Curvas cero cupón promedio por año Nelson y Siegel.

Plazo (años)	1997	1998	1999	2000	2001
1	6.76%	8.76%	6.52%	6.06%	4.36%
2	6.65%	8.19%	6.59%	6.27%	4.56%
3	6.60%	7.87%	6.60%	6.37%	4.77%
4	6.56%	7.66%	6.59%	6.42%	4.97%
5	6.54%	7.51%	6.58%	6.46%	5.14%
6	6.51%	7.40%	6.56%	6.47%	5.28%
7	6.49%	7.32%	6.55%	6.49%	5.40%
8	6.48%	7.25%	6.54%	6.49%	5.50%
9	6.46%	7.20%	6.52%	6.50%	5.57%
10	6.45%	7.17%	6.51%	6.50%	5.63%
11	6.44%	7.14%	6.51%	6.50%	5.68%
12	6.43%	7.12%	6.50%	6.50%	5.71%
13	6.42%	7.11%	6.49%	6.50%	5.73%
14	6.41%	7.10%	6.49%	6.49%	5.74%
15	6.40%	7.09%	6.49%	6.49%	5.74%
16	6.39%	7.09%	6.49%	6.49%	5.74%
17	6.38%	7.09%	6.48%	6.49%	5.72%
18	6.37%	7.10%	6.48%	6.49%	5.71%
19	6.37%	7.10%	6.48%	6.49%	5.69%
20	6.36%	7.11%	6.49%	6.48%	5.66%

Tabla F-2: Desviación estándar curvas cero cupón por año Nelson y Siegel.

Plazo (años)	1997	1998	1999	2000	2001
1	0.30%	1.55%	0.59%	0.39%	0.62%
2	0.20%	1.07%	0.41%	0.32%	0.41%
3	0.22%	0.82%	0.32%	0.29%	0.34%
4	0.24%	0.65%	0.28%	0.27%	0.30%
5	0.26%	0.54%	0.25%	0.27%	0.26%
6	0.28%	0.47%	0.24%	0.26%	0.24%
7	0.29%	0.42%	0.23%	0.26%	0.23%
8	0.30%	0.39%	0.23%	0.26%	0.22%
9	0.31%	0.37%	0.23%	0.26%	0.22%
10	0.31%	0.35%	0.23%	0.26%	0.22%
11	0.32%	0.34%	0.23%	0.26%	0.22%
12	0.32%	0.33%	0.24%	0.27%	0.21%
13	0.33%	0.33%	0.24%	0.27%	0.21%
14	0.33%	0.34%	0.25%	0.27%	0.21%
15	0.34%	0.34%	0.25%	0.27%	0.21%
16	0.34%	0.36%	0.26%	0.28%	0.21%
17	0.34%	0.38%	0.26%	0.28%	0.21%
18	0.35%	0.40%	0.27%	0.28%	0.22%
19	0.36%	0.42%	0.27%	0.28%	0.24%
20	0.36%	0.45%	0.28%	0.29%	0.25%

Tabla F-3: Curvas cero cupón promedio por año Svensson.

Plazo (años)	1997	1998	1999	2000	2001
1	6.58%	8.61%	6.51%	6.03%	4.45%
2	6.61%	8.15%	6.58%	6.26%	4.56%
3	6.60%	7.86%	6.60%	6.37%	4.76%
4	6.58%	7.66%	6.59%	6.43%	4.95%
5	6.56%	7.52%	6.59%	6.46%	5.12%
6	6.54%	7.41%	6.57%	6.48%	5.27%
7	6.52%	7.33%	6.56%	6.49%	5.40%
8	6.50%	7.27%	6.55%	6.50%	5.50%
9	6.48%	7.22%	6.54%	6.50%	5.58%
10	6.46%	7.19%	6.52%	6.50%	5.65%
11	6.44%	7.16%	6.51%	6.50%	5.69%
12	6.42%	7.14%	6.50%	6.50%	5.72%
13	6.41%	7.12%	6.49%	6.49%	5.74%
14	6.39%	7.11%	6.48%	6.49%	5.75%
15	6.37%	7.10%	6.47%	6.49%	5.75%
16	6.36%	7.09%	6.46%	6.49%	5.74%
17	6.34%	7.09%	6.45%	6.48%	5.73%
18	6.33%	7.09%	6.44%	6.48%	5.71%
19	6.32%	7.09%	6.43%	6.48%	5.68%
20	6.31%	7.09%	6.43%	6.48%	5.65%

