

## Clase Auxiliar IN759 09 de Septiembre 2005

Pablo Hernández Lagos

1. **Trabajo y Ocio** (P#2 Control 2, 2002) Considere el siguiente modelo de crecimiento, que incluye la decisión trabajo-ocio e introduce de manera sencilla capital humano. Las familias deben decidir su dotación de tiempo entre trabajo ( $l_t$ ), educación ( $e_t$ ) y ocio ( $1-e_t-l_t$ ). El tiempo de ocio entra en la función de utilidad de la siguiente manera:

$$u(c_t, l_t, e_t) = \log c_t + \log(1 - e_t - l_t) \quad (1)$$

Las familias usan el tiempo de educación para acumular capital humano ( $h_t$ ) de acuerdo a:

$$h_{t+1} = (1 - \delta)h_t + e_t \quad (2)$$

y rentan este capital (más su trabajo no calificado  $l_t$ ) a las firmas. La función de producción (en forma intensiva) es:

$$f(h_t, l_t) = h_t^\alpha l_t^{1-\alpha} \quad (3)$$

y como no existe capital físico ni inversión, todo el producto va destinado al consumo. Por simplicidad, asuma que no hay crecimiento de la población ni progreso técnico.

- a) Defina un Equilibrio Competitivo Secuencial para esta economía.
- b) Caracterice lo mejor posible el Equilibrio Competitivo.
- c) Encuentre los valores de estado estacionario (EE) de  $h^*, l^*, c^*$  y  $e^*$ .

Suponga ahora que existe un gobierno, el cual quiere fomentar la educación en esta economía. Para ello, ofrece un subsidio a las familias proporcional al tiempo dedicado a educarse, subsidio que es financiado mediante un impuesto a suma alzada (*lump sum*) a las mismas familias.

- d) Defina el nuevo Equilibrio Competitivo para esta economía.
- e) Caracterice lo mejor posible el nuevo Equilibrio Competitivo.

- f)* Encuentre los nuevos valores de EE de  $h^*$ ,  $l^*$ ,  $c^*$  y  $e^*$ . Compare sus resultados con los obtenidos en (c) y evalúe la eficacia del subsidio educativo.

## Solución

- a) Un Equilibrio General Competitivo Secuencial (EGCS) consiste en precios al pago de los factores de producción y en asignaciones para las variables de decisión de los problemas del consumidor y la firma representativa<sup>1</sup>. Luego, para esta economía un EGCS quedará descrito por: (1) precios  $w_t$  (salario) y  $r_t$  (precio de arriendo del capital humano) y (2) asignaciones para las cantidades  $c_t$ ,  $e_t$ ,  $l_t$ ,  $y_t$  y  $h_t$  tales que:

- 1) Dados los precios  $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$  la secuencia  $\{c_t, e_t, l_t^s, h_t^s\}_{t=0}^{\infty}$  resuelve el problema de las familias:

$$\max_{s.a.} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log c_t + \log(1 - e_t - l_t^s)]$$

$$\begin{aligned} c_t &= w_t l_t^s + r_t h_t^s & \forall t & \quad (RP) \\ h_{t+1}^s &= (1 - \delta) h_t^s + e_t & \forall t & \quad (R. \text{ Dinámica}) \\ c_t, l_t^s, e_t, h_{t+1}^s &\geq 0 & \forall t \geq 0 \\ e_t + l_t^s &\leq 1 & \forall t \\ h_0 &> 0 \end{aligned}$$

- 2) En cada período  $t$ , dados los precios  $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$ : el producto, la demanda por capital humano y trabajo  $\{y_t, l_t^d, h_t^d\}_{t=0}^{\infty}$  resuelven el problema de la firma:

$$\begin{aligned} \max_{s.a.} \quad & y_t - w_t l_t^d - r_t h_t^d \\ y_t &= (h_t^d)^\alpha (l_t^d)^{1-\alpha} & \forall t & \quad (R. \text{ Tecnológica}) \\ l_t^d, h_t^d &\geq 0 & \forall t \end{aligned}$$

