

IN 702 MICROECONOMIA II

Primavera 2005

Pauta Control 2

1. a) Se tiene que  $e_*$  es el pago que obtiene cada uno de los jugadores en un equilibrio, y también, como  $e_* \geq \underline{v}$ , entonces

$$\exists \alpha \in [0, 1] \text{ tal que } \alpha g_i(m^*) + (1 - \alpha)e^* = e_*$$

donde  $e^*$  es el mejor pago en equilibrio simétrico.

Supongamos que la probabilidad de que un jugador pase de la fase  $A$  a la fase  $B$  es  $(1 - p)$ . Entonces, el pago del jugador será  $e_*$  si se cumple que:

$$e_* = (1 - \delta)g_i(m^*) + \delta(pe_* + (1 - p)e^*) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow e_* = \frac{(1 - \delta)g_i(m^*) + (\delta - \delta p)e^*}{1 - \delta p} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow e_* = \frac{(1 - \delta)}{1 - \delta p}g_i(m^*) + \frac{(\delta - \delta p)}{1 - \delta p}e^* \quad (3)$$

Así, para un  $\delta$  lo suficientemente grande (dado), se puede escoger  $p$  de manera tal que  $\alpha = \frac{1 - \delta}{1 - \delta p}$  y la estrategia descrita en el enunciado tendrá pago  $e_*$ . (5 puntos)

Veamos las condiciones necesarias sobre  $\delta$ :

$$\alpha = \frac{1 - \delta}{1 - \delta p} \quad (4)$$

$$\Rightarrow p = \frac{\alpha - 1 - \delta}{\alpha \delta} \quad (5)$$

y buscamos que  $p \in [0, 1]$ ; veamos primero  $p \geq 0$ :

$$0 \leq \frac{\alpha - 1 - \delta}{\alpha \delta} \quad (6)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \alpha - 1 - \delta \quad (7)$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha \leq \delta \quad (8)$$

y ahora  $p \leq 1$

$$\frac{\alpha - 1 + \delta}{\alpha\delta} \leq 1 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \alpha - 1 + \delta \leq \alpha\delta \quad (10)$$

$$\Rightarrow \alpha - 1 \leq (\alpha - 1)\delta \quad (11)$$

$$\Rightarrow 1 \geq \delta \quad (12)$$

(la desigualdad cambia al final porque  $\alpha \leq 1$ )

Luego, tenemos que para un  $\delta \geq 1 - \alpha$ , se puede escoger  $p$  de manera tal que  $\alpha = \frac{1-\delta}{1-\delta p}$  y la estrategia descrita en el enunciado tendrá pago  $e_*$ . (5 puntos)

Veamos qué ocurre cuando un jugador se desvía:

Por definición de  $m^*$ , el pago de un jugador que se desvía será a lo más:

$$(1 - \delta)\underline{v} + \delta e_*$$

y como  $e_* \geq \underline{v}$ , entonces no habrán incentivos a desviarse, y las estrategias propuestas que dan un pago de  $e_*$  son un equilibrio. (5 puntos)

b) Considere el siguiente juego:

	C	D
C	$c$ $c$	$b$ $0$
D	$0$ $b$	$d$ $d$

Las condiciones que determinan que este sea un *dilema del prisionero* son:  $b > c > d > 0$ .

Así, en el juego estático, el único equilibrio de Nash resulta ser  $(D, D)$ .