Tabla F-4: Desviación estándar curvas cero cupón por año Svensson.

Plazo (años)	1997	1998	1999	2000	2001
1	0.23%	1.46%	0.60%	0.34%	0.69%
2	0.20%	1.04%	0.42%	0.31%	0.41%
3	0.22%	0.81%	0.33%	0.28%	0.34%
4	0.24%	0.66%	0.28%	0.27%	0.30%
5	0.26%	0.56%	0.25%	0.26%	0.26%
6	0.28%	0.49%	0.24%	0.26%	0.24%
7	0.29%	0.44%	0.23%	0.26%	0.23%
8	0.30%	0.40%	0.23%	0.26%	0.23%
9	0.31%	0.37%	0.23%	0.26%	0.23%
10	0.32%	0.35%	0.24%	0.27%	0.22%
11	0.32%	0.34%	0.24%	0.27%	0.22%
12	0.33%	0.34%	0.24%	0.27%	0.21%
13	0.33%	0.34%	0.25%	0.27%	0.21%
14	0.33%	0.36%	0.26%	0.27%	0.20%
15	0.34%	0.38%	0.26%	0.27%	0.19%
16	0.34%	0.42%	0.27%	0.28%	0.19%
17	0.35%	0.45%	0.28%	0.28%	0.20%
18	0.35%	0.50%	0.29%	0.28%	0.21%
19	0.36%	0.54%	0.30%	0.28%	0.22%
20	0.37%	0.59%	0.31%	0.28%	0.24%

Tabla F-5: Curvas cero cupón promedio por año Splines.

Plazo (años)	1997	1998	1999	2000	2001
1	6.69%	8.81%	6.54%	6.04%	4.33%
2	6.65%	8.42%	6.59%	6.21%	4.52%
3	6.60%	7.99%	6.59%	6.33%	4.74%
4	6.56%	7.61%	6.58%	6.42%	4.96%
5	6.53%	7.39%	6.57%	6.47%	5.16%
6	6.53%	7.28%	6.55%	6.49%	5.34%
7	6.53%	7.25%	6.54%	6.50%	5.48%
8	6.52%	7.26%	6.53%	6.50%	5.58%
9	6.50%	7.25%	6.52%	6.49%	5.63%
10	6.48%	7.23%	6.52%	6.49%	5.66%
11	6.45%	7.21%	6.51%	6.49%	5.68%
12	6.43%	7.19%	6.51%	6.49%	5.70%
13	6.40%	7.16%	6.50%	6.49%	5.71%
14	6.37%	7.13%	6.49%	6.49%	5.73%
15	6.34%	7.10%	6.48%	6.49%	5.74%
16	6.32%	7.07%	6.47%	6.49%	5.75%
17	6.29%	7.04%	6.46%	6.48%	5.75%
18	6.26%	7.01%	6.44%	6.48%	5.75%
19	6.24%	6.98%	6.44%	6.48%	5.75%
20	6.21%	6.96%	6.43%	6.48%	5.74%

Tabla F-6: Desviación estándar curvas cero cupón por año Splines.

