

# Investments

Modelo Nelson-Siegel

# Temas a revisar

- Derivación de estructura de tasas de interés
  - Modelo Nelson-Siegel (1987)
- Calibración
  - Utilizando datos US Treasuries
- Valoración de Bonos

# Modelo Nelson-Siegel

- La metodología de Bootstrapping induce a tasas forward anormales (la curva o estructura de tasas forward implícita es irregular).
- El modelo de Nelson-Siegel resuelve el problema asumiendo que la tasa corta (short rate) es descrita por una ecuación diferencial, y que por tanto la curva forward es la solución de dicha ecuación. La solución (curva forward) es una función suave y continua.
- Más aún, la curva o estructura de tasas captura las regularidades o hechos estilizados encontrados en los diferentes mercados

# Derivación de la curva de rendimientos

Sea  $f(t)$  la tasa forward instantánea para la fecha  $t$ , tal que

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \beta_2 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

con  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\tau$ , constantes

La tasa de rendimiento o yield to maturity  $y(t)$  para la fecha  $t$ , se obtiene sumando las tasas forward desde el tiempo 0 (hoy) hasta la madurez  $t$ , es decir

$$y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds$$

haciendo

$$a = \frac{1}{\tau}$$

Tenemos que

$$y(t) = \frac{1}{t} \left\{ \underbrace{\int_0^t \beta_0 ds}_A + \beta_1 \underbrace{\int_0^t e^{-as} ds}_B + \beta_2 \underbrace{\int_0^t as \cdot e^{-as} ds}_C \right\}$$

$$A \quad : \quad \int_0^t \beta_0 ds = \beta_0 \Big|_0^t = \beta_0 t$$

$$B \quad : \quad \int_0^t e^{-as} ds = -\frac{1}{a} e^{-as} \Big|_0^t = -\frac{1}{a} (e^{-at} - 1)$$

C :  $\int_0^t as \cdot e^{-as} ds \rightarrow$  Integrar por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = ax \quad du = a$$

$$dv = e^{-ax} \quad v = -\frac{1}{a} e^{-ax}$$

luego

$$\int_0^t as \cdot e^{-as} ds = -se^{-as} + \frac{1}{a} \int_0^t e^{-as} ds$$

$$= \left( -se^{-as} - \frac{1}{a} e^{-as} \right) \Big|_0^t$$

$$= \left( \frac{1 - e^{-at}}{at} - e^{-at} \right)$$

... sustituyendo las integrales en  $y(t)$

$$y(t) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-at}}{at} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-at}}{at} - e^{-at} \right)$$

o bien, reordenando terminos y reemplazando  $a = 1/\tau$

$$y(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot (1 - \exp(-t / \tau)) / (t / \tau) - \beta_2 \exp(-t / \tau)$$

Esta función captura varios hechos empíricamente observados en el mercado

# Casos límites de $y(t)$

Los límites  $y(t)$  corresponden a las aproximaciones de la tasa de corto y largo plazo.

