

IN 702 MICROECONOMIA II  
 Primavera 2005  
 Clase Auxiliar

1. Considere un principal neutral al riesgo que está tratando de motivar a un agente que puede ser hábil o torpe. Este agente podría esforzarse mucho o poco.

Dependiendo de la habilidad y del esfuerzo del agente, el proyecto puede ser exitoso o fracasar. Las probabilidades de éxito se describen en la siguiente matriz.

		Habilidad	
		Torpe	Hábil
Esfuerzo	Poco	0.3	0.6
	Mucho	0.5	0.9

Un proyecto exitoso ( $E$ ) rinde \$100 y nada si fracasa ( $F$ ). El riesgo le es indiferente al principal. La función de utilidad del agente es  $\sqrt{w} - e$ , donde  $e = 1$  si el agente se esfuerza harto y  $e = 0$  si el agente se esfuerza poco. En todos los casos, la mejor alternativa del agente le deja utilidad igual a 5. (En cada caso suponga que si el agente está indiferente entre acciones, elige la que prefiera el principal).

- a) Suponga que el principal sabe que el agente es torpe. Sea  $w^* : \{0, 1\} \times \{E, F\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$  la función de salario óptima. Explique qué es  $w^*$  y cómo se obtiene.

*Respuesta*

$w^*$  es el contrato que el principal diseña para cada tipo de habilidad y esfuerzo, es decir, es la solución al problema de maximización que resuelve el principal y es, por lo tanto, un contrato óptimo. Es claro que si el esfuerzo es no observable, entonces, la función tiene dominio sólo en el éxito o fracaso del proyecto, pero imponiendo las restricciones de incentivos, el principal sabe que  $e$  será 1. Obviamente, el contrato ofrecido debe ser al menos igual a la utilidad alternativa.

- b) Encuentre el contrato óptimo si el principal sabe que el agente es torpe.

*Respuesta*

Sea  $x^2 = w$ , entonces el principal resuelve:

$$\begin{aligned}
 & \max_{x_E, x_F} 0,5(100 - x_E^2) - 0,5x_F^2 \\
 & \text{sa} \\
 & 0,5x_E + 0,5x_F - 1 \geq 5 \\
 & 0,5x_E + 0,5x_F - 1 \geq 0,3x_E + 0,7x_F
 \end{aligned}$$

Notar que en la función objetivos está implícito que el contrato asegura que el individuo es torpe y va a esforzarse.

Luego, si  $\lambda$  es el multiplicador de la restricción de participación y  $\mu$  el multiplicador asociado a la restricción de compatibilidad de incentivos, las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}-x_E - \lambda - \mu &= 0 \\ -x_F - \lambda + \mu &= 0\end{aligned}$$

Si  $\lambda$  es cero se tiene que la suma de ambas ecuaciones implica que  $x_E = x_F$ , luego la restricción de participación es activa. Asimismo, si  $\mu$  es cero, la resta de las ecuaciones implica que el salario pagado es fijo y eso no puede ser, por lo tanto, la restricción de compatibilidad de incentivos también es activa.

$$\begin{aligned}0,5x_E + 0,5x_F - 1 &= 5 \\ 0,5x_E + 0,5x_F - 1 &= 0,3x_E + 0,7x_F \\ \Rightarrow x_E^* &= \frac{17}{2} \\ \Rightarrow x_F^* &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

- c) Encuentre el contrato óptimo si el principal sabe que el agente es hábil.

*Respuesta*

Análogamente:

$$\begin{aligned}\max_{x_E, x_F} & 0,9(100 - x_E^2) - 0,1x_F^2 \\ \text{sa} & \\ 0,9x_E + 0,1x_F - 1 &\geq 5 \\ 0,9x_E + 0,1x_F - 1 &\geq 0,6x_E + 0,4x_F\end{aligned}$$

Notar, nuevamente, que en la función objetivos está implícito que el contrato asegura que el individuo es hábil y va a esforzarse.

Luego,  $\lambda$  y  $\mu$  como antes:

$$\begin{aligned}-1,8x_E - \lambda - \mu &= 0 \\ -0,2x_F - \lambda + \mu &= 0\end{aligned}$$

Por el mismo razonamiento anterior, la restricción de participación y compatibilidad de incentivos son activas. Así:

$$\begin{aligned}0,9x_E + 0,1x_F - 1 &= 5 \\ 0,9x_E + 0,1x_F - 1 &= 0,6x_E + 0,4x_F \\ \Rightarrow x_E^* &= \frac{19}{3} \\ \Rightarrow x_F^* &= 3\end{aligned}$$

- d) Suponga ahora que el principal no puede distinguir entre un agente torpe y uno hábil y les da a elegir entre los contratos encontrados en las partes anteriores. En este caso, el agente hábil se hará pasar por torpe y el torpe revelará su tipo. Demuéstrelo y explique porqué ocurre. ¿Cuánto se esforzará el agente hábil? ¿Y el torpe?