Plazo (años)	1997	1998	1999	2000	2001
1	0.26%	1.80%	0.61%	0.34%	0.65%
2	0.21%	1.36%	0.50%	0.29%	0.47%
3	0.22%	0.97%	0.38%	0.27%	0.37%
4	0.25%	0.66%	0.29%	0.27%	0.31%
5	0.28%	0.50%	0.25%	0.27%	0.28%
6	0.29%	0.40%	0.23%	0.27%	0.26%
7	0.29%	0.36%	0.24%	0.27%	0.25%
8	0.29%	0.36%	0.24%	0.27%	0.25%
9	0.30%	0.36%	0.24%	0.27%	0.24%
10	0.30%	0.34%	0.24%	0.27%	0.22%
11	0.31%	0.33%	0.24%	0.27%	0.21%
12	0.32%	0.34%	0.25%	0.27%	0.20%
13	0.33%	0.34%	0.25%	0.28%	0.20%
14	0.34%	0.36%	0.26%	0.28%	0.20%
15	0.35%	0.37%	0.27%	0.28%	0.21%
16	0.36%	0.39%	0.28%	0.29%	0.22%
17	0.37%	0.41%	0.29%	0.29%	0.23%
18	0.38%	0.43%	0.31%	0.29%	0.25%
19	0.39%	0.46%	0.32%	0.30%	0.26%
20	0.40%	0.50%	0.34%	0.30%	0.28%

ANEXO G: MATEMÁTICAS DE LA ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS

Existen distintas maneras de expresar la estructura de tasas de interés, ya sea mediante precios, factores de descuento, tasas cero cupón, tasas forward, tasas internas de retorno, tasas futuras, entre otras. La relación que existe entre estas distintas formas de caracterizar la estructura de tasas será desarrollada en este anexo.

El instrumento más simple que existe en el mercado es un bono cero cupón el cual pagará cierta cantidad de dinero en alguna fecha futura. En mercados completos los precios de estos bonos son observables, de los cuales su retorno puede ser deducido. Definamos el precio de un bono cero cupón en t que paga \$1 en T en función de su tasa de retorno $R(t, T)$:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (G.1)$$

La tasa de retorno del bono cero cupón será por lo tanto:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t} \quad (G.2)$$

Este indicador nos permite saber para cada plazo el costo de capital aportando información sobre las expectativas del mercado. Por ejemplo, una estructura de tasas cero cupón creciente implica que el mercado espera que las tasas subirán en el futuro.

Se define como retorno instantáneo el retorno de un bono que vence en un instante infinitesimal más adelante. Los modelos dinámicos clásicos de un factor modelan el comportamiento de esta tasa de interés la cual la relacionan a la estructura completa. La tasa instantánea se define como:

$$r(t) = -\frac{\partial \ln P(t, t)}{\partial T} \quad (G.3)$$

Otra manera de expresar la estructura de tasas de interés es a través de las tasas forward. Se consideran contratos forward, obligaciones acordadas en t que

devenga intereses entre T_1 y T_2 . Si no existieran estos contratos en el mercado uno podría sintetizarlo mediante la compra de un bono con madurez en T_2 y vendiendo una cierta cantidad de bonos con madurez T_1 .¹ Por concepto de arbitraje el retorno futuro de la operación debe ser:

$$f(t, T_1, T_2) = - \frac{\ln(P(t, T_2)) - \ln(P(t, T_1))}{T_2 - T_1} \quad (\text{G.4})$$

Cuando la diferencia entre los plazos T_1 y T_2 tiende a cero esta tasa converge a una tasa forward instantánea dada por la siguiente relación:

$$f(t, T) = - \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \quad (\text{G.5})$$

También podemos escribir esta tasa como:

$$f(t, T) = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial R(t, T)}{\partial T} \quad (\text{G.6})$$

La tasa forward instantánea para hoy $f(t, t)$ equivale a la tasa instantánea $r(t)$.

De (G.5) se deduce que el precio de un bono dependerá la estructura completa de tasas forward hasta su vencimiento.

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds} \quad (\text{G.7})$$

Cualquiera de las cuatro formas descritas sirve para caracterizar la estructura de tasas de interés completa.

¹ Ver Baxter y Rennie (1996) cap. 5 para un desarrollo más completo de este punto.