Corto plazo

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \beta_0 + \beta_1$$

Largo plazo

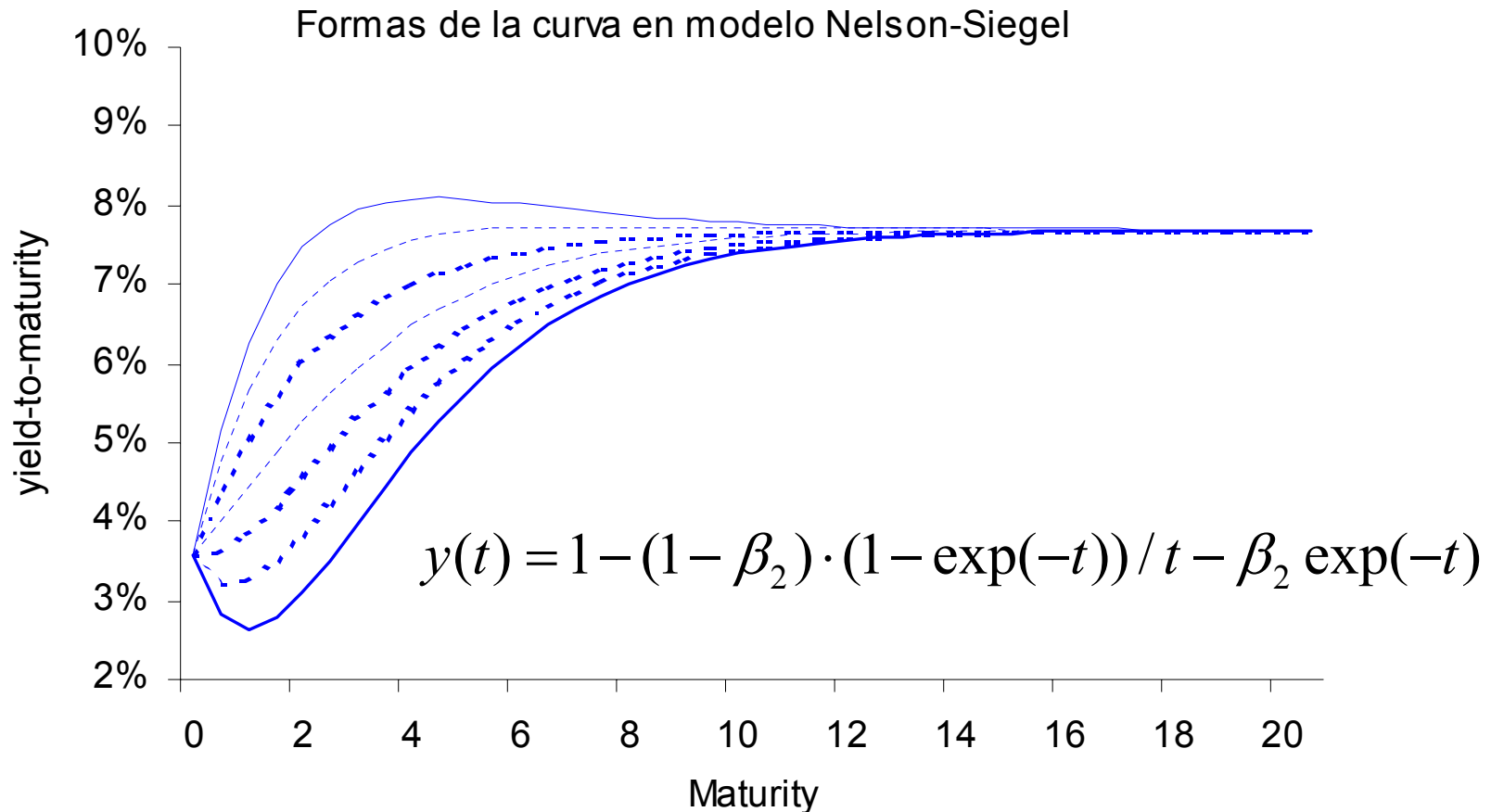
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \beta_0$$



