

# **El Modelo de Crecimiento de Solow**

**Macroeconomía II**

**Clase 3**

## **Contenido**

### Hechos estilizados

- USA y Chile: Convergencia y diferencias en ingresos per-capita
- El largo plazo: Kaldor

### El modelo de Solow

- Modelo
- Estado estacionario
- Transición y convergencia

## **Algunas Preguntas**

- ¿ Por qué EEUU es 10 veces más rico que Chile?
- ¿ Por qué Japón es hoy 10 veces más rico que en 1950?
- ¿ Por qué Chile y México tuvieron recuperaciones tan distintas después de la crisis del 82?
- ¿ Por qué desde 1998 Chile ha crecido 4 puntos menos que durante el periodo 1984-1998?

## Alcanzando el Desarrollo

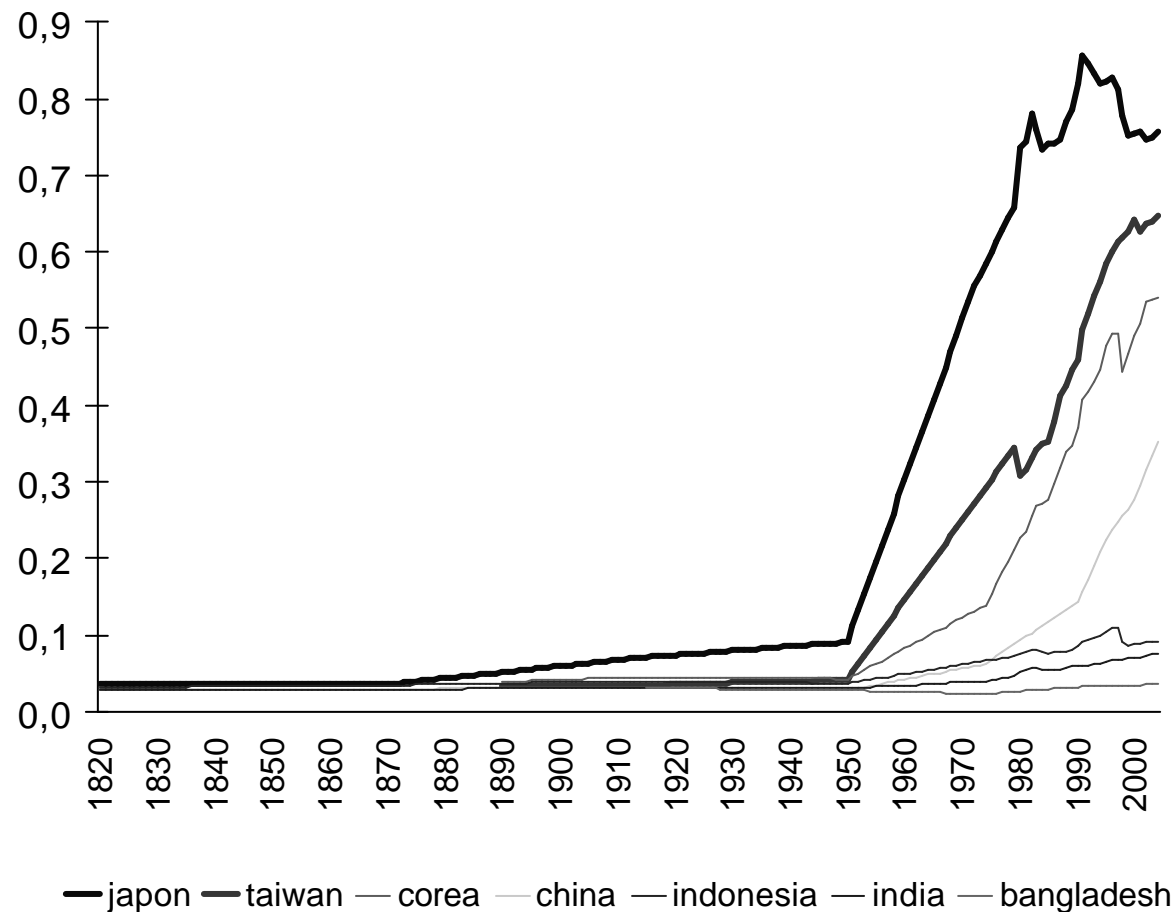
	EEUU		Chile		
	3%	2%	4%	7%	10%
Crecimiento pc					
Y pc 2003	42000	4800	4800	4800	4800
Años para y pc = 42000	0	109,5	55,3	32,1	22,8
PIB en el bicentenario	53204	5624	6569	8247	10289
Años para convergencia		-	224,5	56,9	33

¿ Por qué Chile es más pobre que Estados Unidos?