G.1 Bonos con Cupones

En general en los mercados existe en su mayoría bonos que pagan una cierta cantidad de flujos en plazos determinados. Estos bonos tienen una tasa de retorno promedio que dependerá de la estructura del bono como de su madurez. Esta tasa solo puede ser utilizada para descontar flujos con la misma estructura y plazo. La relación que existe entre precio y tasa de retorno, y , de un bono con cupones viene dada por:

$$P(t, C) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-yT_i} \quad (G.8)$$

Por arbitraje un portfolio de bonos cero cupón con pagos y plazos iguales a los cupones de este bono debe valer lo mismo.

$$P(t, C_i) = \sum_i C_i P(t, T_i) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-R(t, T_i)T_i} \quad (G.9)$$

El problema es que no se puede obtener las tasas $R(t, T_i)$ de forma directa de un solo precio de un bono con cupones. Se necesitaría de un conjunto de bonos con plazos iguales a cada pago de cupón para poder resolver para cada tasa de descuento cero cupón.

G.2 Duración

El concepto de duración es fundamental en el análisis de los instrumentos de renta fija. La duración de un bono es una medida de cuánto tiempo en promedio el tenedor de un bono tiene que esperar antes de recibir los flujos.

La duración se define como:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n T_i C_i e^{-yT_i}}{P} \quad (G.10)$$

De la ecuación (G.8) se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sum_{i=1}^n C_i T_i e^{-yT_i} \quad (\text{G.11})$$

Usando la definición de duración en (G.10) se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -DP \quad (\text{G.12})$$

Por lo tanto para cambios pequeños en la TIR del bono, Δy , los cambios en el retorno serán proporcionales con respecto a la duración:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D\Delta y \quad (\text{G.13})$$

ANEXO H: RESUMEN RESULTADOS ESTIMACIÓN MODELO DE VASICEK

En el siguiente anexo se presentan los indicadores de error de la estimación del modelo de Vaiscek utilizando paneles originales y paneles filtrados.

H.1 Errores estimación paneles de datos sin filtrar

Tabla H-1: Error promedio en TIR por panel de datos modelo de Vasicek.

	P1	P2	P3
PRC-1	0,118%	0,083%	-0,176%
PRC-2	-0,042%	0,025%	-0,118%
PRC-3	0,010%	0,068%	-0,011%
PRC-4	0,002%	0,042%	-0,022%
PRC-5	0,019%	0,028%	0,008%
PRC-6	0,009%	-0,008%	0,069%
PRC-7	-0,025%	-0,070%	0,074%
PRC-8	-0,017%	-0,081%	0,035%
PRC-9	-0,027%	-0,047%	0,035%
PRC-10	-0,002%	-0,001%	0,039%
PRC-11	0,018%	0,026%	0,044%
PRC-12	0,023%	0,038%	0,035%
PRC-13	0,029%	0,043%	0,033%
PRC-14	0,021%	0,048%	0,015%
PRC-15	0,020%	0,093%	0,001%
PRC-16	0,026%	0,089%	-0,005%
PRC-17	0,031%	0,094%	-0,012%
PRC-18	0,037%	0,058%	-0,018%
PRC-19	-0,005%	0,016%	-0,046%
PRC-20	-0,019%	0,021%	-0,069%

Tabla H-2: Error promedio en precio por panel de datos modelo de Vasicek.