# Formas típicas de la curva $y(t)$

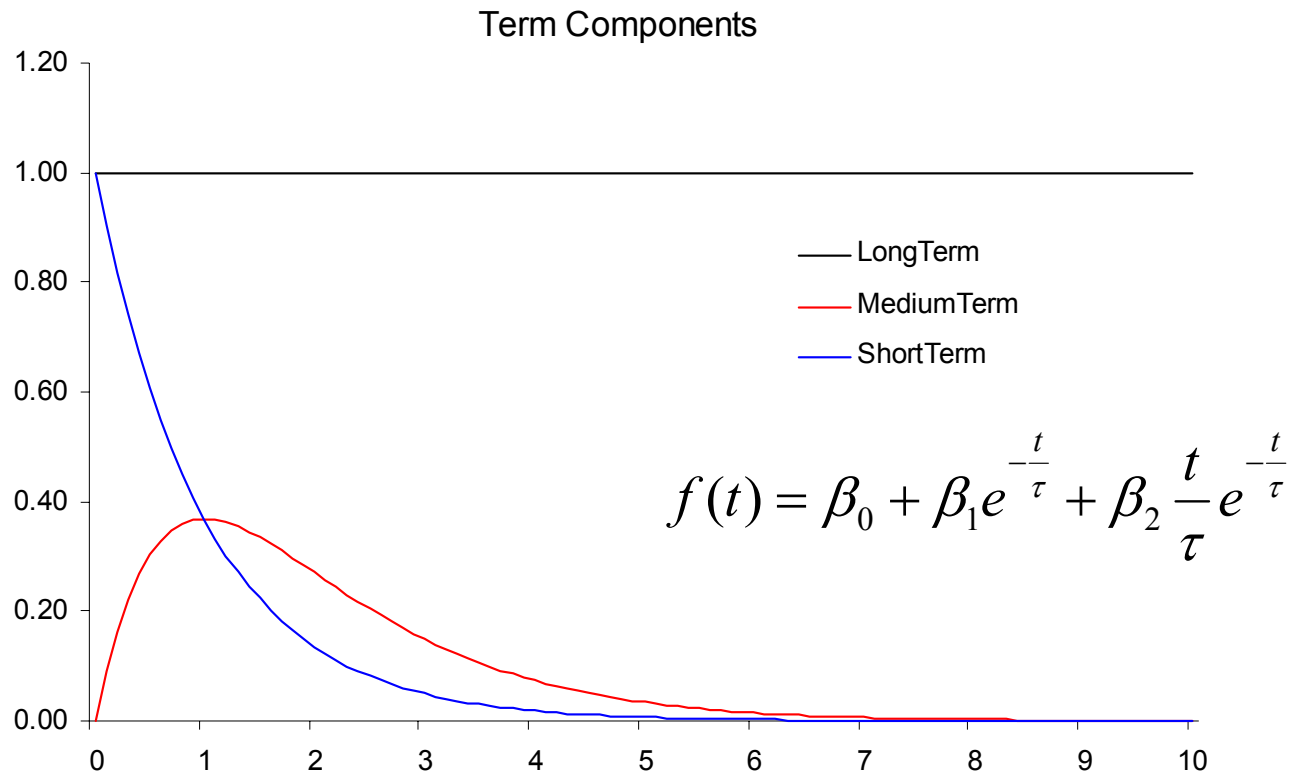
La función  $y(t)$  puede capturar varias formas típicas de la curva de rendimientos, dado una elección (valores) de los parámetros:

$\beta_0 = 1$ ,  $(\beta_0 + \beta_1) = 0$  y  $\tau = 1$



# Descomposición de $f(t)$ en componentes

Los parámetros estimados pueden ser interpretados como la intensidad de tres componentes (funciones): corto, mediano y largo plazo.



# Descomposición en componentes

Los componentes corresponden a los regresores en el modelo, y por lo tanto, dependiendo de los valores que tomen los parámetros, es posible reproducir varias “formas” de la curva como una combinación lineal de componentes de corto, mediano y largo plazo.

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \beta_2 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- 1 :Componente de largo plazo es constante
- $t \times \exp(-t)$  :Componente de mediano plazo comienza a crecer desde cero y luego decrece hasta cero nuevamente
- $\exp(-t)$  :Componente de corto plazo decae fuertemente desde uno hasta cero

# Descomposición de $y(t)$ en componentes

En el caso de la curva de rendimientos, la podemos reescribir como

$$y(t) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}{t/\tau} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}{t/\tau} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Nuevamente la curva de rendimientos corresponderá a la suma ponderada de los 3 componentes: corto, mediano y largo plazo.

$$\left\{ \left( \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}{t/\tau} \right), \left( \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}{t/\tau} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), 1 \right\}$$

# Curva de rendimientos = suma ponderada de componentes

Para explicar la forma de una curva determinada, sólo necesitamos elegir apropiadamente el conjunto de parámetros (intensidades para cada componente) asociados a cada componente.

Nelson-Siegel argumentan que es posible estimar la curva mediante mínimos cuadrados lineales (LS) para una elección arbitraria del parámetro  $\tau$ .

