

Problema 1

1. (a) Escriba el juego en forma Normal

Solución:

La forma normal de este juego es similar a uno de los juegos desarrollados en la clase (ver, por ejemplo, transparencias “Clase05”), en donde el jugador 3 elige entre las 2 cajas que se muestran abajo, mientras los jugadores 1 y 2 eligen, respectivamente, las filas y columnas de cada una. Las entradas en las matrices de pago corresponden a los pagos de los jugadores 1, 2 y 3, respectivamente.

		b		a			b		a	
AA	0	0	3	003	AA	0	003	003		
AB	0	0	3	003	AB	0	003	003		
BA	-1	0	2	-1 02	BA	2	0	201		
BB	-1	0	2	-1 02	BB	2	0	201		
CA	1	-1/2	-2	003	CA	570	003			
CB	1	-1/2	-2	-1 02	CB	570	201			
		X					Y			

- (b) Determine todas las estrategias puras que son estricta, o débilmente dominantes para cada jugador.

Solución:

Para que existan estrategias débil, o estrictamente dominantes, se debe tener que dicha estrategia sea mejor respuesta (en negrita) a cualquier estrategia del resto de los jugadores. Esta condición no se cumple para ninguno de los jugadores.

- (c) Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.

Solución:

Los equilibrios de Nash corresponden a las combinaciones de estrategias que son mejor respuesta desde el punto de vista de todos los jugadores. Ellos corresponden en consecuencia a aquellas combinaciones en que los tres componentes están en negrita.

- (d) ¿Cuántos subjuegos tiene este juego? Identifíquelos.

Solución:

Dado que los nodos sucesores al nodo inicial de un subjuego deben estar contenidos en los conjuntos de información del candidato a subjuego propuesto, se tiene que el único subjuego es el juego completo.

- (e) Encuentre todos los EPS en estrategias puras.

Solución:

Dado que existe un único subjuego, el conjunto de equilibrios de Nash es coincidente con el conjunto de equilibrios de Nash identificados en c).

- (f) Encuentre los EBP débiles del subconjunto de EPS, incluyendo estrategias mixtas.

Propuesto

Problema 2

1. (a) Para el juego de la izquierda:

- i. Encuentre condiciones sobre los parámetros (x, y) tales que el único equilibrio de Nash del juego (en estrategias puras y mixtas) sea el par de estrategias (D, L) , en donde (P_U, P_D, P_R, P_L) corresponden a las probabilidades de jugar las estrategias (U, D, R, L) , respectivamente.

Solución:

Considerando que de existir un par de estrategias puras estrictamente dominante, para cada jugador, dicho par constituiría el único equilibrio de Nash del juego. Tenemos que $u_2(L, S_1) > u_2(R, S_1)$, si y solo si, $x < 6$ e $y > 5$. Asimismo, $u_1(D, S_2) > u_1(U, S_2)$, si y solo si, $y > 6$ y $x < 5$, de donde sigue que para cualquier valor de $(x, y) \in \Theta = \{(x, y) : x < 5, y > 6\}$ el par de estrategias (D, L) constituye el único equilibrio de Nash.

- ii. Encuentre al menos una configuración para los parámetros (x, y) , de forma que las correspondencias de mejor respuesta de ambos jugadores se intercepten en tres ocasiones (i.e., que existan solo 3 equilibrios de Nash, incluyendo estrategias mixtas). Verifique su resultado.