	Y pc us\$	Si = K/L us\$	Si = A (PTF) us\$
Estados Unidos	39930	39930	39930
Chile	5800	9107	25429
Chile/EEUU	14,5%	22,8%	63,7%

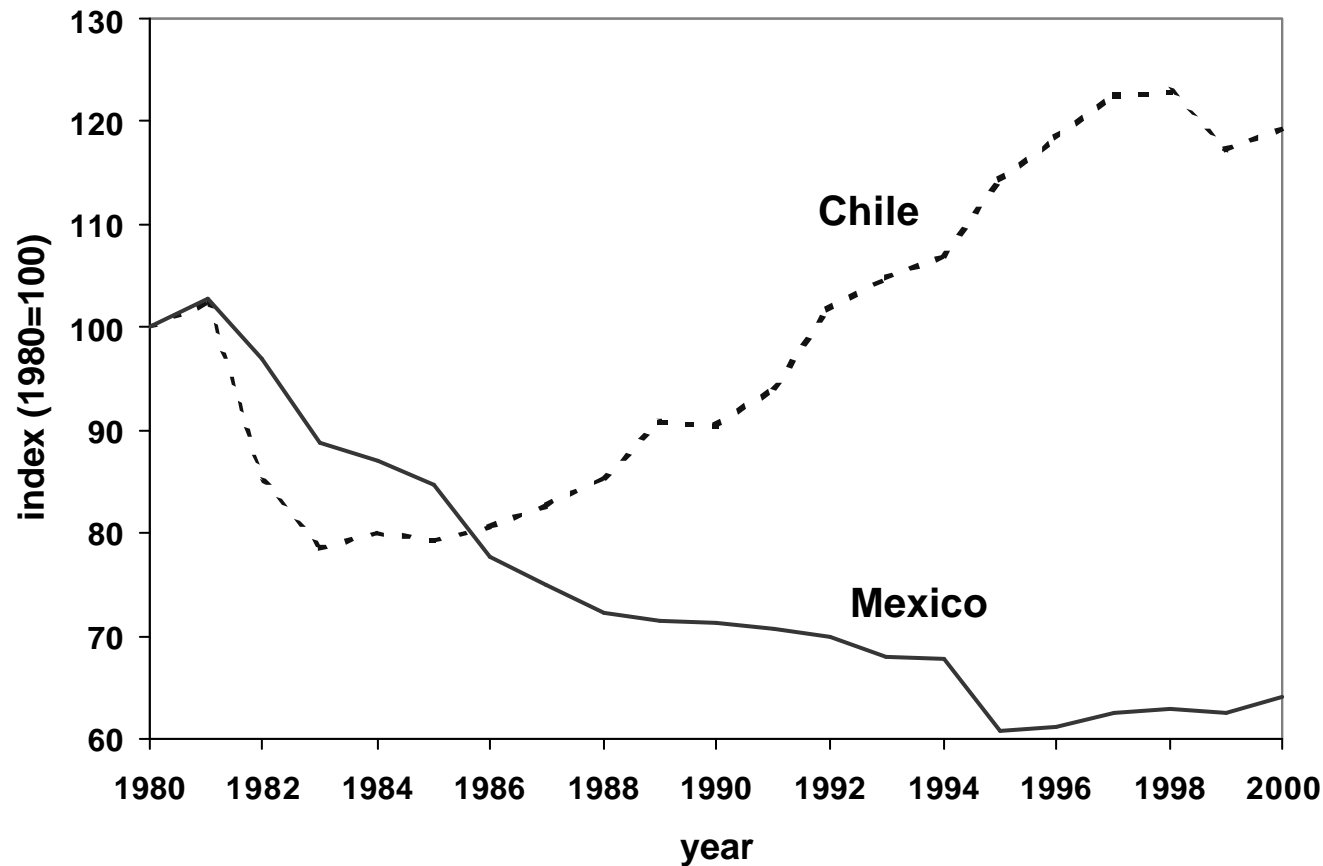
¿ Por qué Japón es más rico hoy que hace 40 años?

**PIB pc PPP relativo a EEUU  
(1820 - 2004)**



¿ Por qué Chile y México tuvieron recuperaciones tan distinta después de la crisis del 82?