- 3) Los mercados cierran en cada período, *i.e.*:

$$\begin{aligned} y_t &= c_t & (OA = DA) \\ h_t^s &= h_t^d & (\text{oferta igual demanda en mercado de capital humano}) \\ l_t^s &= l_t^d & (\text{oferta igual demanda en mercado del trabajo}) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Las diferencias entre un Equilibrio General Secuencial y a la Arrow-Debreu consisten en que en el último: (i) se agrega una serie de precios para el (único) bien, (ii) la restricción presupuestaria se expresa en términos del ingreso y el consumo de toda la vida y (iii) el problema de las firmas se resuelve en el instante inicial para toda la vida. Mientras que en el EGCS, no hay precio para el bien, las restricciones se expresan período a período y el problema de las firmas se resuelve secuencialmente.

- b) El EGCS queda caracterizado por la solución del problema de las familias y las firmas. Antes de resolver podemos simplificar un poco el problema, llamemos  $h_t$  al stock de capital humano de equilibrio, *i.e.*  $h_t \equiv h_t^d = h_t^s$ . Análogamente, llamamos  $l_t \equiv l_t^d = l_t^s$ . otra forma de simplificar el problema es ocupar las restricciones para reducir el numero de variables de decisión (al mismo tiempo que el número de restricciones), usando la *RP* eliminamos  $c_t$  y usando la *R. Tecnológica* eliminamos  $y_t$ .

Es conveniente resolver primero el problema de las firmas. Pues, nos dará una guía de la forma de las expresiones que nos gustaría obtener para las variables de decisión de las familias. Como este es un EGCS la firma resuelve en cada período sus demandas óptimas de capital humano ( $h_t$ ) y trabajo no calificado ( $l_t$ ). Las C.P.O. asociadas a cada una de esas variables respectivamente son:

$$\alpha \left( \frac{l_t}{h_t} \right)^{1-\alpha} - r_t = 0 \quad (4)$$

$$(1 - \alpha) \left( \frac{h_t}{l_t} \right)^\alpha - w_t = 0 \quad (5)$$

De (4) y (5) podemos despejar los precios en función de las variables:

$$r_t = \alpha \left( \frac{h_t}{l_t} \right)^{-(1-\alpha)} \quad (6)$$

$$w_t = (1 - \alpha) \left( \frac{h_t}{l_t} \right)^\alpha \quad (7)$$

Lo que nos permitirá obtener un sistema de ecuaciones para las variables y nos da una guía del tipo de expresiones que queremos obtener de aquí en adelante ( $h_t/l_t$ ).

Para este problema de optimización de horizonte infinito en tiempo discreto la herramienta apropiada de resolución es la programación dinámica (PD)<sup>2</sup>. Para resolver el problema de las familias mediante PD seguimos los siguientes 5 pasos: (i) Escribir la función valor, (ii) Escribir la ecuación de Bellman (EB) y la condición

---

<sup>2</sup>Otra forma de resolver es escribiendo el lagrangeano del problema de las familias:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log(w_t l_t + r_t h_t) \log(1 - e_t - l_t)] - \lambda_t [h_{t+1} - (1 - \delta)h_t + e_t]$$

de transversalidad, (iii) Derivar las C.P.O. asociadas a la EB (una por cada variable de control, en este caso  $e_t$  y  $l_t$ ), (iv) Escribir el Teorema de la Envolvente (TE)<sup>3</sup> y (v) Encontrar expresiones para las variables que permitan resolver el EE.

(i) La función valor de este problema corresponde a:

$$v(h_t) = \sup_{\{l_\tau, e_\tau\}_{\tau \geq t}} \sum_{\tau \geq t} \beta^\tau [\log(w_\tau l_\tau + r_\tau h_\tau) + \log(1 - e_\tau - l_\tau)] \quad (8)$$

(ii) Así, la EB se puede corresponde a:

$$v(h_t) = \max_{\{l_t, e_t\}} [\log(w_t l_t + r_t h_t) + \log(1 - e_t - l_t) + \beta v(h_{t+1})] \quad (9)$$

done  $h_{t+1} - (1 - \delta)h_t - e_t = 0$ . Como de costumbre la condición de transversalidad es  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t v(h_t) = 0$ .