El set de equilibrios en sub-juego perfecto del juego repetido son los siguientes:

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq -\frac{b-d}{d}x + b, y \geq -\frac{d}{b-d}(x-b), y \leq -\frac{b-c}{c}x + b, y \leq -\frac{d}{b-c}(x+b), x \geq d, y \geq d\}$$

Gráficamente: ((insertar gráfico))

Finalmente, para que cada jugador obtenga un pago de  $c$  en el largo plazo, se propone la siguiente estrategia simétrica: *Jugar C mientras nadie se haya desviado. Si alguien se desvía o se ha desviado anteriormente, jugar D.* Para que nadie tenga incentivos a desviarse, se debe cumplir que:

$$\Pi_C \geq \Pi_{desvio} \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^i c \geq b + \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i d \quad (14)$$

$$c \geq (1 - \delta)b + (1 - \delta) \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i d \quad (15)$$

$$c \geq (1 - \delta)b + \delta d \quad (16)$$

$$\Rightarrow \delta \geq \frac{b - c}{b - d} \quad (17)$$

Luego, cuando  $\delta \geq \frac{b-c}{b-d}$  se puede sostener un equilibrio en que ambos jugadores obtienen un pago de  $c$  en el largo plazo. (5 puntos)

2. Considere primero el siguiente juego:

	L	R
T	0	-1
B	0	3
	1	-1

(en el juego del control 2, las opciones del jugador 1 también eran L,R , pero en este caso tomaremos T y B para diferenciar)

Calculemos el equilibrio de Nash de este juego (claramente no tiene EN en estrategias puras, por lo que lo haremos en estrategias mixtas):

Si el jugador 1 escoge  $T$  con probabilidad  $p$ , entonces

$$0p + 0(1 - p) = -1p + 3(1 - p) \Rightarrow p = 3/4$$

Si el jugador 2 escoge  $L$  con probabilidad  $q$ , entonces

$$0q + 0(1 - q) = 1q + -1(1 - q) \Rightarrow q = 1/2$$

Considere ahora el siguiente juego perturbado:

	L	R
T	$\epsilon\theta_2$	-1
B	$\epsilon\theta_1$	3
	1	-1

Donde  $\epsilon \in (0, 1)$  y los tipos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son independientes y distribuidos de manera uniforme sobre el intervalo  $[0, 1]$ . (5 puntos)

Calculemos el Equilibrio Bayasiano del juego.

Para el jugador 1, el pago esperado de jugar  $T$  es  $\epsilon\theta_1$ , mientras que jugar  $B$  es:

$$\int_0^1 \alpha_2(L|\theta_2)(1)d\theta_2 + \int_0^1 (1 - \alpha_2(L|\theta_2))(-1)d\theta_2 \quad (18)$$

donde  $\alpha_2(L|\theta_2)$  es la probabilidad de que el jugador 2 juegue  $L$ , dado que es de tipo  $\theta_2$ .

Así, cuando la expresión (18) es mayor a  $\epsilon\theta_1$ , el jugador 1 prefiere jugar  $T$  con probabilidad 1. Cuando es menor, prefiere  $B$  (también con proba. 1). O, mejor dicho, cuando el jugador 1 es de tipo  $\theta_1$ , entonces:

$$\text{si } \theta_1 > \frac{-1+2 \int_0^1 \alpha_2(L|\theta_2)d\theta_2}{\epsilon} \equiv x \Rightarrow \alpha_1(T|\theta_1) = 1$$

$$\text{si } \theta_1 < \frac{-1+2 \int_0^1 \alpha_2(L|\theta_2)d\theta_2}{\epsilon} \equiv x \Rightarrow \alpha_1(T|\theta_1) = 0$$

De manera análoga, el jugador 2 obtiene  $\epsilon\theta_2$  cuando juega  $L$ , y el pago esperado que recibe al jugar  $R$  es:

$$\int_0^1 \alpha_1(T|\theta_1)(-1)d\theta_1 + \int_0^1 (1 - \alpha_1(T|\theta_1))(3)d\theta_1 \quad (19)$$

Haciendo el mismo análisis que para el jugador 1, se tiene que, dado el tipo  $\theta_2$  del jugador 2:

$$\text{si } \theta_2 > \frac{3-4 \int_0^1 \alpha_1(T|\theta_1)d\theta_1}{\epsilon} \equiv y \Rightarrow \alpha_2(L|\theta_2) = 1$$

$$\text{si } \theta_2 < \frac{3-4 \int_0^1 \alpha_1(T|\theta_1)d\theta_1}{\epsilon} \equiv y \Rightarrow \alpha_2(L|\theta_2) = 0$$

(5 puntos)

Veamos ahora los casos críticos cuando el jugador 1 es de tipo  $\theta_1 = x$  y el jugador 2 es de tipo  $\theta_2 = y$ .