PGB / población en edad de trabajar: Chile y México



¿Por qué desde 1998 Chile ha crecido 4 puntos menos que durante el periodo 1984-1998?

Contabilidad de Crecimiento para Chile (%)

Periodo	Y/N	PTF	K/Y	L/N
1981-83	-10.93	-7.81	5.26	-8.38
1983-98	4.85	3.49	-0.37	1.73
1998-04	1.52	2.41	0.63	-1.52



El largo plazo: Kaldor

1.  $Y/L$  crece a una tasa constante.
2.  $K/L$  crece a una tasa constante.
3.  $K/Y$  se mantiene constante.
4.  $rK/Y$  y  $wL/Y$  se mantienen constantes.
5.  $Y/L$  difiere sustancialmente entre países.

## **Modelo de Solow (1956)**

Motivación:

- Explica 1-4 de Kaldor con función de producción neoclásica (Cobb-Douglas)
- No explica hecho 5 con idénticas tecnologías. Necesitamos explicar diferencias en PTF entre países.

**El modelo:**

1.  $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ ,  $F(0)=0$ ,  $F' > 0$ ,  $F'' < 0$ , RCE, Inada.
2.  $L_{t+1} = (1+n) L_t$
3.  $A_{t+1} = (1+g) A_t$
4.  $Y_t = C_t + I_t$
5.  $I_t = sY_t$
6.  $K_{t+1} = (1-\delta) K_t + I_t$

Enfatiza cambios en  $K/L$  durante transición al equilibrio de  $l/p$ . Harrod-Domar usaba proporciones fijas.

Pero, modelo simple: no tiene gobierno, un bien, tasas de ahorro constante (no microfundada), sin distorsiones.

**Estabilidad:** ¿converge el modelo a  $K^*$  globalmente?

Si sí, permite pensar en equilibrio de largo plazo (estado estacionario o crecimiento balanceado)

Modelo en forma intensiva ( $x_t \equiv X_t / A_t L_t \Rightarrow$  unidades efectivas de trabajo):

$$7. y_t = f(k_t), \text{ con } f(k_t) \equiv F(K_t, A_t L_t) / A_t L_t = F(k_t, 1)$$

$$8. y_t = c_t + i_t$$

$$9. i_t = s y_t$$

$$10. k_{t+1}(1+z) = (1-\delta) k_t + i_t, \text{ con } (1+z) \equiv (1+g)(1+n)$$

Para determinar si, dado  $k > 0$ ,  $k$  converge a un único  $k^*$ , analicemos  $\Delta k_t$  :

$$\text{Definiendo } \Phi(k_t) = k_{t+1} - k_t = \frac{sf(k_t) - (d + z)k_t}{1 + z}$$