Solución:

Considere parámetros $(x, y) \notin \Theta$. El pago esperado para el jugador 1 está dado por la expresión (en donde $P_D = 1 - P_U$, $P_L = 1 - P_R$)

$$\begin{aligned} U_1(P_U, P_R) &= P_U \cdot 6P_R + P_U \cdot x(1 - P_R) + (1 - P_U) \cdot yP_R + (1 - P_U) \cdot 5(1 - P_R) \\ &= P_R(y - 5) + 5 + P_U(x - 5 + 11P_R - xP_R - yP_R) \end{aligned}$$

Luego, la correspondencia de mejor respuesta está dada por

$$P_U(P_R) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - 5 + P_R[11 - x - y] > 0 \\ [0, 1] & \text{si } x - 5 + P_R[11 - x - y] = 0 \\ 0 & \text{si } x - 5 + P_R[11 - x - y] < 0 \end{cases}$$

Asimismo, el pago esperado para el jugador 2 está dado por la expresión

$$\begin{aligned} U_2(P_R, P_U) &= P_R \cdot 5P_U + P_R \cdot x(1 - P_U) + (1 - P_R) \cdot yP_U + (1 - P_R) \cdot 6(1 - P_U) \\ &\quad xP_R - 6P_U - 6P_R + yP_U + 11P_RP_U - xP_RP_U - yP_RP_U + 6 \\ &= P_U(y - 6) + 6 + P_R(x - 6 + P_U[11 - x - y]) \end{aligned}$$

de donde se tiene que la correspondencia de mejor respuesta está dada por

$$P_R(P_U) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - 6 + P_U[11 - x - y] > 0 \\ [0, 1] & \text{si } x - 6 + P_U[11 - x - y] = 0 \\ 0 & \text{si } x - 6 + P_U[11 - x - y] < 0 \end{cases}$$

A objeto de obtener tres equilibrios de Nash, podemos postular los pares de estrategias $(P_U = 1, P_R = 1)$, $(P_U = 0, P_R = 0)$, y $(P_U = \bar{P}_U, P_R = \bar{P}_R)$, en donde

$$0 \leq \bar{P}_U = \frac{6 - x}{11 - x - y} \leq 1, \quad y \quad 0 \leq \bar{P}_R = \frac{5 - x}{11 - x - y} \leq 1.$$

Por inspección, se tiene que, por ejemplo, el par $(x, y) = (0, 0)$, que corresponde a un juego del tipo “guerra de los sexos”, soporta el equilibrio propuesto.

(b) Para el juego de la derecha:

- i. Determine las funciones (o correspondencias) de mejor respuesta para cada jugador.

Solución:

Siguiendo pasos análogos a los desarrollados en la parte a), tenemos que el pago esperado para los jugadores 1 y 2 están dados por

$$\begin{aligned} U_1(P_U; P_R, P_C) &= P_U(6P_C - 5 + 7P_R) - 4P_R + 11 \\ U_2(P_R, P_C; P_U) &= P_C(2P_U - 1) + 2P_R(2P_U - 1) - 4P_U + 11 \end{aligned}$$

de donde se tiene que las correspondencias de mejor respuesta están dadas por

$$P_U(P_R, P_C) = \begin{cases} 1 & \text{si } 6P_C + 7P_R - 5 > 0 \\ [0, 1] & \text{si } 6P_C + 7P_R - 5 = 0 \\ 0 & \text{si } 6P_C + 7P_R - 5 < 0 \end{cases}$$

$$P_R(P_C; P_U) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_U > 1/2 \\ [0, 1] & \text{si } P_U = 1/2 \\ 0 & \text{si } P_U < 1/2 \end{cases}$$

$$P_C(P_R; P_U) = \begin{cases} 0 & \text{si } P_U > 1/2 \\ [0, 1] & \text{si } P_U = 1/2 \\ 0 & \text{si } P_U < 1/2 \end{cases}$$

ii. Encuentre **todos** los equilibrios de Nash.

Solución:

Los equilibrios son: $\{(P_U = 1, P_R = 1), (P_D = 1, P_L = 1), (P_U = 1/2, 0 \leq P_R = [5 - 6P_C]/7 \leq 1, P_C \in [0, 1])\}$.

Problema 3

1. (a) Encuentre los precios (p_1^*, p_2^*) y las utilidades (π_1^*, π_2^*) que maximizan el bien común, entendido este último como la suma de las utilidades de ambas firmas.