En  $\theta_1 = x$  el jugador 1 es indiferente, i.e.,

$$\epsilon x = -1 + 2\left\{ \int_0^y (0)d\theta_2 + \int_y^1 (1)d\theta_2 \right\} \quad (20)$$

$$= -1 + 2(1 - y) \quad (21)$$

Cabe mencionar que por definición de  $y$ ,  $\alpha_2(L|\theta_2) = 0$  para  $\theta_2 < y$ , y  $\alpha_2(L|\theta_2) = 1$  para  $\theta_2 > y$  (eso fue reemplazado en la expresión (18) y se obtuvo (20)).

En  $\theta_2 = y$  el jugador 2 es indiferente, i.e.,

$$\epsilon y = 3 - 4\left\{\int_0^x (0)d\theta_1 + \int_x^1 (1)d\theta_1\right\} \quad (22)$$

$$= 3 - 4(1 - x) \quad (23)$$

Resolviendo para  $x$  e  $y$ :

$$x = \frac{2 + \epsilon}{8 + \epsilon^2} \quad (24)$$

$$y = \frac{4 - \epsilon}{8 + \epsilon^2} \quad (25)$$

Así que el Equilibrio Bayesiano cumple que:

$$\theta_1 > \frac{2 + \epsilon}{8 + \epsilon^2} \Rightarrow \alpha_1(T|\theta_1) = 1 \quad (26)$$

$$\theta_1 < \frac{2 + \epsilon}{8 + \epsilon^2} \Rightarrow \alpha_1(T|\theta_1) = 0 \quad (27)$$

y para el otro player:

$$\theta_2 > \frac{4 - \epsilon}{8 + \epsilon^2} \Rightarrow \alpha_2(L|\theta_2) = 1 \quad (28)$$

$$\theta_2 < \frac{4 - \epsilon}{8 + \epsilon^2} \Rightarrow \alpha_2(L|\theta_2) = 0 \quad (29)$$

Finalmente,  $\alpha_1(\cdot|\theta_1)$  y  $\alpha_2(\cdot|\theta_2)$  pueden ser escogidos de manera libre en los eventos de cero probabilidad  $\theta_1 = \frac{2+\epsilon}{8+\epsilon^2}$  y  $\theta_2 = \frac{4-\epsilon}{8+\epsilon^2}$ . Así, el equilibrio es único casi seguramente (la medida de probabilidad de los eventos en que esto no ocurre es nula), y es un equilibrio en estrategias puras (dado el tipo de cada uno de los jugadores, éstos juegan una acción con probabilidad 1). (5 puntos)

Veamos qué sucede cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ :

Para el jugador 1, al hacer tender  $\epsilon$  a 0, se obtiene que:

$$\theta_1 > \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_1(T|\theta_1) = 1$$

Pero como  $\theta_1$  se distribuye uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$ ,  $\mathbb{P}(\theta_1 > \frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$ , luego el jugador 1 escogerá jugar  $T$  con probabilidad  $3/4$ , igual que en el eq. de Nash original.