$$\Rightarrow \Phi(k^*) = 0$$

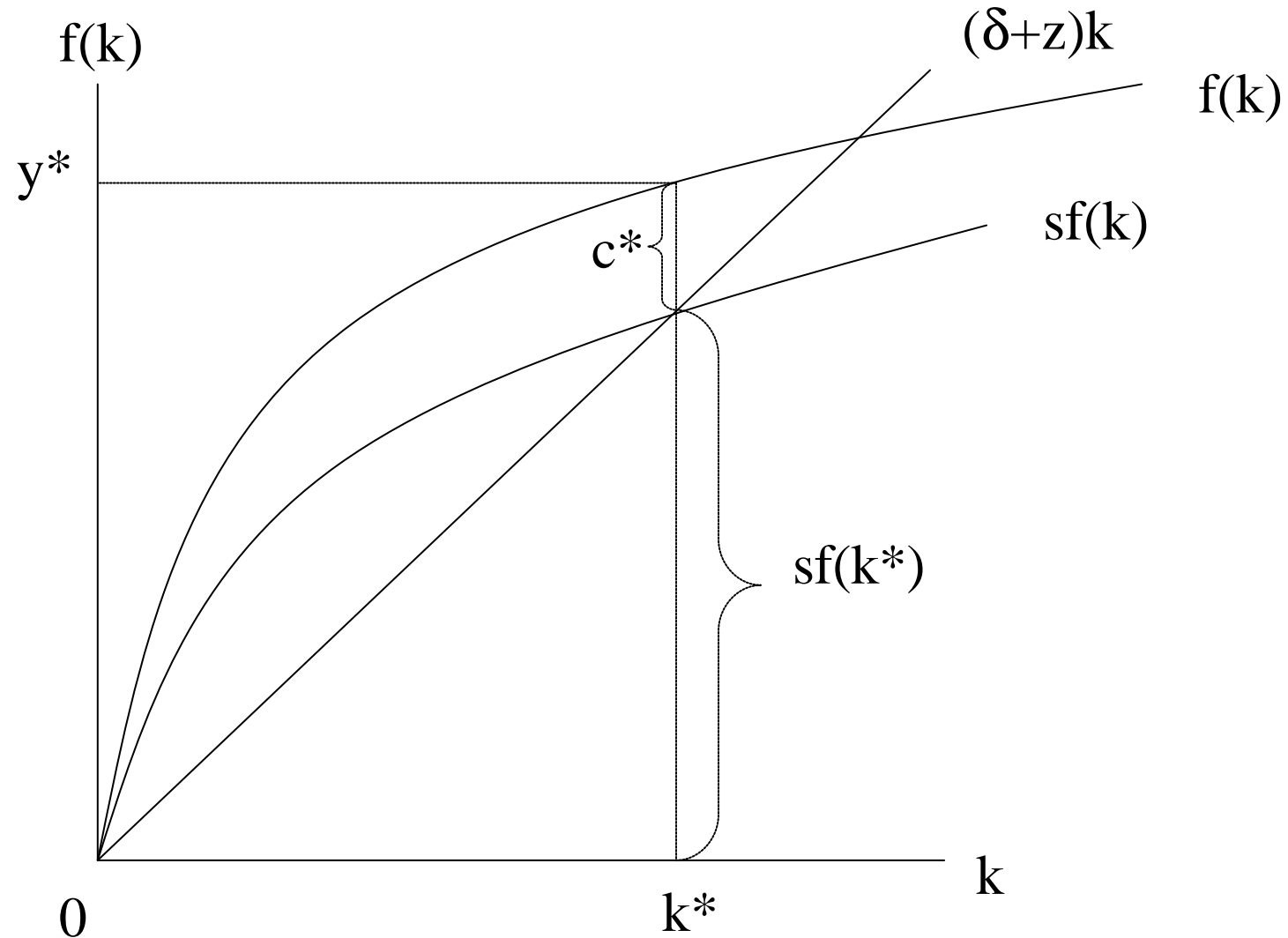
$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi(k_t) > 0, \forall k_t \in (0, k^*)$$

$$\Phi(k_t) < 0, \forall k_t \in (k^*, \infty)$$

(Ver figura para dinámica del capital.)

Dinámica del capital:



## Equilibrio de largo plazo: estado estacionario y crecimiento balanceado

*Definición:* Un Equilibrio de Largo Plazo es un equilibrio en el que las variables crecen a una tasa constante (crecimiento balanceado - si  $g \neq 0$ ) o en el que las variables se mantienen constantes (estado estacionario - si  $g = 0$ ).

Caracterización del equilibrio de L/P:

¿Qué pasa en  $k^*$ ?

L crece a  $(1+n)$  y A crece a  $(1+g)$ .

=> AL crece a  $(1+z)$ , K crece a  $(1+z)$ , Y crece a  $(1+z)$ .

=> y está constante, k está constante.

=> Y/L crece a  $(1+g)$ , K/L crece a  $(1+g)$ .

Kaldor (1 - 4) ok.

Nótese que si  $g = 0$ , las variables per cápita se mantienen constantes en el L/P.

## Convergencia:

Diferenciando  $\Phi(k)/k$  para analizar la velocidad de convergencia

$$\frac{\partial \Phi(k)/k}{\partial k} = \left( \frac{s}{1+z} \right) \frac{(kf' - f)}{k^2} < 0, \forall k$$

=> Si tenemos 2 economías con el mismo crecimiento balanceado (CB) pero con distintos niveles iniciales de  $k_0$  (y de producto), la economía más pobre crecerá a una tasa mayor (“convergencia absoluta”). Si las economías tienen distintos CB (por ejemplo, por distinto  $s$ ), sólo podemos decir que la economía que se encuentra más lejos de su propio CB crecerá más rápido. (“convergencia condicional”)



