

**AUXILIAR NÚMERO 3**

1. **Sustitución intertemporal.** Considere la siguiente función de utilidad por período:

$$u(C, 1 - L) = \theta \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} + (1-\theta) \frac{(1-L)^{1-\sigma}}{1-\sigma}. \quad (1)$$

Donde  $\sigma > 0$  y la función es logarítmica cuando  $\sigma = 1$ .

- Encuentre la oferta de trabajo para el problema estático, suponiendo que el salario es  $w$ . ¿Cómo depende el empleo respecto del salario?
  - Considere ahora el problema en dos períodos (con salarios  $w_1$  y  $w_2$ ). Asuma que la tasa de interés es  $r$  y la tasa de descuento en la utilidad es  $\rho$ , además  $r = \rho$ . Encuentre una relación para  $L_1$  y  $L_2$  y discuta como depende del salario, y cuán importante es la sustitución intertemporal del empleo dependiendo del valor de  $\sigma$ .
2. Considere una economía competitiva donde el consumidor-productor representativo vive eternamente y maximiza la siguiente función de utilidad (la población es normalizada a uno y no crece):

$$\int_0^\infty \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \quad (2)$$

La función de producción es la siguiente:

$$y_t = k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} \quad (3)$$

donde  $0 < \alpha < 1$ ,  $y$  es la producción,  $k$  el stock de capital (no se deprecia) y  $g$  el gasto de gobierno (imagine que es infraestructura). El gobierno sigue una política de presupuesto equilibrado con una tasa de impuesto proporcional al ingreso de  $\tau$  (es decir  $g_t = \tau y_t$  para todo  $t$ ).

- Calcule la tasa de crecimiento del consumo en estado estacionario como función de  $\tau$  (note que  $y$ ,  $k$  y  $g$  crecen a la misma tasa que  $g$  y usted no necesita demostrarlo). ¿Por qué esta economía puede crecer permanentemente?
  - Calcule el valor de  $\tau$  que maximiza la tasa de crecimiento de la economía.
  - Suponga ahora que la economía es dirigida por un planificador central. ¿Cuál es la tasa de crecimiento que él elegiría? (Recuerde que en este caso maximiza utilidad sujeto a la ecuación de acumulación más la restricción de presupuesto del gobierno). Dado  $\tau$ , ¿cuál economía crece más, la de mercado o la planificada? ¿Por qué?
3. **Tasa de ahorro en el modelo de Ramsey** En este problema estudiaremos la evolución de la tasa de ahorro a medida que la economía se acerca al estado estacionario. También veremos por qué las tasas de ahorro pueden ser diferentes en el estado estacionario.

Considere las dos ecuaciones diferenciales que caracterizan la dinámica del modelo de Ramsey:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - c - (x + n + \delta)\hat{k} \quad (4)$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x = \frac{1}{\theta} [f'(\hat{k}) - \delta - \rho - x\theta] \quad (5)$$

donde  $\hat{a} = ae^{-xt}$ ,  $x$  es la tasa de crecimiento de la productividad. Para lo que sigue supondremos que la función de producción es Cobb-Douglas, es decir:

$$f(\hat{k}) = A\hat{k}^\alpha$$

A partir de esto responda

- a) ¿Cuál es la tasa de ahorro de la economía en el estado estacionario? Defina la tasa de ahorro como  $s^*$ . De una intuición económica de sus resultados.
- b) Encuentre la expresión de  $\gamma_{\hat{z}}$ , donde  $\hat{z} = \hat{c}/f(\hat{k})$ . Usted debería llegar a la ecuación:

$$\gamma_z = f'(\hat{k}) \left[ z - \frac{\theta - 1}{\theta} \right] + \left( s^* - \frac{1}{\theta} \right) (\delta + \rho + x\theta) \quad (6)$$

En lo que sigue haremos nuestro análisis en términos de la variable  $z$ , recuerde que la tasa de ahorro,  $s$ , es  $s = 1 - z$ .

- c) Analice qué sucede con la variable  $z$  con respecto al tiempo cuando:

- 1)  $s^* = \frac{1}{\theta}$
- 2)  $s^* > \frac{1}{\theta}$
- 3)  $s^* < \frac{1}{\theta}$

Para esto recuerde que todas las variables llegan al estado estacionario.

- d) Finalmente diferencia la ecuación 6 respecto al tiempo y para cada uno de los siguientes casos determine la evolución de la tasa de ahorro hacia el estado estacionario.

- 1)  $s^* = \frac{1}{\theta}$
- 2)  $s^* > \frac{1}{\theta}$
- 3)  $s^* < \frac{1}{\theta}$