Para el jugador 2, al hacer tender  $\epsilon$  a 0, se obtiene que:

$$\theta_2 > \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2(L|\theta_2) = 1$$

Como  $\theta_2$  se distribuye uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$ ,  $\mathbb{P}(\theta_2 > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ , luego el jugador 2 escogerá jugar  $L$  con probabilidad  $1/2$ , igual que en el eq. de Nash original. (5 puntos)

3. a) En el mercado de los autos nuevos, hay simetría de información. Luego, la calidad esperada de un auto es  $q^* = E[q]$ , donde

$$E[q] = \int_{\alpha}^{\beta} q \frac{1}{\beta-\alpha} dq = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

La condición para que un comprador esté dispuesto a comprar un auto nuevo es que la utilidad esperada de la compra sea mayor que la utilidad de reserva, esto es:

$$\theta E[q] - p^* \geq 0 \Leftrightarrow p^* \leq \theta \left[ \frac{\alpha+\beta}{2} \right]$$

Esta condición quiere decir que los compradores están dispuestos a pagar a lo más la calidad promedio de los autos (en el caso en que  $\theta = 1$ ) (5 puntos)

- b) Venden un auto usado todos aquellos vendedores que tienen un auto de calidad menor que  $P^u$ .

Por lo tanto, la oferta de autos usados será:  $P^u \geq q^u$ , donde  $q^u$  es la calidad promedio de los autos usados.

$$q^u = E[q|q \leq P^u] = \frac{\int_{\alpha}^{P^u} q \frac{1}{\beta-\alpha} dq}{\int_{\alpha}^{P^u} \frac{1}{\beta-\alpha} dq} = \frac{1}{2}(\alpha + P^u) \quad (30)$$

En este caso, los vendedores conocen la calidad del auto, pero no los compradores. Los vendedores que tienen un auto de calidad mayor a la calidad promedio del parque automotriz, salen del mercado, pues los compradores saben que la calidad de los autos usados es a lo más  $P^u$ , y ya no están dispuestos a pagar la calidad promedio de toda la distribución, sino sólo hasta  $P^u$ .

Este es el razonamiento que hace que exista el problema de selección adversa, ya que cuando baja el precio  $P^u$  se venden sólo los autos de menor calidad. (5 puntos)

- c) Para el mercado de los autos usado se tiene que la oferta será

$$\Theta^u(P) = \{q | P^u \geq q\} \quad (31)$$

La demanda de autos usados será:

$$P^u = \theta E[q|q \in \Theta^u] = \theta \frac{1}{2}(P^u + \alpha) \quad (32)$$

En el equilibrio, el precio al que se venden los autos usados es:

$$P^u = \theta \frac{1}{2}(P^u + \alpha) \Rightarrow P^u = \frac{\theta \alpha}{2 - \theta} \quad (33)$$

que es el precio de equilibrio de mercado de los autos usados.

Por su parte, en el mercado de autos nuevos, la oferta será:

$$\Theta^*(P) = \{q | P^* \geq q\} \quad (34)$$

y la demanda de autos nuevos será:

$$P^* = \theta E[q | q \in \Theta^*] = \theta \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (35)$$

En el equilibrio, el precio al que se venden los autos usados es:

$$P^* = \theta \left[ \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \quad (36)$$

que es el precio de equilibrio de mercado de los autos nuevos.

Veamos ahora las utilidades de un consumidor si compra un auto usado y uno nuevo:

$U^{usado}$  = Utilidad de comprar un auto usado

$$U^{usado} = \theta q^u - P^u = \theta \frac{1}{2}(\alpha + P^u) - \theta \left[ \frac{P^u + \alpha}{2} \right] = 0$$

$U^{nuevo}$  = Utilidad de comprar un auto nuevo

$$U^{nuevo} = \theta q^* - P^* = \theta \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \theta \left[ \frac{\alpha + \beta}{2} \right] = 0$$

De lo anterior, se tiene que  $U^{usado} = U^{nuevo} = 0$  y el comprador estará indiferente entre comprar un auto nuevo o un auto usado, ya que la utilidad es la misma. Si bien es cierto que un auto nuevo tiene un precio mayor, la calidad esperada también es mayor, mientras que un auto usado tiene un precio menor, pero una calidad esperada menor, por lo que la utilidad neta de consumidor es la misma en ambos casos. (5 puntos)

d) Si  $\theta = 1$ , el mercado de los autos usados desaparece.