Solución:

La suma de las utilidades de ambas firmas está dada por la función

$$\begin{aligned} & \pi_1(p_1, p_2) + \pi_2(p_2, p_1) \\ &= q_1(p_1, p_2)(p_1 - c) + q_2(p_2, p_1)(p_2 - c) \\ &= p_1(a + c - bc) + p_2(a + c - bc) + 2bp_1p_2 - p_1^2 - p_2^2 - 2ac \end{aligned}$$

que es estrictamente cóncava bajo la condición $b < 1/2$, por lo que las condiciones de 1^{er} orden son suficientes para caracterizar la solución óptima al problema

$$\max_{p_1 \geq 0, p_2 \geq 0} \pi_1(p_1, p_2) + \pi_2(p_2, p_1).$$

De las condiciones de primer orden se tiene que

$$\begin{aligned} p_1^* = p_2^* &= \frac{a(1+b) + c(1-b^2)}{2(1-b^2)} = \frac{a}{2(1-b)} + \frac{c}{2} \\ \pi_1^* = \pi_2^* &= \left[a - \left(\frac{a}{2(1-b)} + \frac{c}{2} \right) + b \left(\frac{a}{2(1-b)} + \frac{c}{2} \right) \right] \left(\left(\frac{a}{2(1-b)} + \frac{c}{2} \right) - c \right) \end{aligned}$$

- (b) Encuentre los precios (p_1^B, p_2^B) y las utilidades (π_1^B, π_2^B) que constituyen un equilibrio de Nash, en un escenario en donde ambas firmas eligen el precio a cobrar, simultáneamente.

Solución:

Dada la concavidad de las funciones $\pi_i(p_i, p_j)$, $i = 1, 2$, $i \neq j$, de las condiciones de 1^{er} orden, y la intersección de las funciones de mejor respuesta se tiene que

$$\begin{aligned} p_1^B = p_2^B &= \frac{(a+c)}{(2-b)} \\ \pi_1^B = \pi_2^B &= \left[a - \left(\frac{(a+c)}{(2-b)} \right) + b \left(\frac{(a+c)}{(2-b)} \right) \right] \left(\frac{(a+c)}{(2-b)} - c \right) \end{aligned}$$

- (c) Encuentre los precios y las utilidades que constituyen un EPS, en un escenario en donde la firma 1 selecciona su precio antes que la firma 2, lo que es observable por la firma 2.

Solución:

La función de mejor respuesta de cada una de las firmas está dada por

$$R_i(p_j) = \frac{a + bp_j + c}{2}, \quad i \neq j$$

Luego, el problema de la firma 1 está dado por

$$\max_{p_1 \geq 0} \pi_1(p_1, R_2(p_1))$$

de donde se tiene que

$$p_1^{SB} = \left[a + c - b \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \right) + \frac{1}{2}b^2c \right] / (b^2 + 2)$$

$$\pi_1^{SB} = q_1(p_1^{SB}, R_2(p_1^{SB})) (p_1^{SB} - c)$$

- (d) Encuentre el valor mínimo del factor de descuento $0 < \delta^* < 1$, común a ambas firmas, que hace sostenible un acuerdo de colusión entre las firmas, bajo la siguiente estrategia del tipo gatillo: “cobrar un precio igual a (p_1^*, p_2^*) si en el pasado ambas firmas han cobrado (p_1^*, p_2^*) , y de lo contrario, cobrar (p_1^B, p_2^B) por siempre”.

Solución:

Primero, nótese que $\pi_i^* > \pi_i^B$ si $b > 0$. El valor de descuento que soporta una estrategia como la propuesta debe satisfacer la condición

$$\frac{\pi_i^*}{1 - \delta^*} \geq \pi_d + \pi_i^B \frac{\delta^*}{1 - \delta^*}, \quad (1)$$

en donde π_d es la desviación más beneficiosa que la firma i puede obtener, por una única vez, al romper el acuerdo de colusión. Esta cantidad está dada por

$$\pi_d(p_d, p_j^B) = \left[\frac{a}{2} + \frac{b(a+c)}{2(2-b)} - \frac{c}{2} \right]^2$$

en donde $p_d \in \arg \max_{p_i \geq 0} [a - p_i + bp_j^B] (p_i - c)$.