	P1	P2	P3
PRC-1	-0,076%	-0,057%	0,131%
PRC-2	0,042%	-0,028%	0,115%
PRC-3	-0,024%	-0,108%	0,011%
PRC-4	-0,006%	-0,083%	0,042%
PRC-5	-0,046%	-0,070%	-0,020%
PRC-6	-0,029%	0,018%	-0,199%
PRC-7	0,075%	0,221%	-0,246%
PRC-8	0,051%	0,274%	-0,128%
PRC-9	0,097%	0,174%	-0,142%
PRC-10	0,004%	0,000%	-0,169%
PRC-11	-0,087%	-0,122%	-0,218%
PRC-12	-0,117%	-0,187%	-0,183%
PRC-13	-0,159%	-0,230%	-0,186%
PRC-14	-0,118%	-0,271%	-0,091%
PRC-15	-0,119%	-0,554%	-0,008%
PRC-16	-0,163%	-0,559%	0,032%
PRC-17	-0,204%	-0,618%	0,086%
PRC-18	-0,255%	-0,395%	0,131%
PRC-19	0,049%	-0,106%	0,348%
PRC-20	0,157%	-0,143%	0,548%

Tabla H-3: Error absoluto promedio (MAE) en TIR por panel de datos
modelo de Vasicek.

	P1	P2	P3
PRC-1	0,484%	0,466%	0,270%
PRC-2	0,391%	0,377%	0,218%
PRC-3	0,281%	0,291%	0,156%
PRC-4	0,216%	0,220%	0,154%
PRC-5	0,181%	0,203%	0,155%
PRC-6	0,135%	0,145%	0,110%
PRC-7	0,115%	0,132%	0,090%
PRC-8	0,088%	0,116%	0,064%
PRC-9	0,065%	0,073%	0,056%
PRC-10	0,046%	0,050%	0,050%
PRC-11	0,050%	0,049%	0,056%
PRC-12	0,042%	0,051%	0,045%
PRC-13	0,044%	0,058%	0,042%
PRC-14	0,043%	0,064%	0,036%
PRC-15	0,049%	0,105%	0,038%
PRC-16	0,050%	0,109%	0,036%
PRC-17	0,061%	0,110%	0,036%
PRC-18	0,063%	0,087%	0,030%
PRC-19	0,068%	0,083%	0,049%
PRC-20	0,079%	0,096%	0,071%

Tabla H-4: Error absoluto promedio (MAE) en precio por panel de datos modelo de Vasicek.

	P1	P2	P3
PRC-1	0,357%	0,330%	0,202%
PRC-2	0,400%	0,376%	0,226%
PRC-3	0,418%	0,434%	0,232%
PRC-4	0,417%	0,415%	0,305%
PRC-5	0,423%	0,471%	0,368%
PRC-6	0,371%	0,397%	0,311%
PRC-7	0,368%	0,414%	0,300%
PRC-8	0,311%	0,397%	0,236%
PRC-9	0,250%	0,278%	0,226%
PRC-10	0,196%	0,214%	0,219%
PRC-11	0,236%	0,230%	0,272%
PRC-12	0,214%	0,255%	0,235%
PRC-13	0,240%	0,310%	0,235%
PRC-14	0,253%	0,364%	0,212%
PRC-15	0,305%	0,626%	0,243%
PRC-16	0,324%	0,689%	0,239%
PRC-17	0,409%	0,723%	0,245%
PRC-18	0,440%	0,602%	0,212%
PRC-19	0,504%	0,604%	0,371%
PRC-20	0,601%	0,718%	0,558%

Tabla H-5: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en TIR por panel de datos modelo de Vasicek.

	P1	P2	P3
PRC-1	0,705%	0,608%	0,346%
PRC-2	0,522%	0,506%	0,277%
PRC-3	0,365%	0,375%	0,202%
PRC-4	0,288%	0,290%	0,205%
PRC-5	0,246%	0,260%	0,202%
PRC-6	0,178%	0,185%	0,134%
PRC-7	0,157%	0,178%	0,112%
PRC-8	0,121%	0,160%	0,083%
PRC-9	0,103%	0,123%	0,071%
PRC-10	0,066%	0,073%	0,062%
PRC-11	0,068%	0,068%	0,076%
PRC-12	0,059%	0,069%	0,063%
PRC-13	0,057%	0,072%	0,058%
PRC-14	0,061%	0,087%	0,050%
PRC-15	0,074%	0,137%	0,050%
PRC-16	0,083%	0,155%	0,048%
PRC-17	0,092%	0,157%	0,049%
PRC-18	0,087%	0,121%	0,044%
PRC-19	0,087%	0,104%	0,060%
PRC-20	0,097%	0,115%	0,085%

Tabla H-6: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) en precio por panel de datos modelo de Vasicek.