Teníamos que el precio de mercado de los autos usados es  $P^u = \frac{\theta \alpha}{2 - \theta}$ , luego si  $\theta = 1$ ,  $P^u = \alpha$ . A ese precio, el mercado de los autos usados desaparece, pues los vendedores no están dispuestos a vender a precio  $\alpha$  si la calidad de su auto es mayor a  $\alpha$ . Pero, en este caso, la calidad se distribuye uniforme entre  $\alpha$  y  $\beta$ , siendo  $\alpha$  la cota inferior, por lo tanto, todos los autos con calidad superior a  $\alpha$  salen del mercado. De este modo, el problema de la selección adversa afecta a la oferta. (5 puntos)

e) Ahora se supone que  $P^* = q^*$

P.d.q. si  $\theta > 1$ ,  $P^u = \frac{2}{2-\theta}[P^* - \frac{\theta\beta}{2}] = \frac{\theta}{2-\theta}\alpha$

De la ec. (33), teníamos que  $P^u = \theta\frac{1}{2}(P^u + \alpha) \Rightarrow P^u = \frac{\theta}{2-\theta}\alpha$

De la ec. (36),  $P^* = \theta[\frac{\alpha+\beta}{2}]$

Por lo que, reemplazando el valor de  $\alpha$ , se obtiene que

$$P^u = \frac{2P^* - \theta\beta}{2 - \theta} = \frac{2}{2 - \theta}(P^* - \frac{\theta\beta}{2}) = \frac{\theta}{2 - \theta}\alpha \quad (37)$$

Intuitivamente, vemos que el precio de los autos usados depende del precio de los autos nuevos (es decir, de su competencia). Además, como los precios no son iguales, los compradores estarían dispuestos a pagar por tener la misma información que los vendedores. (5 puntos)

f) P.d.q.  $P^u < P^*$

Como  $\theta > 1$ , ambos mercados coexisten.

Teníamos que el precio de los autos nuevos era, por la ec. (36),  $P^* = \theta[\frac{\alpha+\beta}{2}]$

$$\Rightarrow \theta\alpha = 2P^* - \theta\beta \quad (38)$$

Por (37), se tenía que  $P^u = \frac{2P^* - \theta\beta}{2 - \theta} = \frac{2}{2 - \theta}(P^* - \frac{\theta\beta}{2})$

Luego,

$$2P^u - \theta P^u = 2P^* - \theta\beta \quad (39)$$

Como  $\beta > P^u$ , reemplazando en (39)

$$\Rightarrow 2P^u - \theta\beta < 2P^* - \theta\beta \Rightarrow P^u < P^* \quad (40)$$

En efecto, existe el mercado de los autos nuevos, con un precio y una calidad esperada mayor, y el mercado de los autos usados con un precio y una calidad esperada menor.

Como  $P^* > P^u$ , se tiene que

$$P^* - P^u = \theta[\frac{\alpha+\beta}{2}] - \theta[\frac{P^u+\alpha}{2}] = \theta[\frac{\beta-P^u}{2}]$$

Esto ocurre por la información asimétrica, es decir, los vendedores que saben que la calidad del auto es mayor al precio se retiran del mercado, lo que tiene como consecuencia que en equilibrio el precio y la calidad sean menores. (5 puntos)



4.