*Respuesta*

- Para agente torpe:

Si el individuo es torpe y declara que lo es, puede esforzarse o no, la utilidad esperada en cada caso, *dados* los contratos ofrecidos por el principal son:

- Si  $e = 0$ , entonces  $U_T(0, T) = 0,3\frac{17}{2} + 0,7\frac{7}{2} = 5$ .
- Si  $e = 1$ , entonces  $U_T(1, T) = 0,5\frac{17}{2} + 0,5\frac{7}{2} - 1 = 5$ .

Así, si declara que es torpe, entonces prefiere esforzarse.

Si, por el contrario, declara que es hábil, entonces, recibe el salario diseñado para un individuo hábil, pero la probabilidad de éxito viene dada por su habilidad, así, si es torpe pero dice que es hábil, la utilidad esperada de esforzarse o no son:

- Si  $e = 0$ , entonces  $U_T(0, H) = 0,3\frac{19}{3} + 0,7(3) = 4,6 < 5$ .
- Si  $e = 1$ , entonces  $U_T(1, T) = 0,5\frac{19}{3} + 0,5(3) - 1 = 3,7 < 5$ .

En conclusión, el tipo torpe revela su tipo y se esfuerza.

- Para el tipo hábil:

Si el individuo es hábil y declara que lo es, puede esforzarse o no, la utilidad esperada en cada caso, *dados* los contratos ofrecidos por el principal son:

- Si  $e = 0$ , entonces  $U_H(0, T) = 0,6\frac{19}{3} + 0,4(3) = 5$
- Si  $e = 1$ , entonces  $U_H(1, T) = 0,9\frac{19}{3} + 0,1(3) - 1 = 5$ .

Así, si declara que es hábil, prefiere esforzarse (en la indiferencia).

Si, por el contrario, declara que es torpe, entonces, recibe el salario diseñado para un individuo torpe, pero la probabilidad de éxito viene dada por su habilidad, así, si es hábil, la utilidad esperada de esforzarse o no son:

- Si  $e = 0$ , entonces  $U_H(0, H) = 0,6\frac{17}{2} + 0,7\frac{7}{2} = 7,55 > 5$ .
- Si  $e = 1$ , entonces  $U_H(1, T) = 0,9\frac{17}{2} + 0,1\frac{7}{2} - 1 = 7 < 7,55$ .

En conclusión, el tipo hábil toma el contrato para un tipo torpe y no se esfuerza.

Dado que el tipo es no observable y que el éxito del proyecto es más probable para un tipo hábil, el principal deberá incentivar al torpe para que se esfuerce y, dado esto, el hábil querrá confundirse con él.

- e) La probabilidad de que el agente sea hábil es  $\lambda \in (0, 1)$ . Escriba y explique el problema de maximización que enfrenta el principal si acaso quiere que el agente se esfuerce mucho. Indique en qué parte usó el principio de la revelación.

*Respuesta*

$$\begin{aligned}
& \max_{x_{E,T}, x_{F,T}, x_{E,H}, x_{F,H}} \lambda \{0,9(100 - x_{E,H}^2) - 0,1x_{F,H}^2\} + (1 - \lambda) \{0,5(100 - x_{E,T}^2) - 0,5x_{F,T}^2\} \\
& \text{sa} \\
& RP_H \quad 0,9x_{E,H} + 0,1x_{F,H} - 1 \geq 5 \\
& RP_T \quad 0,5x_{E,T} + 0,5x_{F,T} - 1 \geq 5 \\
& RIa_H \quad 0,9x_{E,H} + 0,1x_{F,H} - 1 \geq 0,6x_{E,H} + 0,4x_{F,H} \\
& RIb_H \quad 0,9x_{E,H} + 0,1x_{F,H} - 1 \geq 0,9x_{E,T} + 0,1x_{F,T} - 1 \\
& RIc_H \quad 0,9x_{E,H} + 0,1x_{F,H} - 1 \geq 0,6x_{E,T} + 0,4x_{F,T} \\
& RIa_T \quad 0,5x_{E,T} + 0,5x_{F,T} - 1 \geq 0,3x_{E,T} + 0,7x_{F,T} \\
& RIb_T \quad 0,5x_{E,T} + 0,5x_{F,T} - 1 \geq 0,5x_{E,H} + 0,5x_{F,H} - 1 \\
& RIC_T \quad 0,5x_{E,T} + 0,5x_{F,T} - 1 \geq 0,3x_{E,H} + 0,7x_{F,H}
\end{aligned}$$