	P1	P2	P3
PRC-1	0,526%	0,440%	0,254%
PRC-2	0,527%	0,496%	0,285%
PRC-3	0,536%	0,552%	0,302%
PRC-4	0,556%	0,549%	0,411%
PRC-5	0,570%	0,600%	0,480%
PRC-6	0,485%	0,502%	0,380%
PRC-7	0,492%	0,550%	0,373%
PRC-8	0,421%	0,539%	0,306%
PRC-9	0,386%	0,452%	0,287%
PRC-10	0,279%	0,305%	0,273%
PRC-11	0,323%	0,314%	0,374%
PRC-12	0,299%	0,344%	0,331%
PRC-13	0,313%	0,389%	0,331%
PRC-14	0,353%	0,490%	0,297%
PRC-15	0,446%	0,805%	0,317%
PRC-16	0,529%	0,980%	0,315%
PRC-17	0,607%	1,021%	0,337%
PRC-18	0,601%	0,833%	0,312%
PRC-19	0,644%	0,758%	0,462%
PRC-20	0,741%	0,857%	0,672%

H.2 Errores estimación paneles de datos filtrados

Tabla H-7: Error promedio en TIR por panel de datos filtrados modelo de Vasicek.

	P1F	P2F	P3F
PRC-1	0,019%	0,084%	-0,219%
PRC-2	0,003%	0,071%	-0,114%
PRC-3	0,014%	0,054%	-0,008%
PRC-4	-0,016%	0,016%	-0,023%
PRC-5	0,007%	-0,005%	0,017%
PRC-6	0,014%	-0,032%	0,086%
PRC-7	-0,019%	-0,090%	0,078%
PRC-8	-0,009%	-0,087%	0,046%
PRC-9	-0,027%	-0,066%	0,037%
PRC-10	0,004%	-0,008%	0,045%
PRC-11	0,024%	0,029%	0,046%
PRC-12	0,021%	0,026%	0,038%
PRC-13	0,029%	0,039%	0,035%
PRC-14	0,022%	0,047%	0,018%
PRC-15	0,015%	0,067%	0,000%
PRC-16	0,023%	0,086%	-0,008%
PRC-17	0,030%	0,096%	-0,019%
PRC-18	0,034%	0,068%	-0,019%
PRC-19	-0,010%	0,020%	-0,049%
PRC-20	-0,034%	0,013%	-0,079%

Tabla H-8: Error promedio en precio por panel de datos filtrados modelo de Vasicek.

	P1F	P2F	P3F
PRC-1	-0,009%	-0,064%	0,162%
PRC-2	0,000%	-0,064%	0,109%
PRC-3	-0,027%	-0,084%	0,008%
PRC-4	0,030%	-0,034%	0,044%
PRC-5	-0,019%	0,006%	-0,040%
PRC-6	-0,044%	0,086%	-0,249%
PRC-7	0,055%	0,282%	-0,260%
PRC-8	0,025%	0,297%	-0,167%
PRC-9	0,098%	0,247%	-0,149%
PRC-10	-0,021%	0,030%	-0,198%
PRC-11	-0,119%	-0,139%	-0,229%
PRC-12	-0,111%	-0,132%	-0,200%
PRC-13	-0,162%	-0,210%	-0,198%
PRC-14	-0,125%	-0,264%	-0,108%
PRC-15	-0,091%	-0,400%	-0,003%
PRC-16	-0,145%	-0,543%	0,048%
PRC-17	-0,192%	-0,629%	0,129%
PRC-18	-0,230%	-0,466%	0,139%
PRC-19	0,086%	-0,138%	0,375%
PRC-20	0,271%	-0,090%	0,625%

Tabla H-9: Error absoluto promedio (MAE) en TIR por panel de datos filtrados modelo de Vasicek.