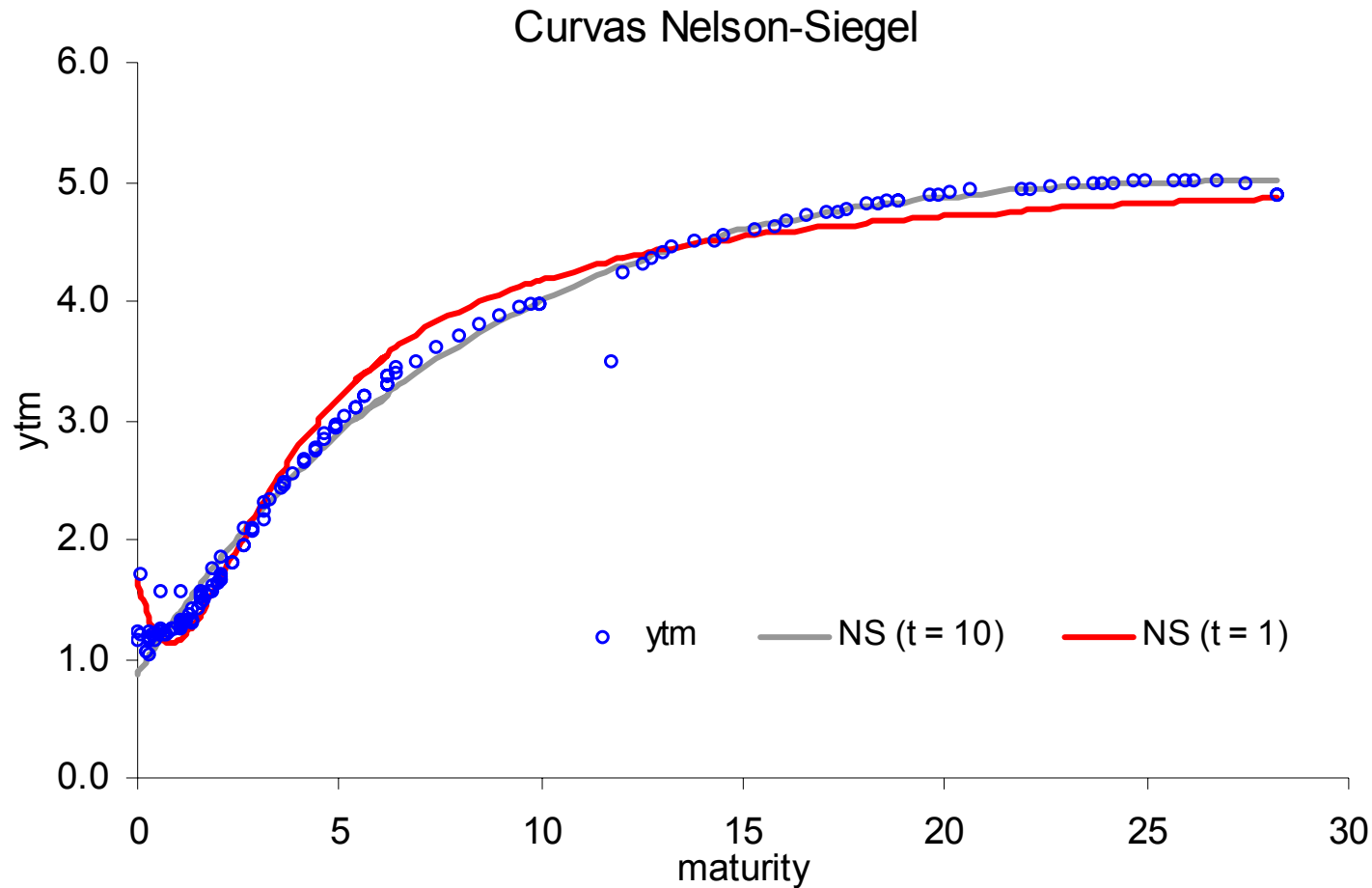
Es recomendable hacer un grid de valores para  $\tau$ , y luego escoger la mejor estimación en base a un criterio cualquiera.