$RP$  son las restricciones de participación,  $RI_a$  es la restricción de incentivos para que el agente se esfuerce.  $RI_b$  es la restricción de incentivos para que al agente le convenga declarar su tipo y esforzarse versus tomar el otro contrato y esforzarse. Finalmente,  $RI_c$  es la restricción de incentivos para que el agente declare su habilidad y se esfuerce versus declarar otro tipo y no esforzarse.

Notar que el principio de la revelación está implícito en el mecanismo, ya que se busca que el individuo declare fidedignamente su habilidad (tomando el contrato diseñado para él) y le convenga hacerlo (en las restricciones de participación e incentivos). Además, en la función objetivo está claro que el principal sabe que el contrato óptimo obtenido proviene de individuos que declaran fidedignamente su habilidad (en las proporciones que existen realmente) y que se esfuerzan (en las probabilidades de éxito).

f) Demuestre que en el óptimo, el agente hábil recibe utilidad esperada mayor a 5.

*Respuesta*

Por contradicción, si la restricción de participación es activa, entonces,

$$0,9x_{E,H} + 0,1x_{F,H} - 1 = 5$$

En la restricción de participación del agente torpe:

$$0,5x_{E,T} + 0,5x_{F,T} - 1 \geq 5 = 0,9x_{E,H} + 0,1x_{F,H} - 1$$

Lo que implica que

$$0,4x_{F,T} - 0,4x_{E,H} \geq 0$$

Lo que no puede ser.

2. Considere el siguiente modelo de hidden actions con tres posibles acciones  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Considere además dos escenarios posibles para las utilidades:  $\pi_h = 10$  y  $\pi_l = 0$ . las probabilidades de  $\pi_h$  condicional a los niveles de esfuerzo son:  $f(\pi_h|e_1) = 2/3, f(\pi_h|e_2) = 1/2, f(\pi_h|e_3) = 1/3$ . La función de esfuerzo del agente es:  $g(e_1) = 5/3, g(e_2) = 8/5, g(e_3) = 4/3$ . Finalmente,  $v(w) = \sqrt{w}$ , y la utilidad de reserva del gerente es  $\bar{u} = 0$

- a) ¿Cuál es el contrato óptimo cuando el nivel de esfuerzo es observable?

*Respuesta:* Cuando el nivel de esfuerzo es observable la estructura de salario es plano (no es necesario incentivar porque se contrata el esfuerzo directamente). Luego, basta comparar las utilidades que resultan de exigir esfuerzo  $e_i$  y pagar  $g(e_i)^2$ , es decir, la restricción de participación es activa. Entonces, sea  $E$  el estado de utilidades 100,  $F$  el estado de utilidades nulas y  $x^2 = w$ .

$$e_1 \Rightarrow \Pi(e_1) = \frac{2}{3} \left\{ 10 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 \right\} - \frac{1}{3} \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 3,9$$

$$e_2 \Rightarrow \Pi(e_2) = \frac{1}{2} \left\{ 10 - \left(\frac{8}{5}\right)^2 \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 2,44$$

$$e_3 \Rightarrow \Pi(e_3) = \frac{1}{3} \left\{ 10 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \right\} - \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1,6$$

Luego se contrata  $e_1$  y el salario es  $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ .

- b) Muestre que si el nivel de esfuerzo no es observable, entonces el nivel  $e_2$  no es implementable. ¿Para qué nivel de  $g(e)$  sería  $e_2$  implementable?. *Indicación: Observe los niveles de utilidad del gerente  $v_1$  y  $v_2$ , más que en los salarios.*

*Respuesta:* Si se quiere implementar  $e_2$ , entonces se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\text{RP} \quad \frac{1}{2}x_E + \frac{1}{2}x_F - g(e_2) \geq 0 \Rightarrow x_E + x_F \geq 2g(e_2)$$

$$\text{RI} \quad \frac{1}{2}x_E + \frac{1}{2}x_F - g(e_2) \geq \frac{2}{3}x_E + \frac{1}{3}x_F - \frac{5}{3} \Rightarrow x_E - x_F \leq 10 - 6g(e_2)$$

$$\text{RI} \quad \frac{1}{2}x_E + \frac{1}{2}x_F - g(e_2) \geq \frac{1}{3}x_E + \frac{2}{3}x_F - \frac{4}{3} \Rightarrow x_E - x_F \geq 6g(e_2) - 8$$

Claramente las dos últimas restricciones no son compatibles si  $g(e_2) = \frac{8}{5}$ . Para valores de  $g(e_2) \leq \frac{3}{2}$  es posible implementar dicho esfuerzo.