Luego, δ^* debe satisfacer la expresión

$$\delta^* \geq \frac{\pi_d - \pi_i^*}{\pi_d - \pi_i^B}$$

- (e) ¿Cuál es el principio, o regla, que debe satisfacer una estrategia del tipo gatillo para conformar un EPS de cooperación? ¿Qué cualidad deben poseer los pagos históricos para implementar una estrategia como la descrita en la parte d)?

Solución:

El principio, o regla, que debe satisfacer una estrategia del tipo gatillo para soportar un EPS de cooperación es la dispuesta en (1); esto es, que el valor presente de la utilidad que genera la estrategia cooperativa, sea superior a la utilidad de romper el acuerdo y recibir, a continuación, un pago de “castigo” por siempre. Para que este tipo de estrategias sean factibles de ser implementadas, se requiere que los pagos históricos sean observables.

- (f) ¿Cuál es el mejor acuerdo de precios idénticos al que pueden llegar los duopolistas, bajo una estrategia del tipo gatillo, si el factor de descuento de ambos, $0 < \delta < 1$, es tal que $0 < \delta < \delta^* < 1$? Determine dicho nivel como función del parámetro δ .

Propuesto

Problema 4 *Describe el mecanismo para licitar concesiones de carreteras propuesto por Engel, Fischer y Galetovic, indicando sus ventajas y desventajas, respecto de los métodos usados normalmente para licitar carreteras.*

Solución (Preparada por R. Fischer):

Primero, el regulador fija la tarifa máxima a cobrar. Luego, el método consiste en que las firmas compiten en el valor presente del monto mínimo de recaudación de peajes que estarían dispuestos aceptar por construir, operar y mantener la carretera concesionada. A medida que la concesión se alarga, se acumulan y descuentan (a alguna tasa predeterminada como $LIBOR + x\%$, por ejemplo) los ingresos por peajes, hasta que la suma solicitada se obtiene, en cuyo momento termina la concesión. Por lo tanto, su plazo es variable, a diferencia de otros métodos (**5pts**).

1. Sus propiedades son (**7pts**):

- (a) Debido a que hay un riesgo menor para el concesionario, la suma solicitada (y pagada en valor esperado) será menor que bajo sistemas de plazo fijo.
- (b) los requerimientos de información son mínimos: basta con verificar la calidad de la carretera y del servicio y vigilar los ingresos. No es necesario conocer los gastos.
- (c) La probabilidad de quiebra, y por ende renegociaciones, es menor.
- (d) Si una firma ofrece un precio artificialmente bajo, con el objeto de renegociar luego, el gobierno puede ofrecer pagar la suma que falta por recaudar, con lo que se desincentivan las ofertas artificialmente bajas.
- (e) Se pueden modificar fácilmente los contratos: si se desea ampliar la carretera, basta cancelar la concesión, pagar lo que falta por recaudar y licitar el nuevo proyecto. No hay discusión sobre cuánto pagar. Por lo mismo, el comportamiento discrecional del regulador está limitado en sus efectos sobre el concesionario, lo que reduce el riesgo para éste.
- (f) Se pueden introducir consideraciones de economía política (por ejemplo, peajes uniformes en distintos tramos de la Ruta 5), o modificarlos si los peajes se ven inadecuados, por ejemplo, porque hay congestión. En tal caso, la concesión se acortaría.
- (g) Debido al menor riesgo de tráfico, la necesidad de garantías es menor.

2. Tiene dos desventajas (**8pts**):

- (a) No es apropiado para concesiones en las que la demanda depende de acciones del concesionario, y segundo,
- (b) los potenciales concesionarios creen que es más difícil conseguir financiamiento, debido a que no se sabe cuando se acaba la concesión.