	P1F	P2F	P3F
PRC-1	0,414%	0,351%	0,308%
PRC-2	0,387%	0,362%	0,238%
PRC-3	0,264%	0,242%	0,169%
PRC-4	0,199%	0,186%	0,171%
PRC-5	0,166%	0,174%	0,162%
PRC-6	0,131%	0,143%	0,132%
PRC-7	0,112%	0,143%	0,098%
PRC-8	0,082%	0,119%	0,071%
PRC-9	0,065%	0,083%	0,062%
PRC-10	0,043%	0,051%	0,054%
PRC-11	0,048%	0,045%	0,056%
PRC-12	0,037%	0,041%	0,045%
PRC-13	0,041%	0,052%	0,043%
PRC-14	0,039%	0,055%	0,037%
PRC-15	0,041%	0,075%	0,039%
PRC-16	0,046%	0,104%	0,035%
PRC-17	0,057%	0,106%	0,040%
PRC-18	0,060%	0,087%	0,033%
PRC-19	0,062%	0,076%	0,052%
PRC-20	0,070%	0,084%	0,080%

Tabla H-10: Error absoluto promedio (MAE) en precio por panel de datos filtrados modelo de Vasicek.

	P1F	P2F	P3F
PRC-1	0,310%	0,254%	0,231%
PRC-2	0,388%	0,354%	0,247%
PRC-3	0,398%	0,364%	0,254%
PRC-4	0,387%	0,354%	0,339%
PRC-5	0,389%	0,405%	0,382%
PRC-6	0,365%	0,395%	0,374%
PRC-7	0,361%	0,451%	0,327%
PRC-8	0,291%	0,407%	0,262%
PRC-9	0,254%	0,318%	0,251%
PRC-10	0,184%	0,216%	0,238%
PRC-11	0,229%	0,211%	0,274%
PRC-12	0,191%	0,204%	0,235%
PRC-13	0,226%	0,278%	0,242%
PRC-14	0,229%	0,313%	0,219%
PRC-15	0,254%	0,447%	0,250%
PRC-16	0,295%	0,660%	0,228%
PRC-17	0,381%	0,698%	0,278%
PRC-18	0,418%	0,601%	0,236%
PRC-19	0,460%	0,558%	0,401%
PRC-20	0,539%	0,633%	0,632%

Tabla H-11: Raíz del error cuadrático promedio (RMSE) en TIR por panel de datos filtrados modelo de Vasicek

	P1F	P2F	P3F
PRC-1	0,586%	0,540%	0,389%
PRC-2	0,541%	0,560%	0,300%
PRC-3	0,340%	0,328%	0,217%
PRC-4	0,265%	0,237%	0,219%
PRC-5	0,218%	0,217%	0,203%
PRC-6	0,163%	0,168%	0,151%
PRC-7	0,139%	0,171%	0,117%
PRC-8	0,106%	0,150%	0,091%
PRC-9	0,095%	0,124%	0,077%
PRC-10	0,064%	0,076%	0,066%
PRC-11	0,065%	0,060%	0,078%
PRC-12	0,053%	0,056%	0,064%
PRC-13	0,054%	0,065%	0,060%
PRC-14	0,056%	0,077%	0,051%
PRC-15	0,057%	0,093%	0,051%
PRC-16	0,075%	0,147%	0,046%
PRC-17	0,084%	0,147%	0,052%
PRC-18	0,080%	0,118%	0,047%
PRC-19	0,080%	0,095%	0,064%
PRC-20	0,086%	0,100%	0,093%

Tabla H-12: Raíz del error cuadrático promedio (RMSE) en precio por panel de datos filtrados modelo de Vasicek