- c) ¿Cuál es el contrato óptimo cuando el esfuerzo no es observable?

*Respuesta:* Si principal desea implementar esfuerzo  $e_1$ , luego resuelve:

$$\max_{x_E, x_F} \quad \frac{2}{3} (10 - x_E^2) - \frac{x_F^2}{3}$$

sa

$$\text{RP} \quad \frac{2}{3}x_E + \frac{1}{3}x_F - \frac{5}{3} \geq 0$$

$$\text{RI} \quad \frac{2}{3}x_E + \frac{1}{3}x_F - \frac{5}{3} \geq \frac{1}{3}x_E + \frac{2}{3}x_F - \frac{4}{3}$$

Ambas restricciones deben ser activas, luego, el contrato óptimo es  $(x_E = 2, x_F = 1)$  y deja utilidades por 3.7. En caso que el principal quiera implementar esfuerzo  $e_3$  sus utilidades son 1.3, luego lo óptimo es inducir esfuerzo  $e_1$ .

- d) Suponga que  $g(e_1) = \sqrt{8}$ , y que  $f(\pi_h|e_1) = x \in [0, 1]$ . ¿Cuál es el contrato óptimo si el esfuerzo es observable en la medida que  $x$  se aproxima a uno? ¿Cuál es el contrato óptimo si  $x$  se aproxima a uno y el esfuerzo no es observable? A medida que  $x$  se aproxima a uno, ¿el nivel de esfuerzo implementado es alto (bajo) cuándo el esfuerzo es observable (no observable)?

*Respuesta:* Si el esfuerzo es observable, entonces se paga el costo del esfuerzo en todo evento. Luego, las utilidades son:

$$e_1 \Rightarrow \Pi(e_1) = 10\pi - 8 = 2$$

De la primera parte se sabe que si el esfuerzo es observable, entonces las utilidades con  $e_2$  y  $e_3$  son 2,4 y 1,6. Luego, el esfuerzo inducido es  $e_2$ .

Esfuerzo no observable: Si principal desea implementar esfuerzo  $e_1$ , luego resuelve:

$$\begin{aligned} & \max_{x_E, x_F} (10 - x_E^2) \\ & \text{sa} \\ & \text{RP}_{x_E} - \sqrt{8} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{RIRP}_{x_E} - \sqrt{8} \geq \frac{1}{3}x_E + \frac{2}{3}x_F - \frac{4}{3}$$

Imponiendo igualdad en ambas restricciones, se tiene que,  $x_E = \sqrt{8}$  y  $x_F = 2 - \sqrt{2}$ . Así, las utilidades que alcanza la firma son 2. En el caso que la firma quiera imponer  $e_2$  o  $e_3$ , las utilidades son menores.

3. Asuma que hay dos tipos de consumidores para el producto de una firma,  $\theta_H$  y  $\theta_L$ . La proporción de tipos  $\theta_L$  es  $\lambda$ . La utilidad de un tipo  $\theta$  cuando consume una cantidad  $x$  del bien y paga un total de  $T$  es  $u(x, T) = \theta v(x) - T$ , donde:

$$v(x) = \frac{1 - (1 - x)^2}{2}$$

La firma es la única en producir el bien y el costo por unidad es  $c > 0$ .

- a) Considere un monopolista no discriminante. Derive la política óptima de precios. Muestre que el monopolio sirve a ambos tipos de consumidores si  $\theta_L$  o  $\lambda$  es “suficientemente grande”.