# Elección de $\tau$

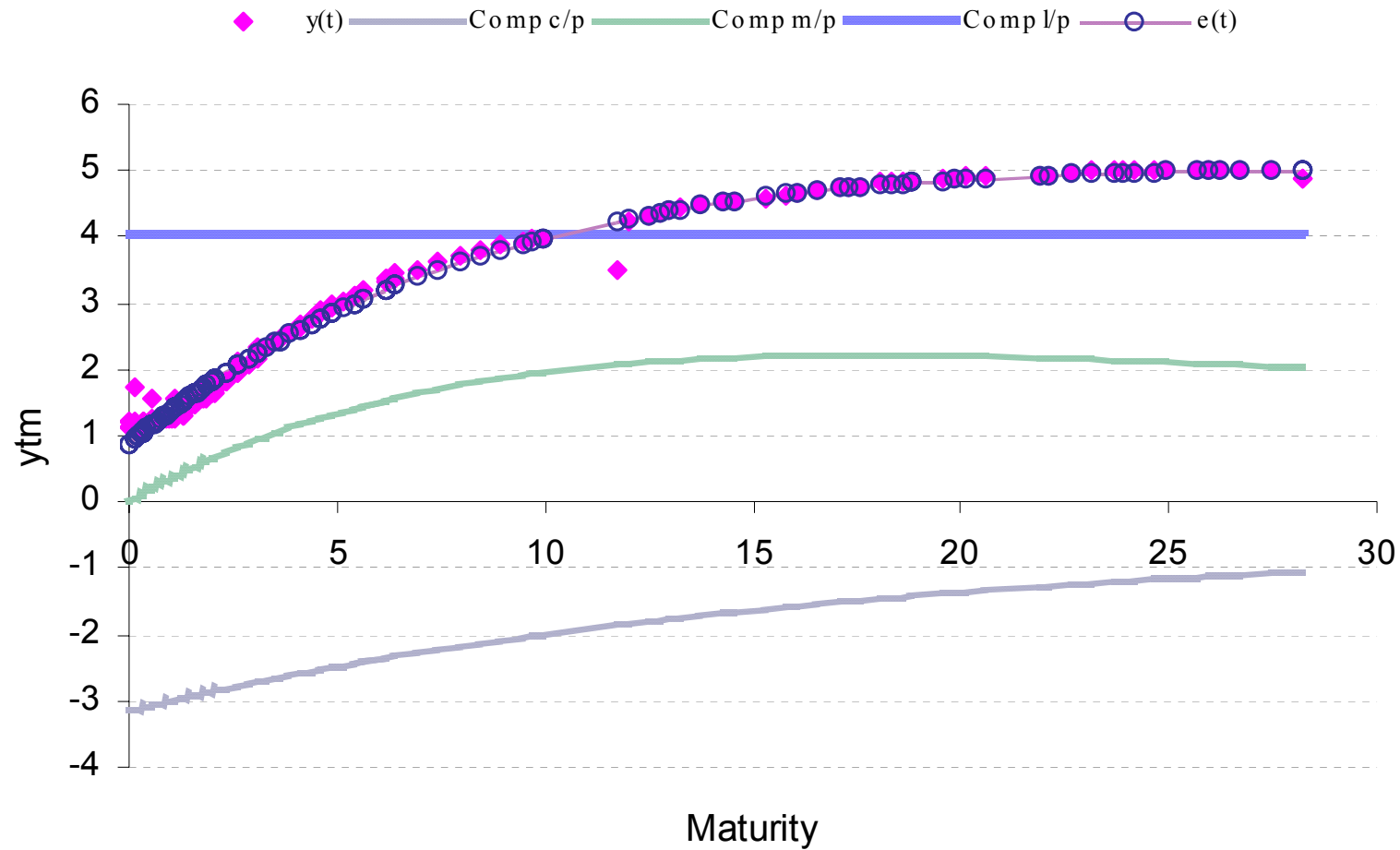
Es importante notar que  $\tau$ , determina la tasa a la cual los regresores decaen a cero.

- valores pequeños de  $\tau$  (decay rápido de los regresores), y luego tal curva ajustará mejor en la parte corta de la curva, a expensas de un fit deficiente en la parte larga de la curva.
- valores altos para el parámetro  $\tau$  ajustará mejor a las tasas largas, perdiendo ajuste en la parte corta de la curva.

# Ajuste para dos valores de $\tau$ ( $\tau = 1$ y $\tau = 10$ )



# Descomposición de la curva para $\tau = 10$





# Consideraciones

- Las curvas no se ajustan a las observaciones en forma perfecta... No es el objetivo de esta metodología: una explicación es que algunas tasas pueden estar reflejando costos de transacción específicos para ciertas maturities.
- La metodología tiende a capturar las discrepancias sistemáticas e idiosincráticas.
- Los residuos muestran cierta dependencia con la madurez, luego no es posible aplicar directamente test estadísticos

# Criterios para elección de curvas

- Flexibilidad : posibilidad de ajustar a otras curvas de tasas de interés.
- Número de factores : dimensionalidad
- Regularidad : suavidad de la curva
- Consistencia : comparación entre familia de curva escogida versus curvas observadas

# Calibración y Valoración de Bonos

Ver archivo EjemploNS.xls