	P1F	P2F	P3F
PRC-1	0,455%	0,411%	0,286%
PRC-2	0,526%	0,527%	0,310%
PRC-3	0,507%	0,484%	0,326%
PRC-4	0,515%	0,456%	0,438%
PRC-5	0,509%	0,502%	0,479%
PRC-6	0,452%	0,461%	0,428%
PRC-7	0,446%	0,538%	0,393%
PRC-8	0,376%	0,508%	0,335%
PRC-9	0,363%	0,463%	0,311%
PRC-10	0,270%	0,311%	0,289%
PRC-11	0,316%	0,283%	0,389%
PRC-12	0,273%	0,276%	0,334%
PRC-13	0,300%	0,351%	0,343%
PRC-14	0,327%	0,434%	0,309%
PRC-15	0,355%	0,551%	0,326%
PRC-16	0,477%	0,931%	0,303%
PRC-17	0,555%	0,952%	0,357%
PRC-18	0,557%	0,809%	0,338%
PRC-19	0,595%	0,696%	0,489%
PRC-20	0,669%	0,751%	0,734%

ANEXO I: RELACIÓN ENTRE VOLATILIDAD DE LOS RETORNO Y VOLATILIDAD DE LA TIR DE UN BONO CON CUPONES

Una de las ventajas del modelo de Vasicek es su facilidad analítica para deducir precios de bonos, estructuras de volatilidades y opciones europeas. En el capítulo V de este trabajo se desarrolla la derivación del modelo de Vasicek y se obtienen fórmulas cerradas para las volatilidades de los retornos de bonos cero cupón. En el análisis de volatilidades de cambios en TIR que se realiza en el capítulo VI de esta tesis es necesario contar con una fórmula cerrada para la volatilidad teórica. En este anexo se demuestra la relación que existe entre la volatilidad teórica de TIR y de retornos de precio.

En un modelo de Vasicek la variable de estado es la tasa instantánea r . Los precios de los bonos estarán en función de esta variable de estado y en consecuencia su TIR. Por el lema de Ito la volatilidad de los retornos de precio de un bono es:

$$s_p = -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{s}{P} \quad (I.1)$$

Análogamente la volatilidad de los cambios en TIR (y) queda definida por:

$$s_y = \frac{\partial y}{\partial r} s \quad (I.2)$$

En el caso la volatilidad de los retornos existe una fórmula directa que se obtiene del precio teórico de un bono con cupones bajo el modelo de Vasicek. El precio del bono queda definido por:

$$P = \sum_{i=1}^n C_i e^{A(t, T_i) - B(t, T_i)r} \quad (I.3)$$

Éste se deriva con respecto a la variable de estado para obtener:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\sum_{i=1}^n B(t, T_i) C_i e^{A(t, T_i) - B(t, T_i)r} \quad (I.4)$$

Al reemplazar este resultado en (I.1) se obtiene la fórmula cerrada para la volatilidad de los retornos.

El precio de un PRC se define en función de su TIR:

$$P = \sum_{i=1}^n C_i e^{-yT_i} \quad (\text{I.5})$$

Como no existe una solución analítica cerrada para la TIR se busca una solución mediante derivadas parciales del precio con respecto a la variable de estado:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial y}{\partial r} \sum_{i=1}^n T_i C_i e^{-yT_i} \quad (\text{I.6})$$

La duración de un bono con cupones se define como:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n C_i T_i e^{-yT_i}}{P} \quad (\text{I.7})$$

Reemplazando en (I.6) se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial y}{\partial r} P D \quad (\text{I.8})$$

Las ecuaciones (I.1) y (I.2) se reemplazan en la anterior para obtener:

$$\mathbf{s}_y = \frac{\mathbf{s}_P}{D} \quad (\text{I.9})$$

o bien,

$$\mathbf{s}_y = \frac{1}{D} \frac{\sum_{i=1}^n B(t, T_i) C_i e^{A(t, T_i) - B(t, T_i)r}}{P} \quad (\text{I.10})$$

Con esta solución se tiene la volatilidad teórica de la TIR de un bono con cupones como un PRC.