		In	Out
Bueno		2	1
	2		0
Malo		0	1
	3		1

- a) El equilibrio de Nash en estrategias puras es  $S^* : (Malo, Out)$

Como se trata de un equilibrio de estrategias estrictamente dominantes, el equilibrio es único, por lo tanto no se necesitan buscar equilibrio en estrategias mixtas. (5 puntos)

- b) Sabemos que  $Minmax = \min_{\alpha_{-i}} [\max_{\alpha_i} U(\alpha_i, \alpha_{-i})]$

Sea  $p_2$  la probabilidad con que el jugador 2 juega *In*, por lo que los pagos esperados del jugador 1 serán:

$$E[U_1(Bueno)] = 2p_2 + 0(1 - p_2) = 2p_2$$

$$E[U_1(Malo)] = 3p_2 + 1(1 - p_2) = 1 + 2p_2$$

$$\max_{\alpha_1} U(\alpha_1, p_2) = \max\{2p_2, 1 + 2p_2\} = 1 + 2p_2$$

$$\text{Por lo tanto, } \min_{p_2} \max_{\alpha_1} U(\alpha_1, p_2) = \min_{p_2} (1 + 2p_2) \Rightarrow p_2^* = 0 \text{ y } \underline{v}_1 = 1$$

Análogamente, sea  $p^1$  la probabilidad con que el jugador 1 juega *Bueno*

Por lo tanto, los pagos esperados del jugador 2 serán:

$$E[U_2(In)] = 2p_1 + 0(1 - p_1) = 2p_1$$

$$E[U_2(Out)] = 1p_1 + 1(1 - p_1) = 1$$

$$\text{Por lo que, } \max_{\alpha_2} U(\alpha_2, p_1) = \max\{2p_1, 1\} = 1$$

$$\text{y entonces, } \min_{p_1} \max_{\alpha_2} U(\alpha_2, p_1) = \min_{p_1} 1 \Rightarrow p_1^* = 0 \text{ y } \underline{v}_2 = 1$$

Luego, el Minmax es  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = (1, 1)$

Cabe destacar que  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = (1, 1)$  es además el único Equilibrio de Nash del juego. (5 puntos) si demuestra esto formalmente, 2 punto si lo saca debajo de la manga apoyado de un grafico o algo asi.

- c) Sea  $V = \{v_i | \exists a_i \text{ tq } g(a_i) = v_i\}$  la curvatura convexa. Más formalmente, se tiene:

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq -\frac{1}{3}(x - 3) \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 1 \wedge y \leq -2(x - 3)\}$$

Por el teorema de Friedman sabemos que

$\forall (v_1, v_2) \in V, \forall (v_1, v_2) > (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \exists \underline{\delta} \text{ tq } \delta \in (\underline{\delta}, 1)$  tal que  $(v_1, v_2)$  puede ser obtenido como pago promedio en un EPS del juego repetido. Esto significa que se puede implementar como EPS cualquier pago  $(v_1, v_2)$  tq  $(v_1, v_2) \in V$  y  $v_1 > \underline{v}_1$ ,  $v_2 > \underline{v}_2$ .

De la parte b) se tiene que  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = (1, 1)$ , por lo tanto, serán implementables todos los pagos  $v_1 > 1$  y  $v_2 > 1$  tq  $(v_1, v_2) \in V$  (área achurada).

Gráficamente: ((insertar gráfico)) (5 puntos)

d) Considere la siguiente estrategia:

Comenzar el juego jugando la estrategia (*Bueno, In*). En el período  $t$ , seguir jugando (*Bueno, In*) si en todos los períodos anteriores se jugó (*Bueno, In*). Si en  $t - 1$  algún jugador se desvió, jugar (*Malo, Out*) de ahí en adelante.

Luego, para que la estrategia (*Bueno, In*) sea sostenible en el tiempo, el pago que recibe cada jugador debe ser mayor al pago que recibe si se desvía y de ahí en adelante jugar (*Malo, Out*). Esto es,

$$2 \geq 3(1 - \delta) + 1\delta \Rightarrow \delta \geq \frac{1}{2} \quad (41)$$

Por lo tanto, para que cada jugador obtenga un pago de largo plazo igual a 2,  $\delta = \frac{1}{2}$ , con lo que ningún jugador tendrá incentivo a desviarse y la estrategia será implemtable para  $\delta \in [\frac{1}{2}, 1]$ . (5 puntos)