## **En síntesis:**

- Si todos con el mismo CB, diferencias de  $c/p$  entre países por distintas etapas en su transición, desaparecen.
- Tasa de rendimiento de  $k$  es inferior en países con más  $k/l$ , por lo que existen incentivos a que el  $k$  fluya desde los países ricos hacia los pobres propiciando la convergencia.
- Mayor inversión tiene retorno decreciente y reduce bienestar si requiere menos consumo en el largo plazo.
- En economías abiertas, menores  $y/l$  por inferiores tecnologías, pero interacción propicia el desplazamiento de éstas (rigideces y restricciones institucionales retardan este proceso pero no lo evitan).
- En el  $c/p$  la acumulación puede ser relevante para el crecimiento ( $k/y$  en Chile en los 80s y  $l/n$  en Chile post 1998) pero en el  $l/p$  sólo TFP explica crecimiento.
- Diferencias institucionales (¿por políticas distorsionadoras que impiden adopción de tecnología?) explican diferencias en ingreso per cápita entre países.

## Problemas del modelo:

- (A) s constante: ¿Por qué algunos países ahorran más que otros?
- (B) No explica hecho 5 con idénticas tecnologías: Ejemplo USA - Chile. (nivel de PTF)

CASO 1: Misma función de producción (con  $\alpha=0,3$ ;  $\delta=0.06$ ;  $r_{us} = 0,05$ )

$$Y_j = \gamma K_j^\alpha L_j^{(1-\alpha)} \Rightarrow y_j = \gamma k_j^\alpha$$

$$r_j = \gamma \alpha k_j^{\alpha-1} - \delta$$

$$\Rightarrow k_{us} / k_{ch} = (y_{us} / y_{ch})^{1/\alpha} = 43,89$$

$$\Rightarrow r_{ch} = (r_{us} + \delta) (k_{us} / k_{ch})^{1-\alpha} - \delta = 1,49 \text{ . Es decir, } 149\%$$

## CASO 2: Distinta tecnología entre países

Sistema de 4 incógnitas y 4 ecuaciones:

$$y_j = \gamma_j k_j^{0,3}$$

$$r_j = \gamma_j 0,3 k_j^{-0,7} - 0,06$$

para USA:

$$44.409 = \gamma_{usa} k_{usa}^{0,3}$$

$$0,05 = \gamma_{usa} 0,3 k_{usa}^{-0,7} - 0,06$$

para Chile:

$$14.281 = \gamma_{ch} k_{ch}^{0,3}$$

$$0,08 = \gamma_{ch} 0,3 k_{ch}^{-0,7} - 0,06$$

$$\Rightarrow k_{us} = 123.358, \gamma_{us} = 1318,6, k_{ch} = 30.602, \gamma_{ch} = 644,2$$

$$\Rightarrow k_{us} / k_{ch} = 4,01$$

(C) Enfasis en inversión pero, ¿más inversión o más eficiencia?

Supongamos  $y_j = \gamma_j k_j^{0,3}$  y con  $k/y = 2,5$  y  $\delta=0,06$

Tasas de crecimiento proyectadas si:

	$\uparrow A$			
I/Y	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%
20%	2,1	2,6	3,1	3,6
23%	2,6	3,1	3,6	4,1
26%	3,0	3,5	4,0	4,5
30%	3,4	3,9	4,4	4,9

(D) Contabilidad de crecimiento: crecimiento y cambios en PTF

Supongamos  $\alpha = 0.3$  y  $\delta = 0.06$

Tecnología:  $Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{Y_t}{N_t}\right) = \frac{1}{1-\alpha} \log A_t + \frac{\alpha}{1-\alpha} \log\left(\frac{K_t}{Y_t}\right) + \log\left(\frac{L_t}{N_t}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\log\left(\frac{Y_{t+s}}{N_{t+s}}\right) - \log\left(\frac{Y_t}{N_t}\right)}{s} &= \frac{1}{1-\alpha} \frac{\log A_{t+s} - \log A_t}{s} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\log\left(\frac{K_{t+s}}{Y_{t+s}}\right) - \log\left(\frac{K_t}{Y_t}\right)}{s} \\ &+ \frac{\log\left(\frac{L_{t+s}}{N_{t+s}}\right) - \log\left(\frac{L_t}{N_t}\right)}{s} \end{aligned}$$

### Contabilidad de Crecimiento para Chile (%)

Periodo	Y/N	PTF	K/Y	L/N
1981-83	-10.93	-7.81	5.26	-8.38
1983-98	4.85	3.49	-0.37	1.73
1998-04	1.52	2.41	0.63	-1.52