(iii) C.P.O.:

$$\frac{\partial v}{\partial l_t} = \frac{w_t}{w_t l_t + r_t h_t} - \frac{1}{1 - e_t - l_t} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial e_t} = -\frac{1}{1 - e_t - l_t} + \beta v'(h_{t+1}) = 0 \quad (11)$$

(iv) TE:

$$v'(h_t) = \frac{\partial u}{\partial h_t}(l_t, e_t) = \frac{r_t}{w_t l_t + r_t h_t} + \frac{1 - \delta}{1 - e_t - l_t} \quad (12)$$

Las C.P.O. para este problema son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial l_t} &= \frac{\beta^t w_t}{w_t l_t + r_t h_t} - \frac{\beta^t}{1 - e_t - l_t} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial e_t} &= -\frac{\beta^t}{1 - e_t - l_t} - \lambda_t = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial h_{t+1}} &= \frac{\beta^{t+1} r_{t+1}}{w_{t+1} l_{t+1} + r_{t+1} h_{t+1}} - \frac{\beta^t}{1 - e_t - l_t} - \lambda_t + \lambda_{t+1}(1 - \delta) = 0 \end{aligned}$$

Notese que se agrega la derivada con respecto a  $h_{t+1}$ . Agregamos la restricción dinámica:

$$h_{t+1} - (1 - \delta)h_t - e_t = 0$$

y la condición de transversalidad,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu_t h_t = 0$  donde  $\nu_t = \prod_{j=t}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}}$

<sup>3</sup>Teorema de la envolvente: cuando la función valor es diferenciable, la derivada de esta con respecto a la(s) variable(s) de estado corresponde a la derivada de la utilidad con respecto a la(s) misma(s) variable(s), *i.e.*  $\frac{\partial v}{\partial h_t} = \frac{\partial u}{\partial h_t}$ .

(v) Para simplificar las expresiones utilizaremos la RP:

$$c_t = w_t l_t + r_t h_t \quad (13)$$

Utilizando la RP (13) podemos reescribir las C.P.O. (10) y (11) como:

$$\frac{w_t}{c_t} = \frac{1}{1 - e_t - l_t} \quad (14)$$

$$\frac{1}{1 - e_t - l_t} = \beta v'(h_{t+1}) \quad (15)$$

Además, podemos reescribir el TE (12) usando (13) y (14) como:

$$v'(h_t) = \frac{r_t}{c_t} + \frac{(1 - \delta)w_t}{c_t} \quad (16)$$

Esta última expresión en (15) y notando que el lado derecho de (14) es igual al lado izquierdo de (15) se obtiene:

$$\frac{w_t}{c_t} = \beta \left( \frac{r_{t+1}}{c_{t+1}} + \frac{(1 - \delta)w_{t+1}}{c_{t+1}} \right) \quad (17)$$

Con lo que obtenemos la ecuación de Euler para este problema:

$$\frac{1}{\beta} \frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{r_{t+1} + (1 - \delta)w_{t+1}}{w_t} \quad (18)$$

De (14) se tiene que:

$$c_t = w_t(1 - e_t - l_t) \quad (19)$$

Despejando  $c_t$  de (19) y (13) se obtiene:

$$w_t(1 - e_t - 2l_t) = r_t h_t \quad (20)$$

Ocupando la *R. Dinámica* para eliminar  $e_t$  y usando un poco de álgebra llegamos a:

$$\frac{1}{l_t} = 2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1 - \delta) \frac{h_t}{l_t} + \frac{r_t}{w_t} \frac{h_t}{l_t} \quad (21)$$

De donde obtenemos una expresión para  $l_t$  del tipo que buscábamos:

$$l_t = \frac{1}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1 - \delta) \frac{h_t}{l_t} + \frac{r_t}{w_t} \frac{h_t}{l_t}} \quad (22)$$

