Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Control 2
7 de Octubre de 2005

Problema 1

El Cuerpo de Bomberos de una comuna ha dividido su región de cobertura para combatir incendios forestales en N zonas. El número de incendios que ocurren en la zona i puede ser modelado según un proceso de Poisson de tasa λ_i [incendios/hora]. Los incendios pueden tener *alta peligrosidad* con probabilidad p_A o *baja peligrosidad* con probabilidad $p_B = 1 - p_A$.

1. (1,5 pto.) ¿Cuántas horas pasan, en promedio, desde que se produce un incendio de *alta peligrosidad* en la zona 1 hasta el próximo incendio de *baja peligrosidad* en una zona diferente a esta?
2. (1,0 pts.) Se sabe que en un intervalo de tiempo $[0, t]$ ha ocurrido un total de M incendios. Calcule la probabilidad de que el último de los incendios de *baja peligrosidad* haya ocurrido entre $t/3$ y $t/2$.
3. (2,0 pts.) Suponga que el i-ésimo incendio de alta peligrosidad que ocurre en la comuna, independiente de la zona en que ocurre, provoca un *daño* D_i en las dependencias de la comuna. Los D_i, $i \geq 1$, son v.a. exponenciales de parámetro γ, todas iid e independientes del número de incendios. El daño debido a uno de estos incendios decrece exponencialmente en el tiempo, i.e., para un incendio de alta peligrosidad de daño inicial D, t unidades de tiempo después al instante en que ocurrió, su daño es cuantificado en $De^{-\alpha t}$. Si suponemos que los daños de estos incendios son aditivos, muestre que la esperanza de los daños totales cuantificados en un instante t está dada por:
$$\frac{p_A \lambda}{\alpha \gamma}(1 - e^{-\alpha t})$$
donde $\lambda = \sum_i \lambda_i$.
Indicación: Si X e Y son v.a. independientes, $E(XY) = E(X)E(Y)$.
4. (1,5 ptos.) Las llamadas para dar avisos de incendios son recibidos por N operadores, cada uno con dedicación exclusiva a una de las zonas. La duración de una llamada de la zona i es fija e igual a T_i[horas]. Durante el tiempo de atención de la llamada, no es posible responder las posibles llamadas sobre otros avisos de su zona. Considere que en cuanto ocurre un incendio, se realiza una llamada desde la zona respectiva y si no es atendida no habrá intentos posteriores por dar aviso sobre ese incendio. Entregue una expresión para la probabilidad de que en un intervalo de t [horas] se hayan respondido más de n llamadas de la zona i.

Problema 2

Clientes llegan a un supermercado según un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/minuto]. Una fracción q_F de los clientes posee la tarjeta de puntos de la cadena y se considera como cliente Frecuente, mientras que una fracción $q_N = 1 - q_F$ no tiene la tarjeta y son clientes Normales. Una vez que una persona entra al supermercado, independiente del tipo de cliente que se trate, permanece recorriendo los pasillos durante un lapso de W_C[minutos], luego de lo cual se dirige a una de las cajas del local. El tiempo de espera antes de comenzar a ser atendido por la cajera se considera despreciable.

Los tiempos de atención de la cajera, t_i, para un cliente tipo i, son variables aleatorias i.i.d. exponenciales con medias $1/\mu_i$ [minutos], con $i \in${Frecuente, Normal}.

Por otro lado se sabe que el monto de la compra de un cliente tipo i, es una variable aleatoria continua con media γ_i [minutos], con $i \in${Frecuente, Normal}.

1. (2,0 ptos.) Calcule la cantidad Total esperada de clientes que hay dentro del supermercado, incluyendo los clientes en las cajas, en un instante t cualquiera. Denote a esta esperanza $X(t)$.
2. (1,0 pto.) Calcule el número esperado de clientes Frecuentes que se encuentran en la zona de cajas en un instante t cualquiera. Denote a este valor $Y_F(t)$.
3. (2,0 ptos.) El Gerente de Ventas del supermercado está evaluando una promoción que consiste en regalar una compra gratis al primer cliente que entre al supermercado después del sonido de una alarma. Si la alarma suena a intervalos fijos de τ minutos, ¿Cuál es el valor esperado del costo diario que tendrá para el supermercado aplicar esta promoción?[1] Suponga que las puertas del supermercado están abiertas durante T minutos al día y que las cajas se cierran una vez que todos los clientes que estaban dentro se hayan retirado del local. La promoción no altera ninguno de los parámetros de la situación anterior. Además si entre una alarma y otra no hay llegadas de clientes el premio no se acumula.
4. (1,0 pto.) Considere ahora que el tiempo de espera para ser atentido por una cajera después de haber terminado el recorrido por los pasillos no es despreciable. Este tiempo, denotado por W_Q, es una variable aleatoria de densidad continua conocida $h(W_Q)$, independiente del tipo de cliente. ¿Cómo cambia su respuesta de la parte 1 bajo esta nueva situación?

Problema 3

El gerente de una automotora está estudiando el manejo del inventario para el nuevo modelo que comercializa la tienda.

La automotora abre su local de ventas de lunes a viernes. Se sabe que la cantidad de clientes que llegan una semana cualquiera con intenciones de comprar este modelo puede ser modelada por una variable aleatoria discreta de distribución conocida e idéntica para todas las semanas. En particular, se sabe que en una semana cualquiera llegan k clientes con una probabilidad α_k, donde k puede ser desde 0 hasta un número máximo K.

El número de clientes que vienen en dos semanas diferentes son variables aleatorias independientes (e independientes del número de unidades en inventario y de las ventas efectuadas o perdidas en la semanas anteriores). Si un cliente llega a la tienda y no hay producto, esa venta se pierde.

El gerente de la automotora puede realizar pedidos a la distribuidora una vez a la semana. Estos pedidos se realizan el viernes luego de cerrar el local (es decir, luego de hacer el pedido no hay más ventas hasta el lunes siguiente). Los vehículos son entregados el sábado, de manera que el pedido realizado al final de una semana está disponible para ser vendido al inicio de la próxima semana.

[1] Considere que el costo está dado por el total de los montos de compra de los clientes premiados.

La política en consideración es del tipo (q, Q): se revisa el inventario el viernes en la tarde y si se tienen hasta q unidades en inventario, no se realiza pedido. En caso de tener menos de q unidades, se realiza un pedido de Q unidades adicionales.

Considere que se parte inicialmente con q unidades en inventario.

1. Considere el caso en que $q = 2$, $Q = 4$, $K = 4$ y $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1)$.

   a) (1,0 pto.) Modele el número de unidades en inventario en la automotora al inicio de la semana como una cadena de Markov en tiempo discreto. Especifique claramente los estados y las probabilidades de transición.

   b) (1,5 ptos.) Justifique por qué la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias y plantee un sistema que permita calcularlas.

2. (2,0 ptos.) Modele el número de unidades en inventario al inicio de la semana como una cadena de Markov en tiempo discreto para el caso general $q, Q \in \mathbb{N}$. Considere que $q \leq Q$ y que $Q = K$. Especifique claramente los estados y las probabilidades de transición. Defina los casos genéricos que considere apropiados para describir las probabilidades de transición.

3. Considere conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena del punto 2. Denote por π_j la probabilidad estacionaria asociada al estado j de esa cadena y responda:

   a) (1,0 pto.) ¿Cuál es el número esperado de ventas por semana? ¿Cuál es el número esperado de ventas *perdidas* por semana?

   b) (0,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de realizar un pedido en una semana cualquiera en el largo plazo?