*Respuesta:*

Lo primero es determinar la demanda por el bien para cada tipo de consumidor. Luego, dado un precio hay que encontrar la cantidad demandada que maximiza la utilidad del individuo. Esto es:

$$\max_{x_i} \theta_i \frac{1 - (1 - x_i)^2}{2} - px_i$$

Luego, la demanda del consumidor  $i$  es:

$$x_i = 1 - \frac{p}{\theta_i}$$

Dada la demanda que enfrenta el monopolista, maximiza su utilidad:

$$\max_p \left\{ \lambda \left( 1 - \frac{p}{\theta_L} \right) + (1 - \lambda) \left( 1 - \frac{p}{\theta_H} \right) \right\} (p - c)$$

Así, el precio fijado en el caso de no discriminación es:

$$p_a = \frac{c + \theta}{2}, \quad \text{donde,} \quad \frac{1}{\theta} = \frac{\lambda}{\theta_L} + \frac{1 - \lambda}{\theta_H}$$

La cantidad demandada a un precio  $p$  es:

$$x_a = (1 - \lambda) \left( 1 - \frac{p}{\theta_H} \right) + \lambda \left( 1 - \frac{p}{\theta_L} \right) = 1 - \frac{p}{\theta}$$

Para que al monopolio le convenga servir a los dos tipos de consumidores, entonces, la utilidad conjunta debe ser mayor que la que alcanza vendiendo sólo a  $\theta_H$ . Si el monopolio vende sólo a los consumidores  $\theta_H$ , resuelve:

$$\begin{aligned} \max_p (1 - \lambda) \left( 1 - \frac{p_H}{\theta_H} \right) (p_H - c) \\ \Rightarrow p_H = \frac{\theta_H + c}{2}, \quad x_H = 1 - \frac{p_H}{\theta_H}, \end{aligned}$$

Luego las utilidades son:

$$\Pi_a = (p_a - c)x_a = \frac{(c - \theta)^2}{4\theta}$$

$$\Pi_H = (p_H - c)x_H = (1 - \lambda) \frac{(c - \theta_H)^2}{4\theta_H}$$

Fácilmente puede demostrarse que la utilidad conjunta es mayor si  $\lambda$  o  $\theta_L$  son suficientemente altos.

- b) Considere un monopolista que puede distinguir a ambos tipos (por alguna característica) pero puede sólo cobrar un precio  $p_i$  al tipo  $\theta_i$ . Caracterice los precios óptimos.

*Respuesta:* Si puede cobrar un precio a cada tipo, entonces, por analogía a la parte anterior, se tiene que la tarifa para un consumidor tipo  $i$  es:

$$p_i = \frac{\theta_i + c}{2}$$

- c) Suponga que el monopolista no puede distinguir a los tipos. Derive la tarifa óptima de dos partes (una política de precios consiste en una carga fijo  $F$  más un precio lineal por unidad comprada) bajo en supuesto que el monopolista sirve a ambos tipos. Interprete. ¿Bajo que condiciones el monopolista sirve a los dos tipos de consumidores?

*Respuesta:* Cuando el monopolio decide una tarifa en dos partes, lo mejor que puede hacer es cobrar un precio  $p$  por unidad y luego extraer el máximo de excedente, tal que ambos tipos de consumidores decidan comprar. A un precio  $p$  el excedente del tipo  $i$  es:

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p}{\theta_i} \right) (\theta_i - p) \Rightarrow \frac{(\theta_i - p)^2}{2\theta_i}$$

Claramente, a un mismo precio, el excedente del consumidor con menor disposición a pagar ( $\theta_L$ ), es menor, luego el monopolio determina el cargo fijo como el excedente de los tipos  $\theta_L$  a un precio  $p$  que sale del problema de maximización de utilidades:

$$\max_p \frac{(\theta_L - p)^2}{2\theta_L} + (p - c) \left\{ \lambda \left( 1 - \frac{p}{\theta_L} \right) + (1 - \lambda) \left( 1 - \frac{p}{\theta_H} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow p_b = \frac{c}{2 - \frac{\theta}{\theta_L}}$$

$$\Rightarrow x_b = 1 - \frac{c}{\theta \left( 2 - \frac{\theta}{\theta_L} \right)}$$

$$\Rightarrow F_b = \frac{1}{2\theta_L} \left\{ \theta_L - \frac{c}{2 - \frac{\theta}{\theta_L}} \right\}^2$$

Para determinar bajo que condiciones se sirven a ambos tipos, nuevamente hay que comparar la utilidad conjunta con el caso en que se sirve sólo a los tipos  $\theta_H$ .

$$\begin{aligned} \Pi_b &= (p_b - c)x_b + \frac{(\theta_L - p_b)^2}{2\theta_L} \\ \Pi_H &= \frac{(\theta_H - c)^2}{2\theta_H} (1 - \lambda) \end{aligned}$$