Por otra parte, de (22) multiplicando a ambos lados por  $(h_t/l_t)$  obtenemos una expresión similar para  $h_t$ :

$$h_t = \frac{\frac{h_t}{l_t}}{2 + \frac{h_{t+1}}{l_t} - (1 - \delta) \frac{h_t}{l_t} + \frac{r_t}{w_t} \frac{h_t}{l_t}} \quad (23)$$

El EGCS queda descrito por las ecuaciones (6), (7), (18), (22), (23), la *R. Dinámica* y la condición de cierre  $OA = DA$

c) En EE sabemos que:

$$\begin{aligned} c^* &= c_t = c_{t+1} \\ l^* &= l_t = l_{t+1} \\ h^* &= h_t = h_{t+1} \\ e^* &= e_t = e_{t+1} \end{aligned}$$

De la ecuación de Euler (18) reemplazando las expresiones para  $w_t$  y  $r_t$  de las ecuaciones (7) y (6) se obtiene:

$$\frac{h^*}{l^*} = \frac{\alpha\beta}{(1 - \alpha)[1 - \beta(1 - \delta)]} \quad (24)$$

Esta última expresión en (7):

$$w^* = (1 - \alpha) \left[ \frac{\alpha\beta}{(1 - \alpha)[1 - \beta(1 - \delta)]} \right]^\alpha \quad (25)$$

Analogamente usando (6):

$$r^* = \alpha \left[ \frac{\alpha\beta}{(1 - \alpha)[1 - \beta(1 - \delta)]} \right]^{-(1-\alpha)} \quad (26)$$

Por otra parte (24) en (22) y (23):

$$l^* = \frac{1}{2 + \delta \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (27)$$

$$h^* = \frac{\alpha\beta}{2(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)] + \delta\alpha\beta + \alpha[1-\beta(1-\delta)]} \quad (28)$$

De la *R. Dinámica* en EE se tiene que:

$$e^* = \delta h^* \Rightarrow e^* = \frac{\delta\alpha\beta}{2(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)] + \delta\alpha\beta + \alpha[1-\beta(1-\delta)]}$$

De la condición de  $OA = DA$ , ocupando (24) y (27) finalmente obtenemos:

$$c^* = y^* = \left(\frac{h^*}{l^*}\right)^\alpha l^* = \left(\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]}\right)^\alpha \frac{1}{2 + \delta \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]} + \frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Queda propuesto continuar el ejercicio considerando al gobierno...

## 2. Crecimiento Endógeno

Considere una economía competitiva donde el consumidor-productor representativo vive eternamente y maximiza la siguiente función de utilidad (la población es normalizada a uno y no crece):

$$\int_0^\infty \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \quad (29)$$

La función de producción es la siguiente:

$$y_t = k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} \quad (30)$$

donde  $0 < \alpha < 1$ ,  $y$  es la producción,  $k$  el stock de capital (no se deprecia) y  $g$  el gasto de gobierno (imagine que es infraestructura). El gobierno sigue una política de presupuesto equilibrado con una tasa de impuesto proporcional al ingreso de  $\tau$  (es decir  $g_t = \tau y_t$  para todo  $t$ ).



- a) Calcule la tasa de crecimiento del consumo en estado estacionario como función de  $\tau$  (note que  $y$ ,  $k$  y  $g$  crecen a la misma tasa que  $g$  y usted no necesita demostrarlo). ¿Por qué esta economía puede crecer permanentemente?
- b) Calcule el valor de  $\tau$  que maximiza la tasa de crecimiento de la economía.
- c) Suponga ahora que la economía es dirigida por un planificador central. ¿Cuál es la tasa de crecimiento que él elegiría? (Recuerde que en este caso maximiza utilidad sujeto a la ecuación de acumulación más la restricción de presupuesto del gobierno). Dado  $\tau$ , ¿cuál economía crece más, la de mercado o la planificada? ¿Por qué?